ISBN 9788770668699

Projekt 5.19 Definition og differentiation af omvendt funktion

1. De elementære funktioner - og alle de andre

De elementære funktioner som de lineære funktioner, de trigonometriske funktioner $\sin(x)$ og $\cos(x)$, den naturlige eksponentialfunktion e^x og den naturlige logaritmefunktion $\ln(x)$, samt potensfunktionerne x^a er en slags byggesten hvoraf hovedparten af andre funktioner bygges op ved hjælp af de fire traditionelle regningsarter, $+, -, \cdot, :$, samt de to særlige operationer der findes i funktionernes verden: *Sammensat funktion*, og *omvendt funktion*.

Det betyder, at hvis vi både har styr på, hvordan vi differentierer de elementære funktioner, og har styr på alle regneregler for differentiation, så kan vi populært sagt "differentiere hvad som helst", der er differentiabel.

Eksempel 1. Vi kan klare os med færre byggesten
I virkeligheden er det endnu mere simpelt:

- e^x og $\ln(x)$ er hinandens omvendte funktioner, så har vi styr på, hvordan vi differentierer den ene og kan vi regnereglen med at differentiere omvendt funktion, har vi også styr på den anden. Det ser vi på i sidste afsnit.
- sin og cos er forbundet med formlen $\cos(v) = \sin\left(90^\circ - v\right)$, når det skrives med grader, eller $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, når det skrives med radianer. Har vi styr på hvordan vi differentierer sinus, og kan vi regnereglen for sammensat funktion, kan vi også differentiere cosinus.
- Da e^x og $\ln(x)$ er hinandens omvendte funktioner gælder der, at $e^{\ln(x)} = x$. Derfor er $x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{a \cdot \ln(x)}$.
  Har vi styr på, hvordan vi differentierer e^x, og kan vi regnereglen for sammensat differentiation, så kan vi også differentiere x^a

Dvs. byggestenene kan reduceres til: de lineære funktioner, sinus og en af de to e^x eller $\ln(x)$.

I A-bogen vil vi gå dybere ind i dette og vise, hvordan vi ved hjælp af integralregning kan give helt præcise definitioner af logaritmefunktioner, eksponentialfunktioner og trigonometriske funktioner.

6. Omvendt funktion og differentiation af omvendt funktion (supplerende stof)

Vi har i B-bogens kapitel 4 afsnit 6 formuleret sætningen om differentiation af $\ln(x)$*, og dér givet et geometrisk bevis for formlen. I det følgende gennemgås dette mere generelt.*

I en række tilfælde, hvor en funktion indgår i en ligning, har vi brug for at kunne fjerne funktionen. Fx:

1) $\sin(x) = 0.8$ 2) $e^x = 36$ 3) $5\cos(2t + \frac{\pi}{3}) = 4{,}3$ 4) $\ln(0.3x - 13{,}7) = 4{,}7$

I tilfælde som disse kan vi fjerne funktionen ved at anvende *den omvendte funktion*:

- Eksponentialfunktionen e^x fjernes ved at anvende den naturlige logaritmefunktion, ln. ln er således den omvendte funktion til e^x.
- Den naturlige logaritme, ln fjernes ved at anvende den naturlige eksponentialfunktion e^x. e^x er således den omvendte funktion til ln.
- sin og cos fjernes ved anvende henholdsvis $\sin^{-1}$ og $\cos^{-1}$. Disse funktioner kaldes også for *Arcusfunktioner*, og man skriver af og til Arcsin i stedet for $\sin^{-1}$ og Arccos i stedet for $\cos^{-1}$. Arcusfunktionerne er således de omvendte til de trigonometriske funktioner.

I eksemplerne ovenfor har vi således:

Eksempel 1. $\sin(x) = 0.8$

$\sin^{-1}\left(\sin(x)\right) = \sin^{-1}\left(0.8\right)$

$x = \sin^{-1}\left(0.8\right)$

Eksempel 2. $e^x = 36$

$\ln(e^x) = \ln(36)$

$x = \ln(36)$

Øvelse

Løs selv ligningerne i eksempel 3 og 4.

Definition

Hvis der om en funktion f, der er defineret på et bestemt interval I gælder, at for enhver *y*-værdi vi vælger i værdimængden findes præcis én *x*-værdi i definitionsmængden, således at:

$$y = f(x),$$

så kalder vi den funktion, der knytter *x* til *y for den omvendte funktion til f*, og vi betegner funktionen f^{-1}.

f^{-1} er således defineret ved, at

$$f^{-1}(y) = x \text{, når } y = f(x) \qquad (*)$$

Grafisk bestemmes den *x*-værdi, der er knyttet til en given *y*-værdi ved at vi går vandret ud fra punktet *y* på 2. aksen til vi rammer grafen for *f*, og hvor vi rammer, går vi lodret ned (eller op) til 1. aksen, hvor vi aflæser *x*-værdien.

Bemærkning 1. Da vi har byttet om på 1. og 2. aksen i den grafiske bestemmelse af funktionsværdierne $f^{-1}(y)$, så kan hele grafen for f^{-1} fremkomme ved at vi spejler grafen for *f* i linjen med ligning $y = x$. Denne spejling bytter jo netop om på de to akser.

Bemærkning 2. Hvis vi kombinerer de to ligninger i (*) får vi:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{og} \quad y = f(f^{-1}(x))$$

Dette er den generelle form, som vi så illustreret med de to eksempler ovenfor.

De omvendte funktioner er ofte interessante i sig selv og i undersøgelsen af disse funktioner og af deres grafiske forløb har vi brug for kendskab til deres afledede funktioner. Vi tillader os at tale om den afledede funktion af den omvendte fordi definitionen på at være differentiabel, nemlig at være lokalt lineær, naturligvis "arves" af den graf der fremkommer ved at spejle i linjen $y = x$.

Vi demonstrerer nu hvorledes vi bestemmer de afledede til omvendte funktioner i de to specialtilfælde med ln og $\sin^{-1}$, og formulerer derefter den generelle sætning.

Sætning. Differentiation af $\ln(x)$

$\ln(x)$ er differentiabel for alle $x > 0$ med differentialkvotienten:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis.

Ud fra definitionen af $\ln(x)$ som den omvendte til e^x har vi følgende:

$e^{\ln(x)} = x$

$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)'$ — Differentier på begge sider

$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1$ — Udnyt reglen for sammensat differentiation, samt $(x)' = 1$

$x \cdot (\ln(x))' = 1$ — Udnyt, at e^x og $\ln(x)$ ophæver hinanden

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ — Isoler $(\ln(x))'$

hvilket var det ønskede resultat.

Sætning. Differentiation af $\sin^{-1}(x)$

$\sin^{-1}(x)$ er differentiabel i sin definitionsmængde med differentialkvotienten:

$$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bevis.

I omskrivningerne i dette tilfælde får vi brug for ”Pythagoras sætning” for sin og cos:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Hvis du har glemt denne sætning, så slå op i C-bogens kapitel 8.

Formlen kan omskrives til:

$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ (*)

Ud fra definitionen af $\sin^{-1}(x)$ som den omvendte til $\sin(x)$ har vi følgende:

$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right) = x$

$\left(\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)\right)' = (x)'$ — Differentier på begge sider

$\sin'\left(\sin^{-1}(x)\right) \cdot \left(\sin^{-1}(x)\right)' = 1$ — Udnyt reglen for sammensat differentiation, samt $(x)' = 1$

$\cos\left(\sin^{-1}(x)\right) \cdot \left(\sin^{-1}(x)\right)' = 1$ — Udnyt, at $\sin'(y) = \cos(y)$

$\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))} \cdot \left(\sin^{-1}(x)\right)' = 1$ — Udnyt (*)

$\sqrt{1-x^2} \cdot \left(\sin^{-1}(x)\right)' = 1$ — Udnyt af sin og $\sin^{-1}$ ophæver hinanden

$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — Isoler $\sin^{-1}$

hvilket var det ønskede resultat.

ISBN 9788770668699

Sætning. Differentiation af den omvendte funktion f^{-1}

Antag funktionen *f* er differentiabel i x_0 og at *f* har en omvendt funktion i den definitionsmængde vi arbejder inden for. Antag endvidere, at $f'(x_0) \neq 0$.

Så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med differentialkvotient:

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f(x_0)}, \text{ eller: } \qquad \left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f(f^{-1}(y_0)}$$

Bevis.

Vi følger gangen i specialtilfældene:

$f(f^{-1}(y)) = y$	Udnyt definitionen på omvendt funktion
$\left(f(f^{-1}(y))\right)' = \left(y\right)'$	Vi differentierer med hensyn til y
$f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}(y)\right)' = 1$	Udnyt reglen for sammensat differentiation, samt $\left(x\right)' = 1$
$y \cdot \left(f^{-1}(y)\right)' = 1$	Udnyt, at *f* og f^{-1} ophæver hinanden
$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{y_0}$	Indsæt y_0 og Isoler $\left(f^{-1}(y_0)\right)'$
$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f(x_0)}$	Indsæt $y_0 = f(x_0)$
$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f(f^{-1}(y_0))}$	Udnyt, at $x_0 = f^{-1}(y_0)$

hvilket var det ønskede resultat.