ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 5.18 Størrelsesorden for funktionerne a^x, x^a og $\ln(x)$

Introduktion

I dette forløb vil vi dels få et redskab til at sammenligne, hvor hurtigt givne funktioner vokser (eller aftager), og dels bevise, at blandt standardfunktionerne a^x, x^a og $\ln(x)$ dominerer eksponentialfunktioner uanset størrelsen af grundtallet altid over både potens- og logaritmefunktioner, mens potensfunktioner uanset størrelsen af potensen altid dominerer over logaritmefunktioner.

Forløbet er et lille stykke deduktiv matematik og er bygget op således, at (ihærdige) elever på B-niveau samt elever på A-niveau – med en vis vejledning – selv kan arbejde sig igennem øvelserne og bevise sætningerne.

Grænseværdi

Vi kender mange funktioner, der går mod uendelig, når x går mod uendelig (vi skriver $f(x) \to \infty$,når $x \to \infty$) . Når vi taler om dette i gymnasiet appelleres ofte til intuitionen. Men hvordan opstiller vi en helt præcis definition på, hvad det vil sige, at en funktion går mod uendelig, når *x* går mod uendelig?

Definition: At gå mod uendelig
En funktion $f(x)$ siges at gå mod uendelig for *x* gående mod uendelig, hvis der til *ethvert* tal *K findes et* tal *k*, således at følgende er opfyldt:
For ethvert $x > k$ gælder at $f(x) > K$

Dette kan umiddelbart synes som en noget uoverskuelig definition, men skal man vise, at en funktion går mod uendelig, når *x* går mod uendelig, kan man forestille sig at "fjenden" kommer med et *K* (kan være et meget stort tal). Det er så vores opgave at "forsvare" os, det vil sige at vi skal vise, at funktionsværdierne også kan komme over dette *K*, blot vi går langt nok ud af tallinjen. Det gør vi ved at finde et tal *k* – bestemt ud fra *K* - således at $f(x) > K$, når $x > k$. Lidt løst sagt: funktionsværdierne kan blive lige så store, som vi ønsker!

Lad os prøve at bevise følgende sætninger ud fra denne definition:

Sætning 1.
Lad $f(x) = e^x$. Da gælder, at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$

Bevis
Fjenden kommer med *K*. Vi ønsker at bestemme et *k* således at $f(x) > K$, når $x > k$.
Hvis $f(x) > K$ må følgende gælde (hvorfor – overvej, både hvorfor vi kan regne fremad og hvorfor vi kan regne tilbage, dvs. hvorfor $\Leftrightarrow$ gælder?):

$$e^x > K \quad \Leftrightarrow$$
$$\ln(e^x) > \ln(K) \quad \Leftrightarrow$$
$$x > \ln(K)$$

Vi kan således forsvare os med $k = \ln(K)$, idet der jo af ovenstående udregninger (hvor vi har regnet ensbetydende, dvs vi kan slutte begge veje) følger at
hvis $x > k$ $(= \ln(K))$ da er $f(x) > K$.

Sætning 2
Lad $f(x) = a^x, a > 1$. Da gælder at $f(x) \to \infty$,når $x \to \infty$

ISBN 9788770668699

Øvelse
Bevis selv sætningen.
(*Hint*: Løs uligheden $a^x > K$ med hensyn til *x*. Af disse udregninger følger så, hvad *k* kan vælges til.)

Sætning 3
Lad $f(x) = \ln(x)$. Da gælder at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$

Øvelse
Bevis selv sætningen efter samme principper som ovenfor.

Sætning 4
Lad $f(x) = x^r, r > 0$. Da gælder at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$

Bemærk: Heraf følger. at $\sqrt{x} \to \infty$, når $x \to \infty$

Øvelse
Bevis selv sætningen efter samme principper som ovenfor.

Vi har nu bevist, ud fra vores definition, at funktionerne a^x, x^a og $\ln(x)$ (specielt også e^x) går mod uendelig, når *x* går mod uendelig forudsat at $a > 1$ og $r > 0$

Øvelse 1
a) Prøv selv at opstille en definition af hvad det vil sige at:
1. $f(x) \to 0$, når $x \to \infty$
2. $g(x) \to 0$, når $x \to 0$
3. $h(x) \to \infty$, når $x \to 0$
4. $p(x) \to -\infty$, når $x \to 0$

og prøv selv at formulere yderligere eksempler på grænseværdier.

b) Tilfældet hvor $f(x) \to 0$ kan du evt. prøve først at håndtere for positive funktioner, og dernæst overveje hvilket værktøj vi har til at hjælpe os, hvis funktionen kan antage både positive og negative værdier.
Lav i hvert tilfælde en grafisk skitse af situationen.

c) Prøv i hvert af de 4 tilfælde, og i de yderligere du selv kommer på, om du kan finde en konkret funktion med regneforskrift, som opfylder betingelsen.

Øvelse 2
Udnyt de nye definitioner til at bevise at
1. $\ln(x) \to -\infty$, når $x \to 0(+)$ ($0(+)$ betyder at *gå mod 0 fra højre*. $\ln(x)$ er jo ikke defineret for $x \leq 0$)
2. $e^x \to 0$, når $x \to -\infty$
3. $a^x \to 0$, når $x \to \infty$ *og* $0 < a < 1$.

Størrelsesorden

Betragtes graferne for e^x og for $\ln(x)$ springer det i øjnene, at e^x vokser langt hurtigere. Logaritmefunktionerne er faktisk den langsomst voksende klasse af funktioner, vi møder i gymnasiet. Fx ved vi, at for titalslogaritmen log gælder, at $\log(10^6)=6$ og $\log(10^8)=8$. Dvs at mens vi bevæger os på x-aksen fra 1 million ud til 100 millioner så bevæger grafen sig op fra 6 til 8. Derfor forekommer det indlysende, at ikke alle funktioner, der går mod uendelig, gør det lige hurtigt.

Definition: Sammenligning af størrelsesorden
Givet to funktioner *f* og *g* der begge går mod uendelig, når *x* går mod uendelig.
Vi siger, at funktionen *f* går hurtigere mod uendelig end funktionen *g*, hvis der gælder

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \text{ når } x \to \infty$$

Øvelse 3
Vis følgende:

Hvis $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$ da vil $\frac{1}{f(x)/g(x)} = \frac{g(x)}{f(x)} \to 0$ når $x \to \infty$, og omvendt.

Vi kan derfor anvende den udgave, det falder lettest at bruge.

Vi skal i det følgende vise følgende 4 sætninger:

1) $\frac{x^r}{\ln(x)} \to \infty$, når $x \to \infty$ og r>0.

Vi siger, at potensfunktionen vinder over den naturlige logaritmefunktion når r>0. Vi bemærker ligesom tidligere, at hermed gælder også at

$\frac{\ln(x)}{x^r} \to 0$, når $x \to \infty$

2) $\frac{a^x}{x^r} \to \infty$, når $x \to \infty$ og a>1.

Vi siger, at eksponentialfunktionen vinder over potensfunktionen når a>1.

3) $x^r \cdot \ln(x) \to 0$, når $x \to 0^+$ *og* $r > 0$

4) $x^r \cdot a^x \to 0$, når $x \to \infty$ *og* $0 < a < 1$

Disse 4 sætninger om funktionernes størrelsesforhold bevises ved at følge trinene i de efterfølgende øvelser.

Øvelse 4

Betragt funktionen $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $x \in]0;\infty[$

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema og benyt dette til at vise:

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < 1 \text{ for alle } x > 0.$$

ISBN 9788770668699

Øvelse 5

a) Benyt resultatet fra øvelse 4 til at vise følgende:

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

b) Gør rede for at $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ når $x \to \infty$ (brug sætning 4), og benyt dette til at vise:

$$\frac{\ln(x)}{x} \to 0, \text{ når } x \to \infty$$

c) Udnyt dette til at vise:

$$\frac{\ln(x^r)}{x^r} \to 0, \text{ når } x \to \infty \text{ hvis } r > 0$$

(*Hint*: Substituer $z = x^r$)

Øvelse 6

a) Benyt logaritmereglerne til at vise at $\frac{\ln(x)}{x^r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\ln(x^r)}{x^r}$

b) Udnyt punkt a) til at vise:

$$\frac{\ln(x)}{x^r} \to 0, \text{ når } x \to \infty \text{ og } r > 0$$

c) Argumenter nu for. at:

$$\frac{x^r}{\ln(x)} \to \infty, \text{ når } x \to \infty, \text{ hvor } r > 0$$

Hermed er den første påstand bevist.

Øvelse 7

Betragt funktionen $f(x) = \frac{a^x}{x^r}$, hvor $a > 1$ og $r > 0$

a) Vis at $\ln(f(x)) = x \cdot \left(\ln(a) - r \cdot \frac{\ln(x)}{x} \right)$

b) Udnyt øvelse 5, til at vise, at $\ln(f(x)) \to \infty$, når $x \to \infty$

c) Udnyt kendskabet til $\ln(x)$ til at vise:

$$f(x) \to \infty, \text{ når } x \to \infty$$

Vi har således vist den anden påstand

$$f(x) = \frac{a^x}{x^r} \to \infty \text{ , når } x \to \infty, \text{ hvor } a > 1 \text{ og } r > 0$$

Øvelse 8

a) Gør rede for følgende omskrivninger i detaljer:

$$x^r \cdot \ln(x) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^r}} = \frac{-r \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{r \cdot \frac{1}{x^r}} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^r\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^r}$$

b) Benyt dette, samt øvelse 5 og vores viden om, at $\frac{1}{x} \to \infty$, når $x \to 0(+)$ til at vise at

$$x^r \cdot \ln(x) \to 0, \text{ når } x \to 0(+) \text{ , hvis } r > 0$$

Vi har hermed vist den tredje påstand.

Øvelse 9

Betragt funktionen $f(x) = x^r \cdot a^x$, hvor $0 < a < 1$

a) Vis at $\ln(f(x)) = x \cdot (r \cdot \frac{\ln(x)}{x} + \ln(a))$

b) Vis at $\ln(f(x)) \to -\infty$, når $x \to \infty$ hvis $0 < a < 1$

c) Udnyt kendskabet til $\ln(x)$ til at vise, at $f(x) \to 0$, når $x \to \infty$

Vi har således bevist den fjerde og sidste påstand:

$x^r \cdot a^x \to 0$, når $x \to \infty$, hvor $0 < a < 1$

Hermed er de fire påstande vist!

Perspektivering

Den første, der gennemførte et systematisk studium af funktioners størrelsesorden var den engelske matematiker Godfrey Harold Hardy (1877-1947). Det skete i et værk fra 1910, *Orders of Infinity*, hvor man kan finde de resultater, vi har bevist i dette projekt og en masse andre. Hardy er berømt for sine mange markante citater, bla. følgende: *Nothing I have ever done is of the slightest practical use*. Han var modstander af matematikkens anvendelse i krig i en sådan grad, at han vendte dette til en aversion mod anvendt matematik generelt. Men det er ikke en let kamp – allerede i hans egen tid fandt en række af hans meget abstrakte talteoretiske resultater anvendelse i kvantemekanikken. Og hans arbejder om størrelsesorden er i dag et helt centralt emne indenfor udviklingen af algoritmer af enhver art, Sammenligning af forskellige algoritmers regneudtryk indgår altid i en vurdering af, hvor lang tid en computer er om at gennemføre bestemte beregninger. Drejer det sig fx om at regne sig igennem de naturlige tal, et af gangen, indtil man finder det ønskede resultat, er det ret afgørende om tiden der kræves vokser logaritmisk, polynomielt (dvs som en potens), eller eksponentielt.
Hardy skrev et forholdsvist let tilgængeligt sprog og man kan få et godt indtryk af værket og hans stil, ved at se det og måske læse noget af det indledende. Værket ligger ***her***.