

Projekt 5.16 l'Hôpitals regel – et opgaveforløb

1. Vis Den generaliserede middelværdisætning:

Hvis f og g er differentiable i intervallet $I =]a; b[$, og $g'(x) \neq 0$ i I , så findes et tal c i I , så:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(Hint: Argumenter først ved hjælp af middelværdisætningen for, at $g(b) - g(a) \neq 0$. Betragt dernæst funktionen $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$, og vis $h(b) - h(a) = 0$. Anvend så endelig middelværdisætningen på $h(x)$.)

2. Vis ved hjælp af Den generaliserede middelværdisætning, følgende vigtige sætning til vurdering af grænseværdier. Sætningen kaldes l'Hôpital's regel, opkaldt efter en rig fransk adelsmand, der købte sætningen af en knap så rig, men meget dygtig matematiker, Johan Bernouilli:

Hvis f og g begge har grænseværdien 0 for $x \rightarrow a$, hvis $g'(x)$ og $g'(x) \neq 0$, når $x \neq a$, og hvis

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L, \text{ når } x \rightarrow a, \text{ så gælder også, at } \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow L, \text{ når } x \rightarrow a.$$

Sætningen gælder også, hvis vi indskrænker os til at se på grænseværdier fra højre eller venstre.

(Hint: Hvis f og g ikke er kontinuerte i a , så lav en kontinuert udvidelse af dem, dvs. definér funktioner $F(x)$ og $G(x)$, der er lig med henholdsvis f og g når $x \neq a$, og som begge er 0 i a . Vælg dernæst et $x \neq a$, og vis ud fra Den generaliserede middelværdisætning, at der findes et c mellem a og x , så:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Foretag nu grænseovergangen $x \rightarrow a$ og konkluder ud fra ovenstående ligning.)

3. Gennemfør en grafisk undersøgelse af hvert af nedenstående udtryk, og giv et bud på grænseværdien. Anvend dernæst l'Hôpital's regel til at beregne dem:

a) grænseværdien af $\frac{\sin(t)}{t}$, for $t \rightarrow 0$

b) grænseværdien af $\frac{x^4 + 3x^3 - 2x}{4x^2 + 5x}$, for $t \rightarrow 0$

c) grænseværdien af $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$, for $x \rightarrow 1$

d) grænseværdien af $\frac{\sin^2(t)}{t - \pi}$, for $t \rightarrow \pi$

e) grænseværdien af $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$, for $x \rightarrow 0$

(Hint: sæt på fælles brøkstreg, og udnyt reglen to gange.)