ISBN 978-87-7066-8699

Projekt 4.6 Didaktisk oplæg til et eksperimenterende forløb med fokus på modellering og repræsentationsformer

Dette er et oplæg til underviseren om en mulig udformning af et eksperimenterende forløb, hvor der er fokus på modellering og repræsentationsformer. Oplægget er således ikke et færdigt forløb, men indeholder materialer og forslag, som man kan klippe fra til sit veget forløb. Det skyldes bl.a., at fokus her er arbejdsformer og kompetencer. Det kan realiseres i flere faglige sammenhænge – vægt på geometri, vægt på symbolhåndtering, vægt på anvendelse af værktøjer, vægt på at illustrere differentialregningens muligheder osv. Der er givet eksempler fra alle disse felter.

Introduktion om taksonomi

Det følgende er en eksemplificering af Brolins taksonomi. Denne handler først og fremmest om modelleringsopgaver i matematik, dvs. det er en taksonomi for matematikopgaver og dermed knap så generel som Solo-taksonomien. Taksonomien går fra helt lukkede opgaver til helt åbne opgaver:

Niveau 1: Opgaven er helt lukket. Modellen er givet med diagrammer, variable og relevante sammenhænge i form af ligninger eller forskrifter. Det er også klart, hvad opgaven går ud på: Løsning af en ligning, fastlæggelse af et toppunkt, … Hvis den er meget enkel med fx kun to variable involveret (standardopgave) svarer det nærmest til Solo-taksonomiens første niveau Unistrukturel, men den kan godt involvere flere end to variable, så der skal kombineres lidt før man kan løse opgaven og så kan den nå op på Solo-taksonomiens andet niveau, multistrukturel.

Niveau 2: Opgaven er delvis lukket. Denne gang får vi ikke foræret variabelsammenhængene, men vi får oplyst hvilke variable, der indgår i modellen, så det er ligningerne, vi først skal finde. Det er langt sværere selv at opbygge de nødvendige ligninger, så opgaver af denne type når hurtigt op på det tredje solo-niveau, det relationelle niveau, selv om der også findes simple standardopgaver af denne type (fx givet en retvinklet trekant med kateterne a og b. Find hypotenusen c.)

Niveau 3: Opgaven er delvis åben. Denne gang får vi heller ikke variablene foræret men skal selv identificere de relevante variable. Det er endnu sværere at afkode den slags opgaver, så de vil ikke blot ligge på det tredje solo-niveau, det relationelle, men typisk nå op på det abstrakte. Opgaven kan dog formuleres så den kan løses konkret, hvor man holder sig på det strukturelle niveau, ved at man undlader at forlange en symbolsk gennemregning af problemstillingen, men en fuldstændig løsning vil kunne række op gennem alle niveauerne.

Niveau 4: Opgaven er helt åben. Her får man kun et problemfelt udpeget og skal selv definere problemet/opgaven. Det er selvfølgelig det allersværeste. Her er det næppe muligt at arbejde meningsfyldt hvis man ikke mindst er på tredje soloniveau, det relationelle.

Brolins taksonomi illustreres nemmest ved at gå fra oven og ned. Man kan både vælge at anvende niveauerne i en undervisningsdifferentiering og i en progressionsplan.

ISBN 978-87-7066-8699

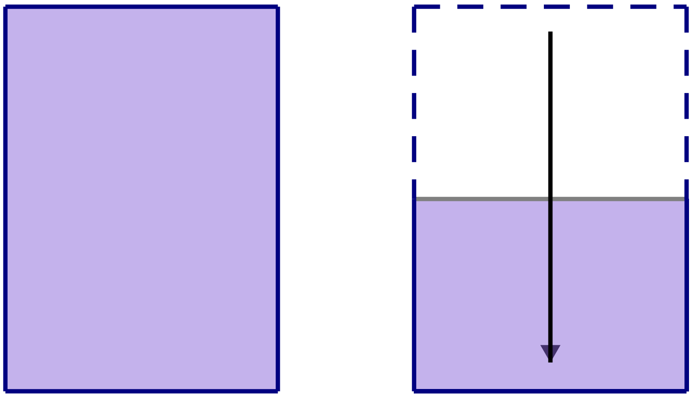
Eksemplificering gennem et eksempel: Foldning af et stykke papir.

Niveau 4:
Et eksempel på et niveau 4 problem kunne være:

Her er et ark papir, fx et A4-papir. Konstruer et interessant problem!

Her må man så overveje hvad man overhovedet kan.

Det simpleste man kan gøre med et stykke papir er nok at folde det på midten:

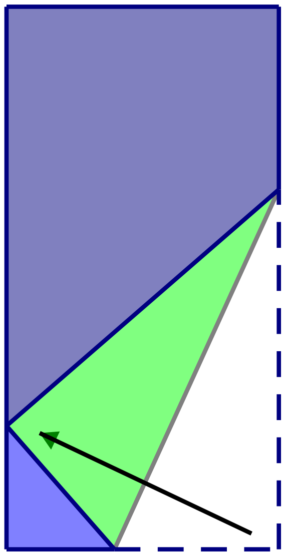


Man kan da se på forholdene i det oprindelige papir og det foldede papir. Det kan gøres helt konkret eller ved hjælpe af mere eller mindre abstrakte udregninger. For et A4-ark opdager man da at de to forhold synes at være ens. Derefter er vejen åbnet for en modellering af A4-arket, inklusive at man til sidst finder symbolske formler for sidelængderne i et A4-ark (givet at A0-arket må være 1 m^2, hvilket man også kan opdage selv).

Det næst simpleste man kan gøre med et stykke papir synes at være at folde det så et hjørne rammer den modsatte side. Det giver anledning til en rig problemstilling, hvor man kan kigge på mange størrelser. Det er typisk for mange af disse problemstilligner at de til syvende og sidst kan reduceres til et tredjegradspolynomium. Det mest kendte eksempel er nok hvor man ser på den trekant i nederste venstre hjørne, der afsnøres af foldningen, og hvor man forsøger at bestemme arealet af den størst mulige trekant. Man kan også se på længden af folden: Hvor lille kan den blive? Men mulighederne er som sagt mange!

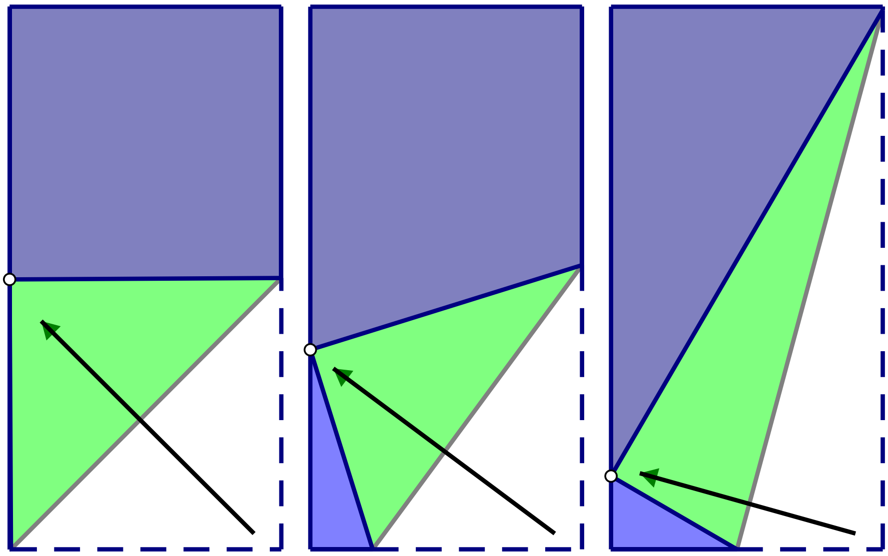
ISBN 978-87-7066-8699

Niveau 3:



Som et eksempel på et niveau 3 problem vil vi nu se på foldningen af et stykke papir, hvor det ene hjørne foldes over på den modstående side. Man skal bestemme den foldning, der giver den mindste fold.

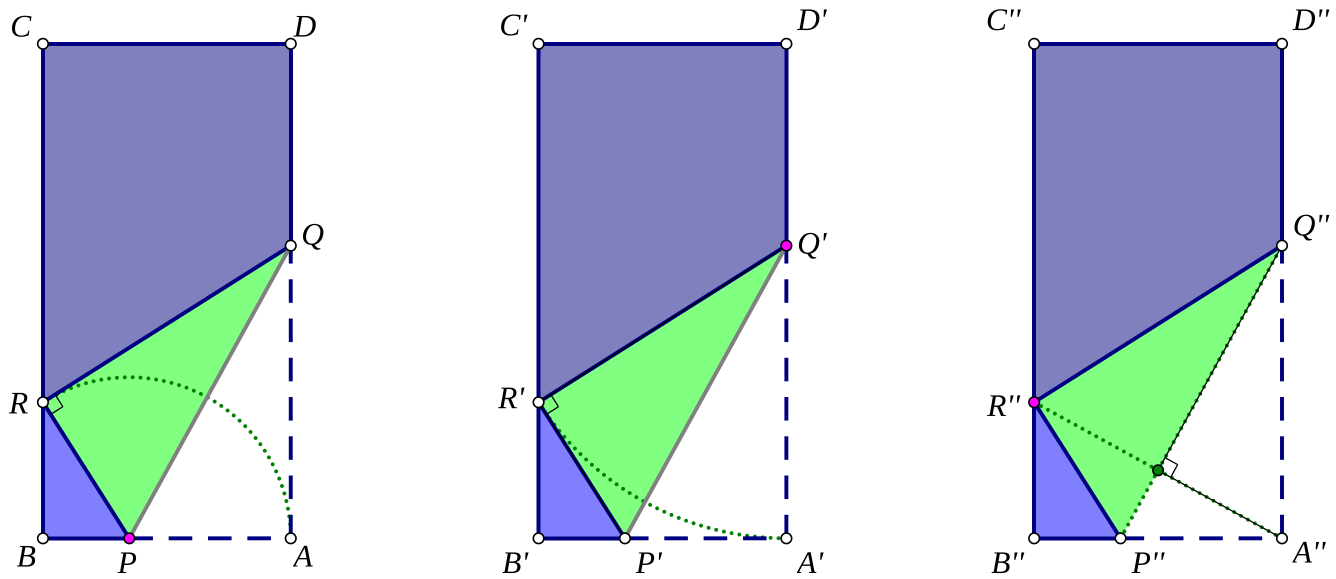
Trin 0: Man kan til at begynde med danne sig et indtryk af problemet ved at afprøve forskellige muligheder for foldningen:



Det ser da ud som om at folden i den ene ende er diagonalen i et kvadrat, at diagonalen bliver lidt kortere når man sænker punktet lidt, idet det nedre punkt på folden rykker hurtigere end det øvre punkt, men at der tilsyneladende ikke er nogen øvre grænse for hvor lang folden kan blive, anden end den der sættes af papirets højde. Man kunne selvfølgelig også prøve at følge med ved at måle med lineal. Men det er svært at komme tæt på det endelige resultat, hvis der er tale om en konkret papirfoldning.

Trin 1 – Geometrisk modellering (C-niveau): Den grundlæggende modellering består da i at konstruere en egentlig dynamisk geometrisk model af foldningen. På dette trin er der endnu ikke indført egentlige talvariable. Konstruktionen kan gennemføres på flere forskellige måder alt efter hvad man tager udgangspunkt i. Hvis vi indfører betegnelser for karakteristiske punkter kan vi fx vælge mellem at tage udgangspunkt i et af de punkter, folden har som endepunkter, eller vi kan tage udgangspunkt i det punkt, hjørnet foldes over i.

Det giver allerede tre forskellige modeller, der konstrueres på hver sin måde:

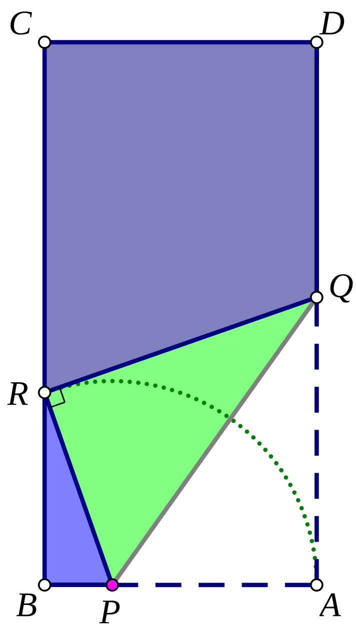


Om man foretrækker cirkelkonstruktionen eller midtnormal-konstruktionen er nok mest et spørgsmål om smag og behag, men valget kan få konsekvenser i de senere dele af analysen. Her følger vi det første spor. Så snart vi har en geometrisk modellering på plads kan vi ved at måle på foldens længde og trække i det røde punkt (her *P*) som driver konstruktionen finde et første bud på den minimale længde. Det er da vigtigt at vi også måler papirets bredde, her 5 cm, (hvorimod højden ingen indflydelse har):

$BA = 5.0000$ cm

$PQ = 6.4952$ cm

$AP = 3.7570$ cm



Man finder da den mindste fold til at være 6.4952 cm med fire decimaler, og det er ikke nemt at se hvad dette tal skulle betyde. Tilsvarende kan man se at man skal folde papiret i afstanden ca. 3.75 cm. Denne afstand er dog meget dårligt bestemt, da den varierer kraftigere end foldens længde.

ISBN 978-87-7066-8699

Meget mere kan man ikke gøre med en dynamisk geometrik model. Hvis man har stor erfaring med geometrisk modellering kan man finde på at sammenligne såvel forhold som kvadratet på forhold:

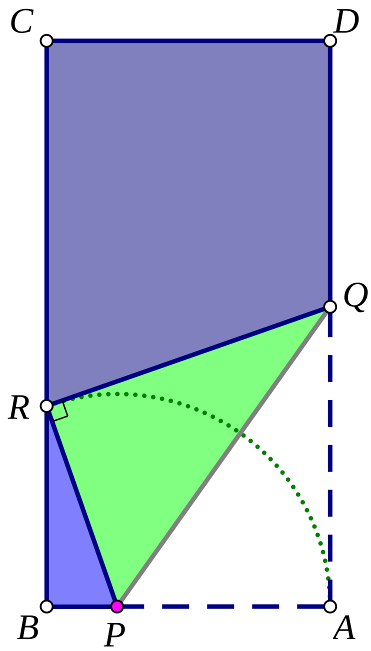
$$\frac{PQ^2}{BA^2} = 1.6875$$

$$\frac{AP}{BA} = 0.7514$$

$BA = 5.0000$ cm

$PQ = 6.4952$ cm

$AP = 3.7570$ cm



Det kunne godt tyde på at foldens kvadrat var 1.6875 gange kvadratet på sidebredden, ligesom det punkt vi folder fra kunne ligger ¾ hen af grundlinjen. Men det er svært at se om det er præcise mål eller bare vilde gæt. Det er dog en smule bemærkelsesværdigt at 1.6875 netop er 27/16, altså $3\cdot(3/4)^2$. Men de færreste har så meget talsans at de vil kunne se at der er noget at forfølge.

Trin 2 – variabelsammenhængen som en graf (B-niveau): I første trin fandt vi en konkret løsning på problemet. Andet trin er et mellemtrin, hvor vi identificerer væsentlige variable og undersøger variabelsammenhængen. Den ene variabel er oplagt foldens længde. Det er den *afhængige variabel*, som vi undersøger i modellen, dvs.

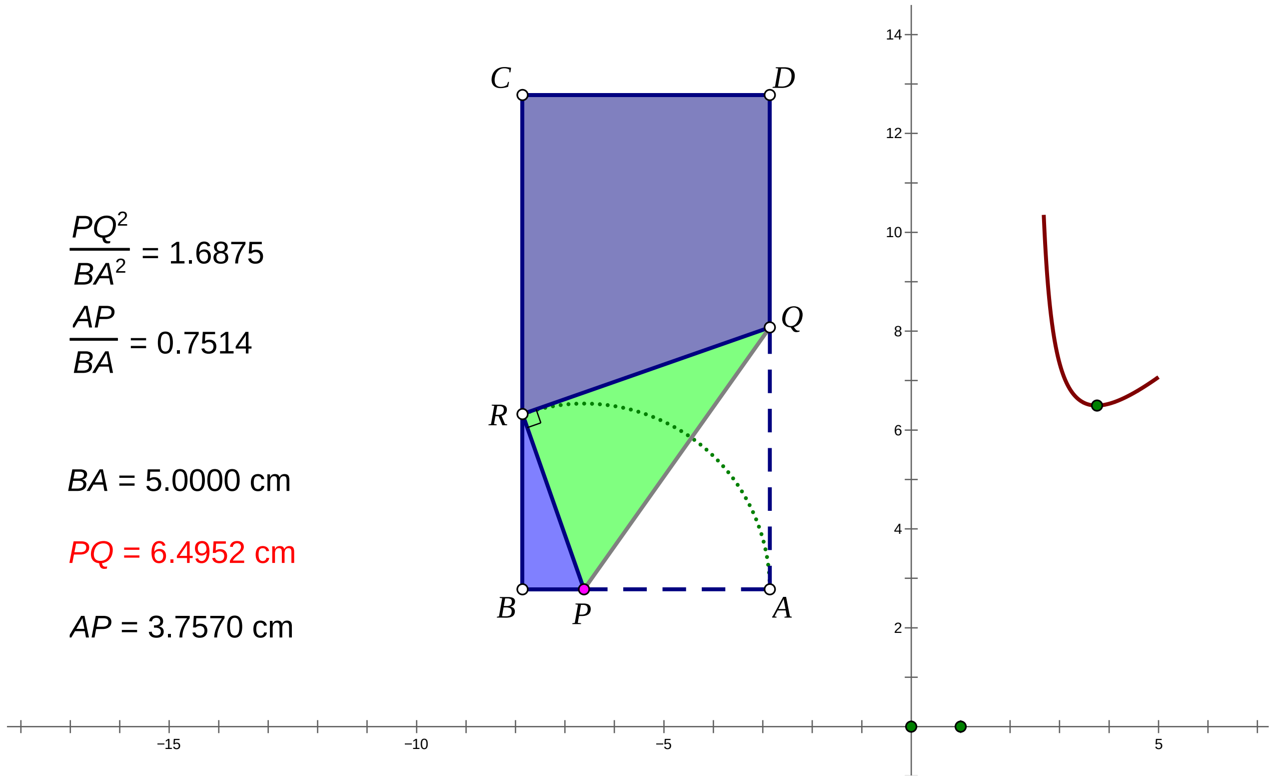
$$y = PQ$$

Derimod er det ikke så oplagt hvad vi skal vælge som den uafhængige variabel. Vi vil prøve at følge flere forskellige spor. Men først og fremmest er det vigtigt at gøre sig klart at valget af uafhængig variabel i høj grad afhænger af hvordan vi forestiller os modellen opbygget! Her har vi ladet *P* være det drivende punkt, så det er naturligt at lade P definere den uafhængige variabel. Dermed bliver det naturligt at lade P's placering på grundlinjen være afgørende, dvs. vi bruger afstanden til hjørnepunktet som uafhængig variabel og sætter derfor

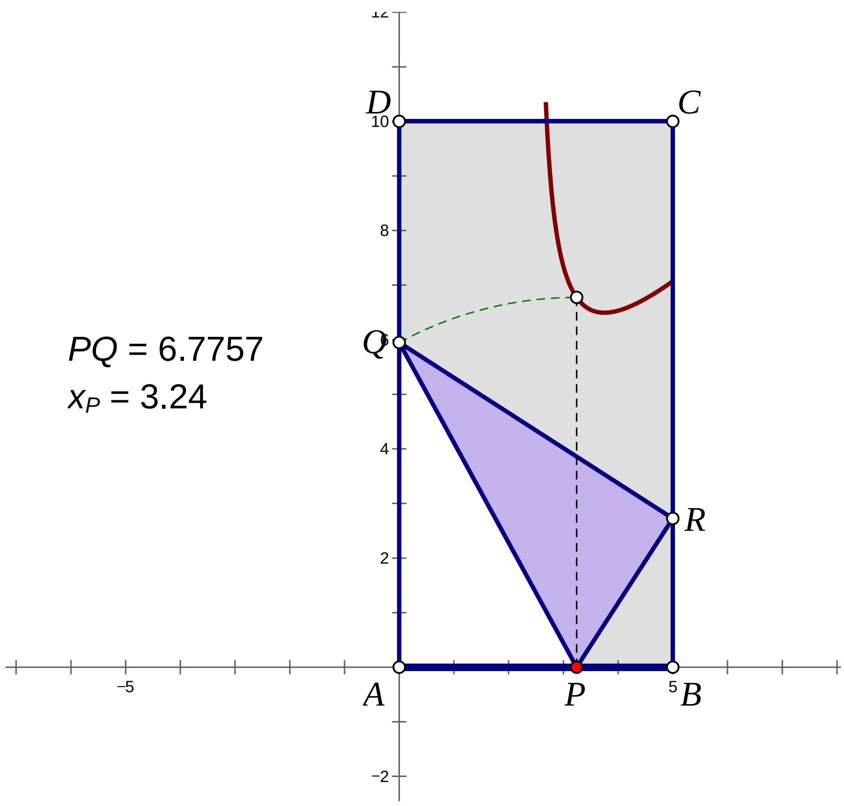
$$x = AP$$

Om det er et godt valg vil først vise sig senere! Men da vi har målt både AP og PQ , dvs. *x* og *y* kan vi overføre dem til et grafpunkt i koordinatsystemet. Man kan starte med at spore grafpunktet (x,y) for at danne sig et indtryk af grafens form. Men det er mere effektivt at konstruere grafen som et geometrisk sted – hvad den jo vitterligt også er, selv om vi ikke altid tænker på grafen for en funktion som en geometrisk kurve. Under alle omstændigheder viser grafen tydeligt de forventede opførsel, med et klart minimum. Det er netop det minimum vi ønsker at fastlægge mere præcist.

ISBN 978-87-7066-8699



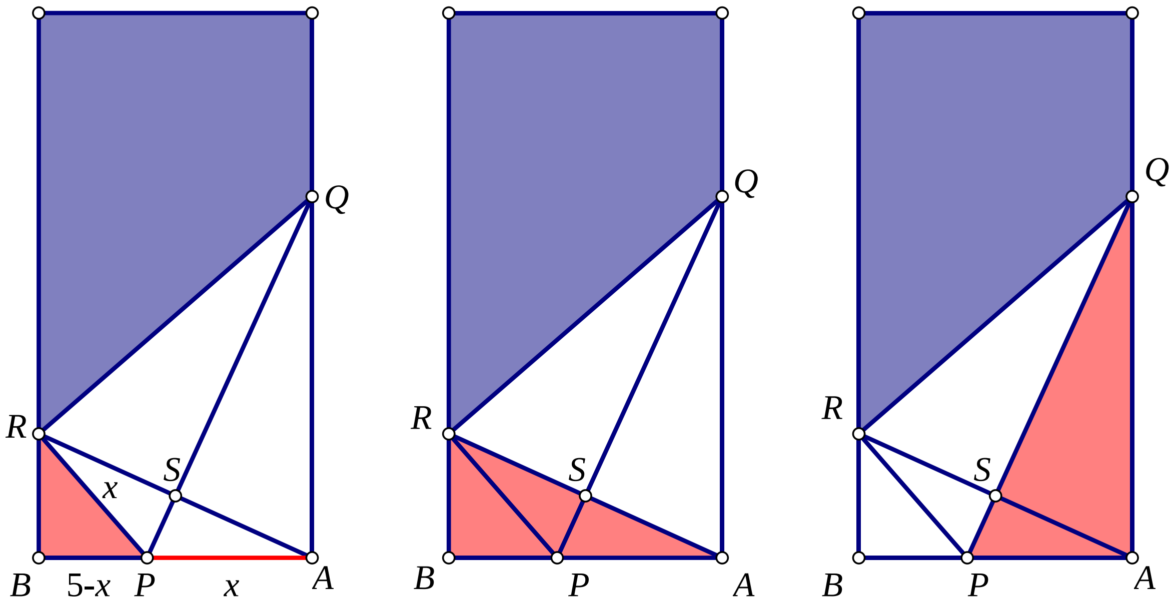
Nogle vil foretrække at binde koordinatsystemet til selve konstruktionen. Så skal figuren spejlvendes, så man kan bruge grundlinjen som x-aksen. Nogle vil endda foretrække at tage udgangspunkt i koordinatsystemet, så konstruktionen i langt højere grad gennemføres indenfor rammerne af analytisk geometri:



Her foreslår vi, at man adskiller repræsentationsformerne, og arbejde rent geometrisk indenfor den geometriske model og rent analytisk indenfor koordinatsystemet, så man ser hvordan de to forskellige repræsentationer belyser problemet fra forskellige synsvinkler.

ISBN 978-87-7066-8699

Trin 3 – variabelsammenhængen som en ligning (A-niveau): Så kommer vi ikke udenom at finde funktionens forskrift, dvs. ligningen, der binder x og y sammen. Det er ikke trivielt og slet ikke i denne model, hvor vi reelt skal sammenholde oplysningerne om tre forskellige retvinklede trekanter:



Undervejs er der brug for flere gode ideer! I den første trekant genfinder vi hypotenusen *x*, fordi *R* og *A* må ligge lige langt fra foldningspunktet *P*. Grundlinjen må ydermere være 5 –x (eller *b* – x, hvis eleverne kan tage springet til ren bogstavregning, ellers kan man substituere senere). Men kender vi to af siderne i en retvinklet trekant kender vi selvfølgelig også den sidste side!

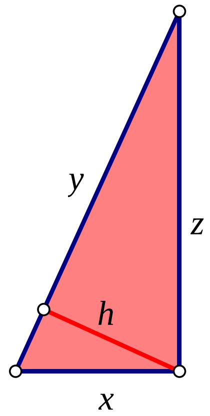
$$BR^2 = x^2 - (5-x)^2 = 10x - 25 \text{ dvs. } BR = \sqrt{10x-25}$$

Men så kan vi jo nemt komme videre til den anden trekant, hvor vi nu kender de to kateter:

$$AR^2 = BR^2 + BA^2 = 10x - 25 + 25 = 10x \quad \text{dvs.} \quad AR = \sqrt{10x}$$

Læg mærke til at vi kan kontrollere udregningerne i den dynamiske geometriske model ved at udregne værdien af de fundne udtryk og sammenholde dem med målinger. Der er kontant afregning, hvis man har regnet galt.

Men kigger vi så på den sidste trekant må *S* på grund af foldningen være midtpunktet, og PQ må være midtnormalen til AR, dvs. AS er netop halvt så stor AR og spiller rollen som højden i den sidste retvinklede trekant. I den sidste retvinklede trekant kender vi altså igen 2 stykker, nemlig grundlinjen *AP* (som er *x*) og højden *AS* (som er $\frac{\sqrt{10x}}{2}$). Men så må vi kunne finde den søgte hypotenuse *PQ*, dvs. *y*. Det er her problemet skifter fra at være multistrukturelt til at være relationelt!



Vi er nemlig nødt til at bruge to sammenhænge for at komme igennem: På den ene side Pythagoras på den anden side arealformlen udregnet på to måder:

$$y^2 = x^2 + z^2$$
$$y \cdot h = x \cdot z$$

Man kan få god hjælp af sit CAS-værktøj, men under alle omstændigheder skal man finde *y* udtrykt ved *x* og *h*.

$$y^2 = \frac{x^4}{x^2 - h^2} = \frac{x^4}{x^2 - \frac{5}{2} \cdot x} = \frac{2x^3}{2x - 5}$$

Når støvet har lagt sig er forskriften altså givet ved

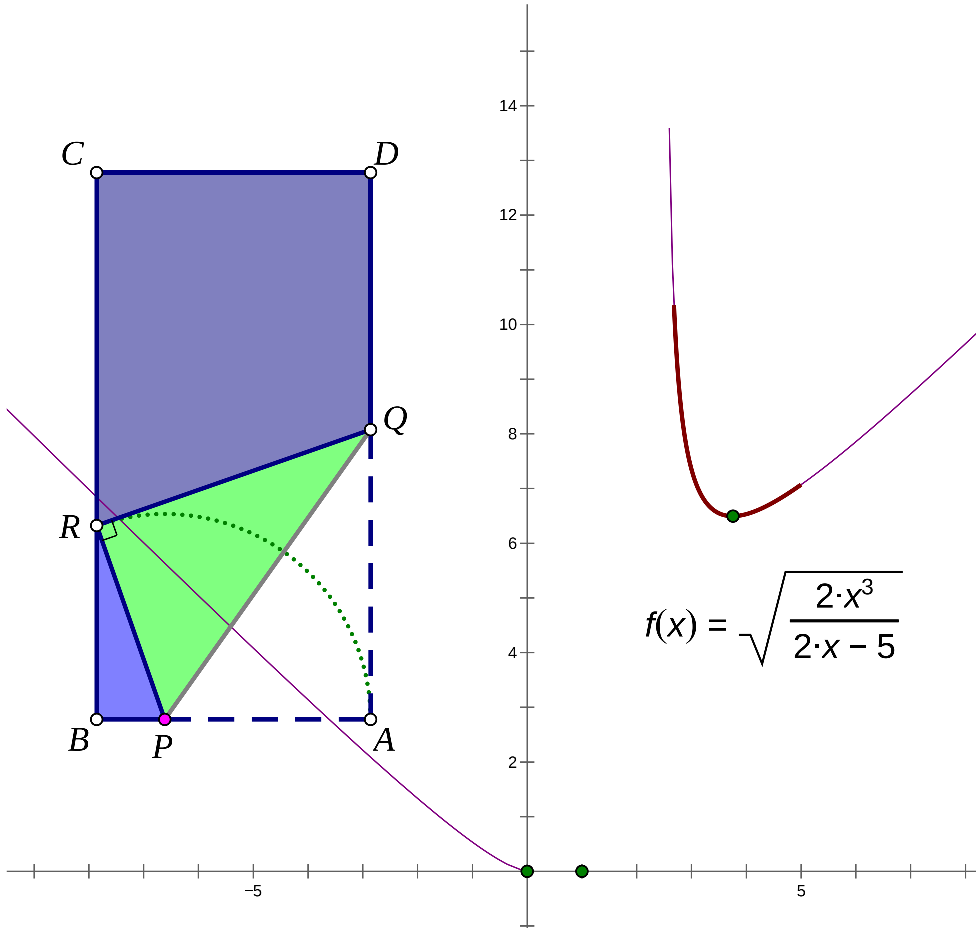
$$y = \sqrt{\frac{2x^3}{2x - 5}}$$

Bemærkning: Når man arbejder med problemet i et CAS-værktøj vil eleverne løbe ind i mange komplikationer! Det skyldes primært at vi arbejder indenfor *måltallene*, dvs. $\mathbf{R}_+$. Men CAS-værktøjet arbejder indenfor de reelle tal **R** - og endda delvist indenfor de komplekse tal **C**, så længe resultaterne bare holder sig til de reelle tal. Derved forsvinder nogle af de regneregler vi er vant til med kvadratrødder: Specielt gælder der ikke længere reglerne

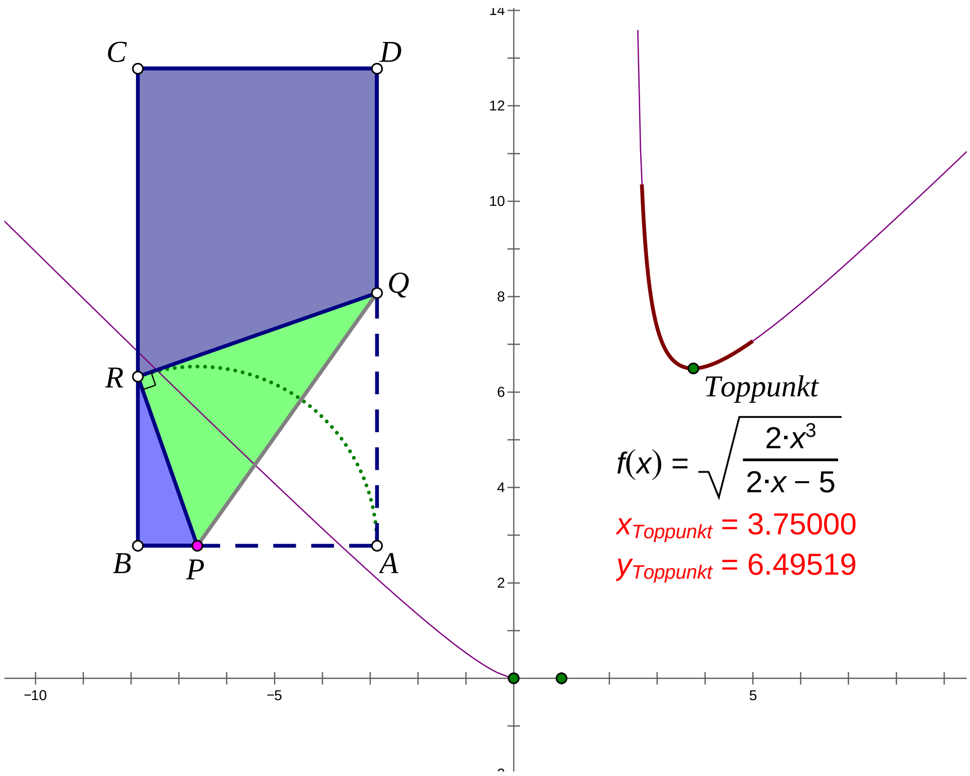
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Man kan styre uden om nogle af problemerne ved at pålægge antagelser om at diverse størrelser skal være positive. Og man kan styre uden om alle problemerne ved at kvadrere variablene. Men det er noget man skal være meget opmærksom på, når man arbejder med CAS-reduktioner. På A-niveau bør man vide noget mere om dette.

Igen kan vi kontrollere det direkte ved at lægge grafen for funktionen oveni den geometriske modelgraf:



Man kan se hvordan funktionsgrafen er en udvidelse af den geometriske modelgraf. Men ellers er alt gået glat. Vi kan nu bruge de indbyggede grafiske værktøjer til at finde en mere præcis værdi for toppunktet:



ISBN 978-87-7066-8699

Trin 4 – symbolsk løsning af problemet (B- og A-niveau): Med CAS-værktøjer til rådighed er det nu nærmest rutine at finde toppunktet symbolsk:

$$f(x) := \sqrt{\frac{2\cdot x^3}{2\cdot x-5}} \blacktriangleright \mathit{Done}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \frac{\sqrt{2}\cdot x^2\cdot(4\cdot x-15)}{2\cdot(2\cdot x-5)^2\cdot\sqrt{\frac{x^3}{2\cdot x-5}}}$$

Udtrykket ser lidt grimt ud, men tælleren viser klart at x = 15/4 er den eksakte værdi for minimumsstedet. En solve-kommando bekræfter dette:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f(x))=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{15}{4}$$

$$f(x)|x=\frac{15}{4} \blacktriangleright \frac{15\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{15\cdot\sqrt{3}}{4} \blacktriangleright 6.49519$$

Ydermere ses det at den mindste fold har længden $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Differentialkvotienten afslører også hvor den pæne løsning kommer fra, idet tælleren jo indeholdt faktoren (4x–15). Denne information ville være gået tabt, hvis vi var sprunget direkte til en solve(f’(x)=0,x)!

Trin 5 – **analyse af den symbolske løsning (A+-niveau)**: Når der som her er en pæn løsning til problemet. Vi skal folde præcis ¾ henne af grundlinjen for at finde den mindste fold, ville det være rart at kaste lys over, hvorfor det er så simpelt? Det kan man næppe sige at den ovenstående symbolske løsning gør! Det er da en kunst at nedbryde det komplicerede funktionsudtryk og vise at problemet i virkeligheden handler om et tredjegradspolynomium af *Arkimedestypen* $y = a\cdot x^2\cdot(k-x)$, hvor Arkimedes jo netop viste at det toppede i 2/3·k (ligesom andengradspolynomiet $y = a\cdot x\cdot(k-x)$ topper i 1/2·k). Det er de to simpleste og ældst kendte toppunktsformler: *Tredjegradspolynomiet topper to tredje dele henne af definitionsintervallet, hvor anden gradspolynomiet topper halvvejs*.

Man skal da kunne argumentere med monotoniforhold!

Vi søger et minimum for $y = \sqrt{\frac{2x^3}{2x-5}}$.

Men her kan vi roligt kvadrere og i stedet søge et minimum for $y^2 = \frac{2x^3}{2x-5}$, da kvadratfunktionen for de positive tal er voksende. Her er brøklen lidt snasket i nævneren, så vi vender brøken og søger i stedet et maksimum for $\frac{1}{y^2} = \frac{2x-5}{2x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x^3}$, da reciprokfunktionen for de positive tal er aftagende.

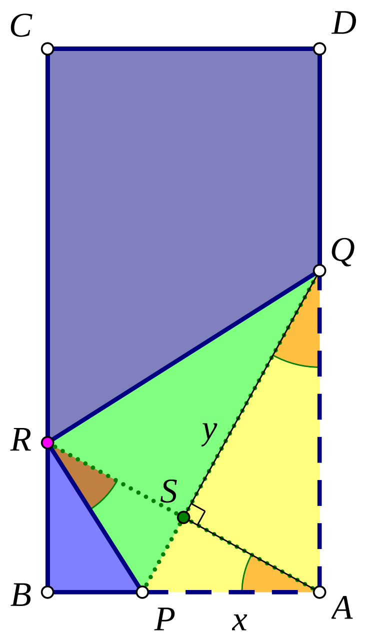
Så er vi næsten hjemme: Indfører vi variablene $Y = \frac{1}{y^2}$ og $X = \frac{1}{x}$ er det det samme som at finde et maksimum for variabelsammenhængen: $Y = X^2 - \frac{5}{2} \cdot X^3 = \frac{5}{2} X^2 \cdot (\frac{2}{5} - x)$

Men den er jo netop af Arkimedestypen, dvs. den topper to tredjedele henne eller i $X = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ og da vores uafhængige variabel x er den reciprokke værdi fås netop $x = \frac{15}{4}$.

Man behøver altså ikke kunne differentiere hverken kvadratrødder eller brøker for at kunne finde toppunktet i hånden. Og samtidigt ser man nu klart, hvorfor der må være en pæn løsning til problemet. Men det kræver altså symbolsk overskud at kunne trævle et sådant funktionsudtryk op.

Afsluttende bemærkning:

Vi har valgt at arbejde med algebraiske funktioner i denne løsningsmodel. Men man kunne lige så godt forsøge sig med en *trigonometrisk løsning*. Man ville da også kunne komme hurtigere frem til tredjegradspolynomiet. Nøglen ligger i valget af den uafhængige variabel. Her vil man i stedet kunne vælge en vinkel, fx den vinkel *A*, der peger over mod det punkt *R*, der foldes til:



På grund af de retvinklede trekanter dukker vinklen A op flere steder på figuren. Specielt gælder der den interessante sammenhæng:

$$\sin(Q) = \sin(A) = \frac{x}{y} \quad \text{dvs.} \quad y = \frac{x}{\sin(A)}$$

Vi skal altså blot udtrykke *x* ved hjælp af *A*! Det kræver selvfølgelig inddragelse af de andre retvinklede trekanter ligesom før. Først kan vi bemærke, at der må gælde

$$\cos(A) = \frac{AS}{x} \quad \text{dvs.} \quad AS = x \cdot \cos(A) \quad \text{og dermed} \quad AR = 2 \cdot AS = 2x \cdot \cos(A)$$

ISBN 978-87-7066-8699

Så kan vi bemærke at der må gælde

$$Tan(A) = \frac{BR}{BA} = \frac{BR}{5} \quad \text{dvs.} \quad BR = 5 \cdot \tan(A)$$

Men i trekanten AB kender vi nu både udtryk for kateterne og hypotenusen, så vi kan anvende pythagoras til at binde dem sammen:

$$AR^2 = BR^2 + BA^2 \rightarrow 4x^2 \cdot \cos(A)^2 = 25 \cdot \tan(A)^2 + 25 \quad \text{dvs.}$$

$$x^2 = \frac{25}{4} \cdot \frac{\tan(A)^2 + 1}{\cos(A)^2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{\frac{\sin(A)^2}{\cos(A)^2} + 1}{\cos(A)^2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{\sin(A)^2 + \cos(A)^2}{\cos(A)^4} = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{\cos(A)^2}$$

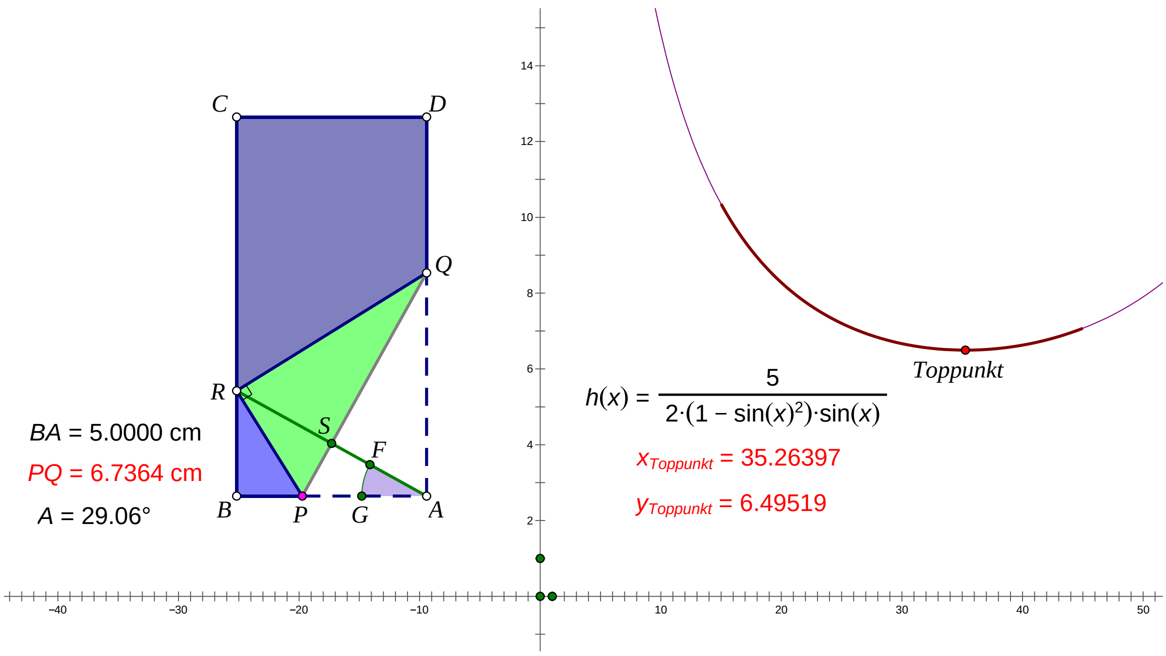
Igen vil de få stor glæde af deres CAS-værktøj, men når støvet har lagt sig ender de med det simple udtryk:

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\cos(A)^2}$$

Vi kan samle det hele i udtrykket:

$$y = \frac{5}{2\cos(A)^2 \cdot \sin(A)^2} = \frac{5}{2 \cdot (1 - \sin(A)^2) \cdot \sin(A)}$$

Graferne fører selvfølgelig til det samme resultat som før:



Vinklen er ikke så pæn! Men det er temmelig oplagt at den reciprokke fold er et tredjegradspolynomium i sin(A). Desværre dog ikke af Arkimedes typen!

Samtidigt peger dette valg af variabel på en anden overraskende kendsgerning: Vi kan lave ækvivalente repræsentationer af problemstillingen ved hjælp af enten algebraiske funktioner eller trigonometriske funktioner. På trods af at de som udgangspunkt synes at komme fra to helt forskellige verdener afspejler de altså dybest set de samme sammenhænge. Der er altså en dyb forbindelse mellem algebra og trigonometri – en pointe man kunne vælge at gøre noget ud af.