ISBN 9788770668699

Projekt 4.1 Prosthaphaeresis: Logaritmiske beregninger med sin og cos før logaritmerne blev opfundet

Før lommeregnere og computere brugte mange videnskabsmænd megen tid på beregninger, som vi i dag opfatter som forholdsvis simple, og som vi kan klare med et tryk på en knap! Svaret på deres anstrengelser og ret uproduktive arbejde var ét bestemt: Tabeller. Tabeller, der kan hjælpe med alskens mellemregninger.

På hjemmesiden: http://locomat.loria.fr/ findes en meget omfattende samling af matematiske og astronomiske tabelværker fra oldtiden og frem. Det giver et indtryk af, hvor mange kræfter, der blev ofret på dette, og dermed også hvor betydningsfuldt det var at have pålidelige tabeller. Foruden alle kildeteksterne er der på hjemmesiden en række forskningsartikler om disse tabeller til fri download.

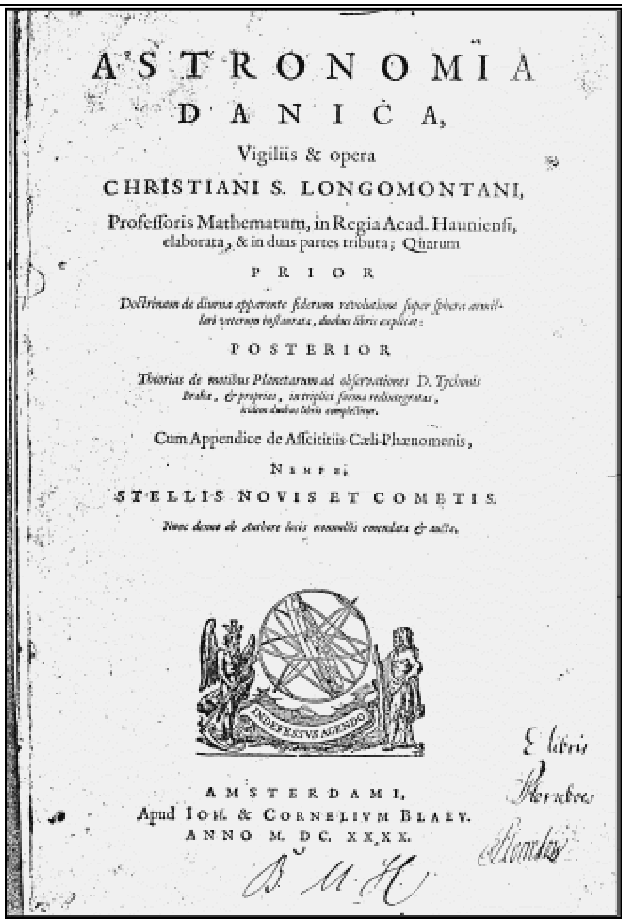
Sinustabeller blev naturligvis brugt til trigonometriske beregninger. Men sinustabeller kan også bruges til at udregne simple gangestykker. Da logaritmetabellerne blev konstrueret udarbejdede man også hurtigt derefter tabeller over $\log(\sin(x))$. Det gjorde det hurtigere at gennemføre beregninger, når man direkte kunne slå $\log(\sin(x))$ op for forskellige værdier af x.

Men før logaritmernes indtog i matematikken, så havde man udviklet andre metoder, først og fremmest den såkaldte ***Prosthaphaeresis-metode***. I slutningen af 1500 tallet var det den dominerende metode til at udføre store regnestykker. Denne metode fandt udbredt anvendelse hos Tycho Brahe og hans medarbejdere

En af Tycho Brahes assistenter, Christian Sørensen har beskrevet Prosthaphaeresis-reglerne i det astronomiske hovedværk *Astronomia Danica* fra 1622. Christian Sørensen var bondesøn fra Lomborg ved Lemvig, og det var karakteristisk for Tycho Brahe, at han så efter talent og ikke efter slægt, når han knyttede folk til sig. Heri lå også kimen til den senere konflikt med adelen, ikke mindst da han også giftede sig med en ikke-adelig. Tycho Brahe forlod landet i 1599.

Longomontanus blev hjemme og udgav i 1622 et stort værk om astronomi, hvori han også sammenfattede sin viden om Prosthaphaeresis-metoden. Det ret almindeligt dengang, at man valgte latinske versioner af sit navn, og Christian Sørensen vælger det latinske navn, Longomontanus. Navnet er givetvis en latinisering af byens Lomborgs navn, fortolket som *langt bjerg.*

Han er kendt i videnskabshistorien under navnet Longomontanus (1562-1647), og blev i Danmark den førende astronom efter Tycho Brahe, han var leder af det nye observatorium på Rundetårn og han indførte faget Astronomi på Københavns Universitet og var fagets første professor.


ASTRONOMIA
DANICA,
Vigiliis & opera
CHRISTIANI S. LONGOMONTANI,
Professoris Mathematum, in Regia Acad. Hauniensi,
elaborata, & in duas partes tributa; Quarum
PRIOR
Doctrinam de diurna apparente siderum revolutione super sphæra armillari veterum instaurata, duobus libris explicat:
POSTERIOR
Theorias de motibus Planetarum ad observationes D. Tychonis Brahe, & proprias, in triplici forma redintegratas, iisdem duobus libris complectitur.
Cum Appendice de Asscititiis Cæli-Phænomenis,
Nempe,
STELLIS NOVIS ET COMETIS.
Nunc denuo ab Authore locis nonnullis emendata & aucta.
AMSTERDAMI,
Apud IOH. & CORNELIUM BLAEV.
ANNO M. DC. XXXX.

Titelbladet til Longomontanus´s "Astronomica Danica". En udgave fra 1640.

De formler, der anvendes, er dem vi i dag kalde *de logaritmiske formler* og *de antilogaritmiske formler*
.

Logaritmiske formler	*Antilogaritmiske formler*
$\sin(u)+\sin(v)=2\sin(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2})$	$\cos(u)\cdot\cos(v)=\frac{1}{2}(\cos(u+v)+\cos(u-v))$
$\sin(u)-\sin(v)=2\cos(\frac{u+v}{2})\sin(\frac{u-v}{2})$	$\sin(u)\cdot\cos(v)=\frac{1}{2}(\sin(u+v)+\sin(u-v))$
$\cos(u)+\cos(v)=2\cos(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2})$	$\sin(u)\cdot\sin(v)=\frac{1}{2}(\cos(u-v)-\cos(u+v))$
$\cos(u)-\cos(v)=2\sin(\frac{u+v}{2})\sin(\frac{u-v}{2})$	$\cos(u)\cdot\sin(v)=\frac{1}{2}(\sin(u+v)-\sin(u-v))$.

Disse formler bevises i et projekt iHvad er matematik? bind 2, kapitel 7

Vi vil i det følgende demonstrere metoden i alle detaljer ved at gennemgå et regnestykke. Og vi vil følge den metode, der blev anvendt af Longomontanus

I astronomi regner man vinkler i grader, minutter og sekunder, som er et levn fra 60-tals-systemet, men her ser vi på et eksempel, hvor vi anvender 10-tals-systemet.

Vi vil multiplicere tallene $a=79{,}65$ og $b=413{,}1$, dvs vi vil udregne
$a\cdot b=79{,}65\cdot 413{,}1$
De logaritmiske formler kan kun bruges på tal i intervallet $[-1;1]$, fordi sinus til en vinkel aldrig kan bliver mindre end -1 eller større en 1. Derfor må vi først omskrive vores tal ved hjælp af 10-potenser:

$$a=0{,}7965\cdot 10^2 \text{ og } b=0{,}4131\cdot 10^3 .$$

Regnestykker bliver således omskrevet til:
$a\cdot b=0{,}7965\cdot 10^2\cdot 0{,}4131\cdot 10^3$
$a\cdot b=0{,}7965\cdot 0{,}4131\cdot 10^5$
$a\cdot b=a_1\cdot b_1\cdot 10^5$,
hvor $a_1=0{,}7965$ og $b_1=0{,}4131$.

Sinus 0°-45°

°	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
0	0·0000	0·0017	0·0035	0·0052	0·0070	0·0087
1	0·0175	0·0192	0·0209	0·0227	0·0244	0·0262
2	0·0349	0·0366	0·0384	0·0401	0·0419	0·0436
3	0·0523	0·0541	0·0558	0·0576	0·0593	0·0610
4	0·0698	0·0715	0·0732	0·0750	0·0767	0·0785
5	0·0872	0·0889	0·0906	0·0924	0·0941	0·0958
					0·1115	0·1132
					0·1288	0·1305
					0·1461	0·1478
					0·1633	0·1650
					0·1805	0·1822
					0·1977	0·1994
					0·2147	0·2164
					0·2317	0·2334
					0·2487	0·2504
					0·2656	0·2672
					0·2823	0·2840
					0·2990	0·3007
					0·3156	0·3173
					0·3322	0·3338
20	0·3420	0·3437	0·3453	0·3469	0·3486	0·3502
21	0·3584	0·3600	0·3616	0·3633	0·3649	0·3665
22	0·3746	0·3762	0·3778	0·3795	0·3811	0·3827
23	0·3907	0·3923	0·3939	0·3955	0·3971	0·3987
24	~~0·4067~~	~~0·4083~~	~~0·4099~~	~~0·4115~~	0·4131	0·4147
25	0·4226	0·4242	0·4258	0·4274	0·4289	0·4305
26	0·4384	0·4399	0·4415	0·4431	0·4446	0·4462

Sinus 45°-90°

°	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	°
45	0·7071	0·7083	0·7096	0·7108	0·7120	0·7133	0·7145	0·7157	0·7169	0·7181	0·7193	44
46	0·7193	0·7206	0·7218	0·7230	0·7242	0·7254	0·7266	0·7278	0·7290	0·7302	0·7314	43
47	0·7314	0·7325	0·7337	0·7349	0·7361	0·7373	0·7385	0·7396	0·7408	0·7420	0·7431	42
48	0·7431	0·7443	0·7455	0·7466	0·7478	0·7490	0·7501	0·7513	0·7524	0·7536	0·7547	41
49	0·7547	0·7559	0·7570	0·7581	0·7593	0·7604	0·7615	0·7627	0·7638	0·7649	0·7660	**40**
50	0·7660	0·7672	0·7683	0·7694	0·7705	0·7716	0·7727	0·7738	0·7749	0·7760	0·7771	39
51	0·7771	0·7782	0·7793	0·7804	0·7815	0·7826	0·7837	0·7848	0·7859	0·7869	0·7880	38
52	~~0·7880~~	~~0·7891~~	~~0·7902~~	~~0·7912~~	~~0·7923~~	~~0·7934~~	~~0·7944~~	~~0·7955~~	0·7965	0·7976	0·7986	37
53	0·7986	0·7997	0·8007	0·8018	0·8028	0·8039	0·8049	0·8059	0·8070	0·8080	0·8090	36
54	0·8090	0·8100	0·8111	0·8121	0·8131	0·8141	0·8151	0·8161	0·8171	0·8181	0·8192	35

Vil vil nu anvende formlen
$\sin(u)\cdot\sin(v)=\frac{1}{2}(\cos(u-v)-\cos(u+v))$,
til at bestemme produktet $a_1\cdot b_1$.

Først opfattes a_1 og b_1 som sinusværdier, dvs. vi ønsker at finde vinkler A og B ud fra ligningerne:

$$a_1 = \sin(A) \qquad b_1 = \sin(B)$$

Vi kan finde A og B ved at gå omvendt ind i en sinus-tabel (se figur), som også var kendt på den tid, men den viste tabel er dog en moderne udgave. Prøv at følge aflæsningerne i tabellen.

Vi får da
$a_1 = \sin(A) = 0{,}7965$, hvilket betyder, at $A = 52{,}8°$
og
$b_1 = \sin(B) = 0{,}4131$, hvilket betyder, at $B = 24{,}4°$.

Herefter udregner man så:

$A - B$:

$$\begin{array}{r} 52{,}8 \\ -\ 24{,}4 \\ \hline 28{,}4 \end{array}$$

$A + B$:

$$\begin{array}{r} 52{,}8 \\ +24{,}4 \\ \hline 77{,}2 \end{array}$$

Formlerne fortæller os nu, at $\sin(u)\cdot\sin(v) = \frac{1}{2}\cdot\cos(u-v) - \frac{1}{2}\cdot\cos(u+v)$)

$$a_1 \cdot b_1 = \sin(A)\cdot\sin(B)$$
$$a_1 \cdot b_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\cos(A - B) - \tfrac{1}{2}\cdot\cos(A + B)$$
$$a_1 \cdot b_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\cos(28{,}4°) - \tfrac{1}{2}\cdot\cos(77{,}2°)$$
$$a_1 \cdot b_1 = \tfrac{1}{2}\cdot(0{,}8796 - 0{,}2215),$$

hvor cosinusserne er slået op i en cosinus-tabel.

Dermed har vi fået multiplikationen omdannet til en subtraktion:

$0{,}8796 - 0{,}2215$:

$$\begin{array}{r} 0{,}8796 \\ -0{,}2215 \\ \hline 0{,}6581 \end{array}$$

Og vi ganger dette resultat med $\frac{1}{2}$ efter en dengang almindelig metode, nemlig ved først at gange med en passende potens af 10, så vi undgår decimalerne, her 10^4, så vi får

$$0{,}6581\cdot 10^4 = 6581$$

og derefter gange med 5, som jo svarer til $0{,}5\cdot 10^1$:

$$\begin{array}{l} 5\cdot 6581 \\ \hline 32905 \end{array}$$

Endelig flyttes kommaet de 5 pladser ($10^4 \cdot 10^1 = 10^5$) tilbage igen, så vi får
$a_1 \cdot b_1 = 0{,}32905$,
og dermed får vi altså

$$a \cdot b = 0{,}32905\cdot 10^5$$
$$a \cdot b = 32905.$$

Beregningen involverer nu 2 subtraktioner, en addition, en simpel multiplikation samt fire tabelopslag! Det kan synes omstændelig for os, men på den tid var der en del tid at spare ved disse omskrivninger – især, hvis man tænker på, at astronomerne arbejde med mange decimalers nøjagtighed!

ISBN 9788770668699

Øvelse 1

a) Udregn med brug af samme metode som demonstreret ovenfor, dvs brug af tabeller:

a) $118{,}52 \cdot 92{,}768$ b) $5234{,}79 \cdot 40093{,}62$

b) Kontroller med dit værktøj

Øvelse 2

Division af fx 283 med 7,6 sker ved først at opfatte division som et gangestykke. Dvs:

$$\frac{283}{7.6} = 283 \cdot \frac{1}{7.6}$$

Dernæst skal man have adgang til en tabel over fx secant-funktionen, som er den reciprokke til cosinus:

$$\sec(v) = \frac{1}{\cos(v)}$$

Vi finder derfor den vinkel, *v,* der giver $\sec(v) = 7.6$.

Men så er $\frac{1}{\cos(v)} = 7.6$, dvs: $\cos(v) = \frac{1}{7.6}$.

Herefter fortsætter man som under multiplikation.
Gør regnestykket færdigt, og stil selv yderligere nogle divisionsstykker.