ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for alle logaritmereglerne

Sætning Logaritmeregnereglerne
Lad a og b være positive tal, og x et vilkårligt tal.
Der gælder, da

1) $\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$	1) $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$
2) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$	2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
3) $\log(a^x)=x\cdot\log(a)$	3) $\ln(a^x)=x\cdot\ln(a)$
4) $\log(\sqrt[x]{a})=\frac{1}{x}\cdot\log(a)$	4) $\ln(\sqrt[x]{a})=\frac{1}{x}\cdot\ln(a)$
5) $\log(10)=1$	5) $\ln(e)=1$

Bevis for logaritmeregel 1:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at

$$a=10^{\log(a)} \quad \text{og} \quad b=10^{\log(b)} .$$

Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log(a\cdot b)&=\log\left(10^{\log(a)}\cdot 10^{\log(b)}\right)\\ &=\log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) && \text{(potensregel)}\\ &=\log(a)+\log(b) && (\log \text{ og } 10^x \text{ ophæver hinanden})\end{aligned}$$

☑

Bevis for logaritmeregel 2:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at

$$a=10^{\log(a)} \quad \text{og} \quad b=10^{\log(b)} .$$

Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right)&=\log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right)\\ &=\log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right) && \text{(potensregel)}\\ &=\log(a)-\log(b) && (\log \text{ og } 10^x \text{ ophæver hinanden})\end{aligned}$$

☑

Alternativt bevis for logaritmeregel 2:
Læg mærke til, at:

$$\frac{a}{b}\cdot b=a$$

Tag logaritmen på begge sider:

$$\log\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=\log(a)$$

ISBN 9788770668699

Udnyt nu produktreglen fra 1) på venstre side:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)+\log(b)=\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

altså indholdet i formel 2.

Bevis for logaritmeregel 3:
Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.
Igen indsætter vi $a=10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log\left(a^x\right)&=\log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right)\\&=\log\left(10^{\log(a)\cdot x}\right)&&\text{(potensregel)}\\&=\log(a)\cdot x&&\text{(log og }10^x\text{ ophæver hinanden)}\\&=x\cdot\log(a)\end{aligned}$$

Bevis for logaritmeregel 4:
$\log(\sqrt[x]{a})=\frac{1}{x}\cdot\log(a)$
Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.
Igen indsætter vi $a=10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt[x]{a}\right)&=\log\left(a^{\frac{1}{x}}\right)&&\text{(potensregel)}\\&=\log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right)&&\text{(indsæt }a\text{)}\\&=\log\left(10^{\log(a)\cdot\frac{1}{x}}\right)&&\text{(potensregel)}\\&=\log(a)\cdot\frac{1}{x}&&\text{(log og }10^x\text{ ophæver hinanden)}\\&=\frac{1}{x}\cdot\log(a)\end{aligned}$$

Logaritmeregel 5:
Dette er faktisk en del af definitionen og kræver ikke som sådan et bevis. I definitionen indgår nemlig:

$$x=\log(10^x)$$

Sæt heri x = 1:

$$1=\log(10^1)=\log(10)$$

Det er klart at reglerne for ln går præcis på samme måde.