ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 4.13 Matematisk teori - Bevis for alle logaritmereglerne

Der er 4 logaritmeregler foruden den femte, der er en del af definitionen. I grupper på 4 opdeles de 4 formler så hver får en. Man forbereder sit eget bevis, og fremlægger nu beviserne for hinanden. Endelig vælges tilfældigt et af de andre tre bevise, man ikke har forberedt, hvorpå man præsenterer dem.

Sætning Logaritmeregnereglerne
Lad a og b være positive tal, og x et vilkårligt tal.
Der gælder, da

1) $\log(a\cdot b)=\log(a)+\log(b)$	1) $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$
2) $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$	2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
3) $\log(a^x)=x\cdot\log(a)$	3) $\ln(a^x)=x\cdot\ln(a)$
4) $\log(\sqrt[x]{a})=\frac{1}{x}\cdot\log(a)$	4) $\ln(\sqrt[x]{a})=\frac{1}{x}\cdot\ln(a)$
5) $\log(10)=1$	5) $\ln(e)=1$

Bevis for logaritmeregel 1:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at

$$a=10^{\log(a)} \text{ og } b=10^{\log(b)}.$$

Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log(a\cdot b)&=\log\left(10^{\log(a)}\cdot 10^{\log(b)}\right)\\&=\log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) && \text{(potensregel)}\\&=\log(a)+\log(b) && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)}\end{aligned}$$

☑

Bevis for logaritmeregel 2:
Ifølge punkt 1 i definitionen gælder der, at

$$a=10^{\log(a)} \text{ og } b=10^{\log(b)}.$$

Vi indsætter dette i udtrykket på venstre side og omskriver

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a}{b}\right)&=\log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right)\\&=\log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right) && \text{(potensregel)}\\&=\log(a)-\log(b) && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)}\end{aligned}$$

☑

Alternativt bevis for logaritmeregel 2:
Læg mærke til, at:

$$\frac{a}{b}\cdot b = a$$

Tag logaritmen på begge sider:

$$\log\left(\frac{a}{b}\cdot b\right) = \log(a)$$

Udnyt nu produktreglen fra 1) på venstre side:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) + \log(b) = \log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

altså indholdet i formel 2.

Bevis for logaritmeregel 3:
Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.
Igen indsætter vi $a = 10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}\log\left(a^x\right) &= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \\ &= \log\left(10^{\log(a)\cdot x}\right) && \text{(potensregel)} \\ &= \log(a)\cdot x && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)} \\ &= x\cdot\log(a)\end{aligned}$$

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis for logaritmeregel 4:

$\log(\sqrt[x]{a}) = \frac{1}{x} \cdot \log(a)$

Lad a være et positivt tal, og x et vilkårligt tal.

Igen indsætter vi $a = 10^{\log(a)}$ i udtrykket på venstre side og omskriver:

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt[x]{a}\right) &= \log\left(a^{\frac{1}{x}}\right) && \text{(potensregel)}\\
&= \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^{\frac{1}{x}}\right) && \text{(indsæt } a\text{)}\\
&= \log\left(10^{\log(a)\cdot\frac{1}{x}}\right) && \text{(potensregel)}\\
&= \log(a)\cdot\frac{1}{x} && \text{(log og } 10^x \text{ ophæver hinanden)}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\log(a)
\end{aligned}$$

☑

Logaritmeregel 5:

Dette er faktisk en del af definitionen og kræver ikke som sådan et bevis. I definitionen indgår nemlig:

$$x = \log(10^x)$$

Sæt heri x = 1:

$$1 = \log(10^1) = \log(10)$$

Det er klart at reglerne for ln går præcis på samme måde.