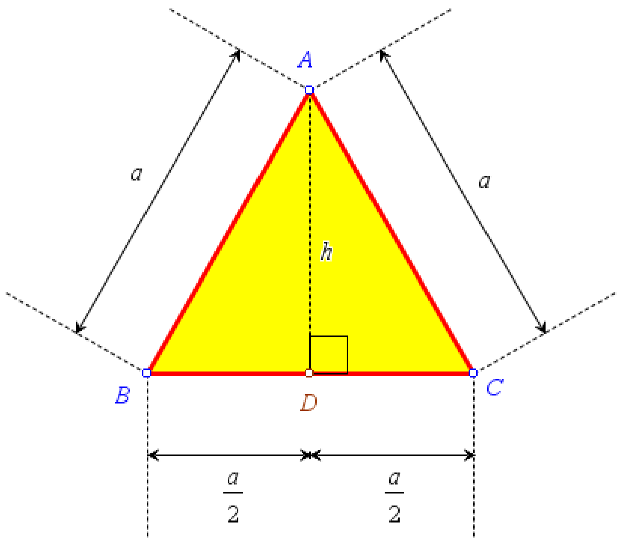
ISBN 9788770668699

Projekt 3.9 Herons formel - Modellering med fjerdegradspolynomier

Vi vil udlede en ny formel til beregning af arealet af en trekant. Som udgangspunkt kender vi formlen $T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, hvor *g* er længde af en grundlinje for trekanten og *h* længden for den tilhørende højde. Men typisk kender vi ikke højden, men i stedet de tre sider *a*, *b* og *c* i trekanten. Det er klart at der må findes en formel, som udtrykker arealet ved hjælp af de tre trekantsider, spørgsmålet er blot hvordan formlen ser ud. Det er også klart, at det er nemmest at opdage den færdige formel, hvis vi på forhånd har en idé om hvordan den ser ud. Man vil da typisk se på nogle simple specialtilfælde først, f.eks. arealet af en ligesidet trekant og en ligebenet trekant. I begge tilfælde kan vi finde et udtryk for højden ud fra Pythagoras sætning. Først **den ligesidede trekant**



Øvelse 1

a) Vis: $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

b) Vis arealformlen:

$$T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

c) Vis, at dette er ækvivalent med:

$16 \cdot T^2 = 3 \cdot a^4$

Det er selvfølgelig ikke så overraskende, at arealet er proportionalt med kvadratet på siden *a*, så det er proportionalitetskonstanten $\frac{\sqrt{3}}{4}$ der er den afgørende nyhed Afhængig af ens algebraiske formåen, vil man allerede med fordel have brugt CAS-værktøjet til en del mellemregninger selv i dette simple tilfælde.

Dernæst ser vi på **den ligebenede trekant**:

Øvelse 2

a) Vis: $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$

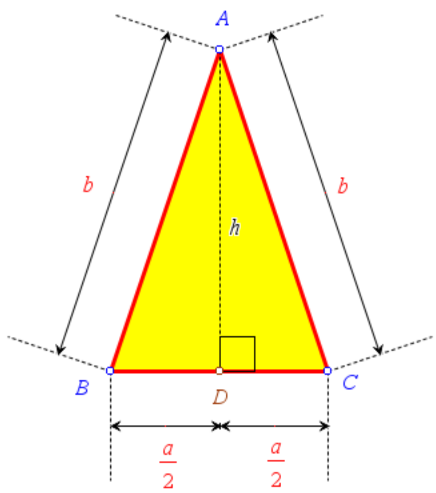
b) Vis arealformlen

$$T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2} \cdot a}{4}$$

c) Vis, at dette er ækvivalent med:

$16 \cdot T^2 = (4b^2 - a^2) \cdot a^2 = 4 \cdot b^2 \cdot a^2 - a^4$

I begge specialtilfældene ser vi derfor at $16T^2$ er et fjerdegradspolynomium med heltallige koefficienter i siderne.

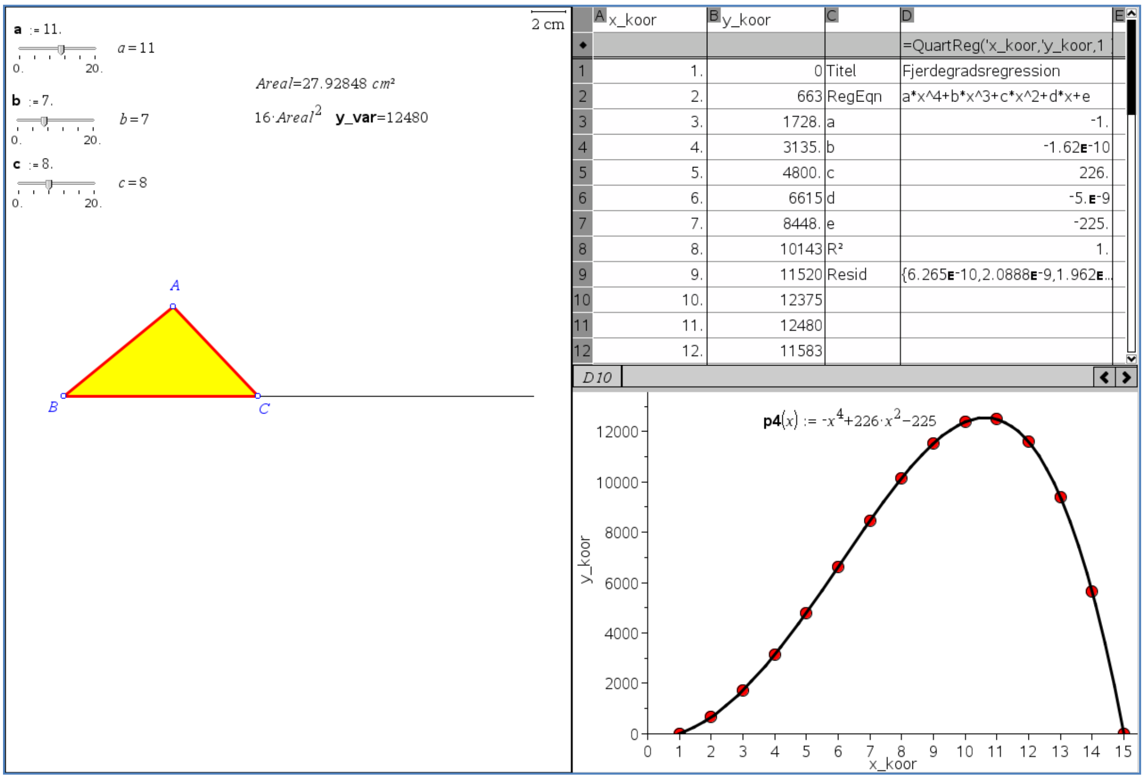


Vi kan derfor opstille den følgende hypotese:

Hypotese:
For en vilkårlig trekant med sidelængderne *a*, *b* og *c* gælder der om arealet, *T*, at $16T^2$ er et fjerdegradspolynomium i *a*, *b* og *c* med heltallige koefficienter.

Vi vil først eksperimentere os frem til denne sammenhæng.
Vi konstruerer en trekant med *heltallige* sider *a*, *b* og *c*, hvor vi kan variere sidelængderne systematisk, f.eks. ved hjælp af skydere. Det er et oplagt eksempel på brug af *variabelkontrol* i matematik.
I nedenstående tilfælde varieres kun parameteren *a*, koefficienterne i modellen afhænger derfor kun af *b* og *c*.

ISBN 9788770668699



Det er da ikke så svært igen dels at finde fjerdegradspolynomiet i konkrete tilfælde, dels at udnytte symmetrien til at gætte rødderne $-b-c, b+c, c-b, b-c$ henholdsvis den generelle forskrift for fjerdegradspolynomiet:

$$p_4(x) = -x^4 + 2 \cdot (b^2 + c^2) \cdot x^2 - (b^2 - c^2)^2$$

hvor den uafhængige variabel *x* altså i dette tilfælde repræsenterer sidelængden *a*. Indsættes *a* i stedet for *x* og ganger vi parenteserne ud (udvider udtrykket), så vil vi netop finde den følgende symmetriske formel

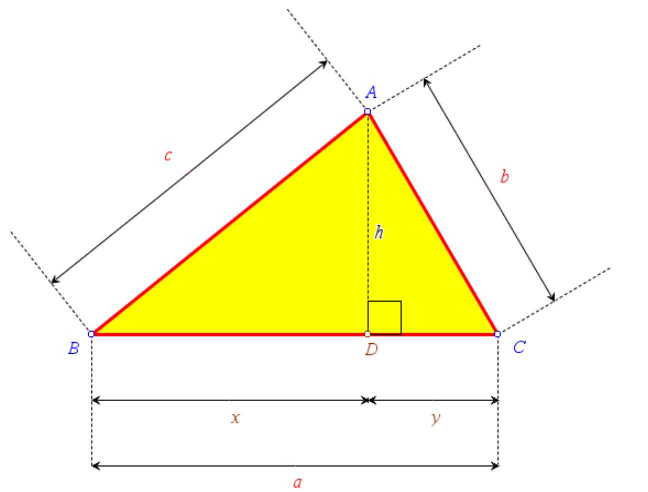
$$16 \cdot T^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2$$

Vi vil nu endelig gennemføre et **egentligt bevis**. Vi får da glæde af vores erfaring med de to specialtilfælde. Det er en almindelig teknik i matematik, at vi først erstatter et svært spørgsmål med et tilsvarende, men lettere fofr at få ideer til gangen i et bevis.

Vi fører beviset for en vilkårlig trekant. Det er ikke nogen indskrænkning at antage at *A* er den største vinkel i trekanten (der som bekendt ligger overfor den længste side). Derved sikrer vi os at højden fra *A* falder indenfor trekanten (argumenter for, at dette altid kan lade sig gøre!).
Denne gang er situationen mere kompleks, fordi højden fra *A* deler grundlinjen *a* i to ulige store stykker *x* og *y*. Vi får derfor brug for to gange Pythagoras suppleret med ligningen for opdelingen af grundlinjen i to stykker:

$$c^2 = x^2 + h^2$$
$$b^2 = y^2 + h^2$$
$$a = x + y$$

Disse tre ligninger har de tre ubekendte *x*, *y* og *h*, så vi må kunne løse dem med hensyn til siderne *a*, *b* og *c*.



ISBN 9788770668699

Øvelse 3

Anvend et værktøjsprogram til at løse ligningssystemet, og vis:

$x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$ $\qquad$ $y = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

$$h = \frac{\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot b^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}}{2a} = \frac{\sqrt{2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2a}$$

Øvelse 4

Anvend resultatet i øvelse 3 til at vise følgende formel for trekantens areal:

$$T = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{\sqrt{2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{4}$$

Øvelse 5

1) Vis nu endelig, at $16T^2$ er et fjerdegradspolynomium i *a*, *b* og *c* med heltallige koefficienter:
$16 \cdot T^2 = 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2 - a^4 - b^4 - c^4$

2) Anvend et værktøjsprogram til at faktorisere dette udtryk:
$16 \cdot T^2 = (a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c)$

Herfra er der ikke langt til den mere traditionelle udformning af Herons formel:

Øvelse 6

Vis Herons formel:

$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, hvor $s = \frac{a+b+c}{2}$ er den halve omkreds.