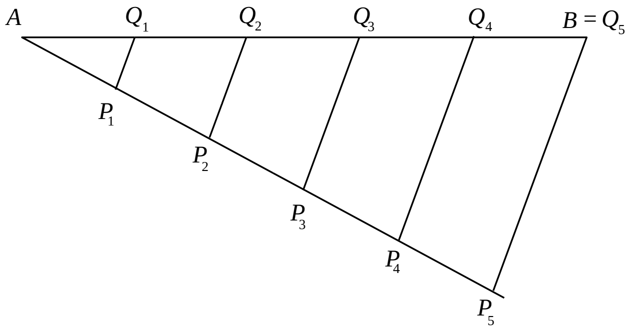
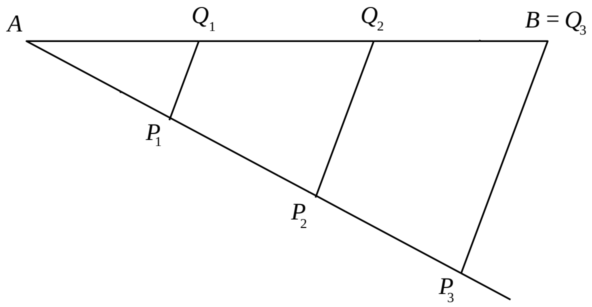
ISBN 9788770668699

Projekt 3.7 Vinklens tredeling

Det er let at tredele et linjestykke. Eller for den sags skyld dele det op i *n* lige store dele, hvor $n \in \mathbb{N}$: Afsæt en vilkårlig vinkel, hvor linjen *l* = *AB* ligger ud af det ene ben. Afsæt *n* lige lange stykker ned af det andet ben, så vi her får punkterne P_1, P_2, P_3, ... , P_n. Forbind nu det sidste P_n med *B* og tegn gennem P_1, P_2, P_3, ... , P_n linjer parallelle med P_nB. Dette kan gøres med brug af passer og lineal ved at afsætte vinklen ved P_n i de andre punkter. Deres skæringspunkter med linjen *l* kalder vi for Q_1, Q_2, Q_3, ... , Q_n, og disse punkter deler *AB* i *n* lige store dele:



Tilflædet *n* = 5



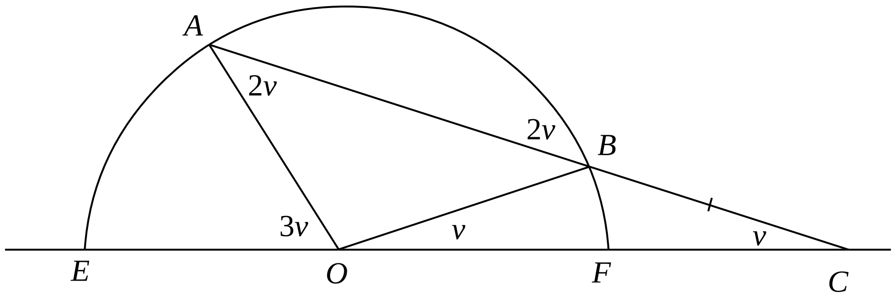
Tilfældet *n* = 3

Når dette er tilfældet, er det jo ikke en fjern tanke at rejse problemet om tredeling af en vinkel. Men det kunne mærkværdigvis ikke løses så let – ja det viste sig at være uløseligt. Men med flere hjælpemidler gik det fint.

Archimedes tredeling af vinklen

Archimedes lavede den nok enkleste konstruktion, hvor han brugte en »indskydningslineal«, dvs. en lineal med måleenheder. Han gjorde som følger:

I enhedscirklen afsættes den vinkel, vi vil tredele, i 2. kvadrant (se figuren). Vi kalder vinklen 3*v*, og ønsker altså at finde en vinkel af størrelse *v*.



Vi tager nu linealen, lægger den, så den rører punktet *A*, således at vi får afsat et stykke *BC*, der har længden 1. Det kan vi gøre ved at prøve os frem. Når *BC* er afsat, er trekanterne *OAB* og *OBC* begge ligebenede, og ved at se på vinkelsummen finder vi vinklerne som vist på tegningen og specielt:

$$\angle C = v,$$

altså netop en tredjedel af den, vi begyndte med.

<u>Øvelse</u>

Gennemfør beviset for at $\angle C = v$.

I deres jagt på en løsning fandt de græske matematikere frem til en række nye, komplicerede kurver, som *Kvadratricen*, *Konkoiden*, *Arkimedes' spiral* og andre, som man i dag studerer under vektorfunktioner. Men ingen af dem kunne konstrueres med passer og lineal.

Gennem århundrederne fortsattes forsøgene, og mange troede, de havde fundet en løsning, som de så sendte til matematikere og videnskabelige akademier i håb om berømmelse og belønning. Det gik så vidt, at det franske Videnskabernes Akademi i 1775 udsendte en erklæring om, at det fremover hverken ville bedømme vinkeltredelinger, cirkelkvadraturer eller evighedsmaskiner.

I deres begrundelse skrev de, at der gik rygter om, at regeringer havde udlovet store dusører til dem, som løste problemerne, og at det var blevet til en sand galskab hos mange, som opgav deres arbejde og blev ganske forstyrrede i hovederne og i øvrigt ikke ville tage imod fornuft og acceptere, at de løsninger, de kom med, var fejlagtige.

Men det stoppede ikke de glade amatører, og mange lavede utroligt komplicerede konstruktioner, som var tæt ved, men aldrig eksakt løste opgaven. Således bragtes i årene omkring 1930 i et af de store tyske matematiktidsskrifter nogle artikler på grundlag af en skrædders ihærdige arbejde med passer og lineal. Den første hed: »Die Winkeldreiteilung des Schneidermeister Kopf« og den næste: »Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeister Kopf«.

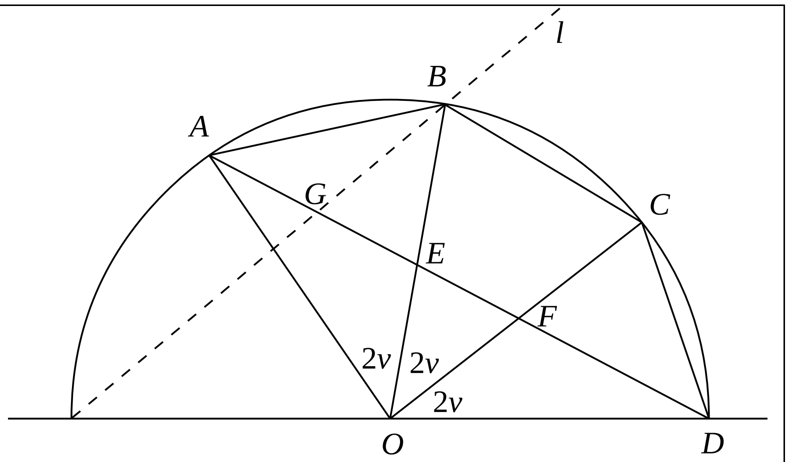
Oversættelse af tredeling til tredjegradsligning.

Mere frugtbar var udviklingen blandt de arabiske matematikere omkring år 1000. De fandt frem til, at vinkeltredelingen kunne »oversættes« til et spørgsmål, om en bestemt tredjegradsligning havde en løsning. Dette blev senere fulgt op af Descartes (1596 – 1650), der i sin præsentation af koordinatsystemet behandlede kurver af tredje, fjerde og højere grad, for at vise den nye analytiske geometris overlegenhed. Descartes' argument var - udtrykt i moderne matematisk sprog - nogenlunde som følger:

Lad os igen kalde den vinkel, vi vil tredele, for 3*v*, og begynde med at afsætte en vinkel på 6*v* i en enhedscirkel med centrum i *O*. De to punkter *A* og *D* forbindes, og vi antager nu, at vi kunne tredele vinklen på 6*v* for at analysere problemet nøjere. Tredeling af 6*v* ville give vinkler på 2*v* og punkterne *B* og *C*.

Trekanterne *OAB*, *OBC* og *OCD* er alle ligebenede og har alle topvinklen 2*v*, dvs. vinklerne ved grundlinjen er 90° – *v*, f.eks.

$$\angle A = \angle B = 90° - v$$



Øvelse

Argumenter nu for følgende:

1. $\angle OAD = \angle ODA = 90° - 3v$. (Vink: Trekant *OAD* er ligebenet).
2. I trekant *ABE* er $\angle EAB$ lig med 2*v*, og $\angle EBA = 90° - v$.
3. Trekanterne *ABE* og *OAB* er ligedannede.
4. Vis ved at udnytte punkt 3:

$$|BE| = \frac{|AB|^2}{|AO|} = |AB|^2$$

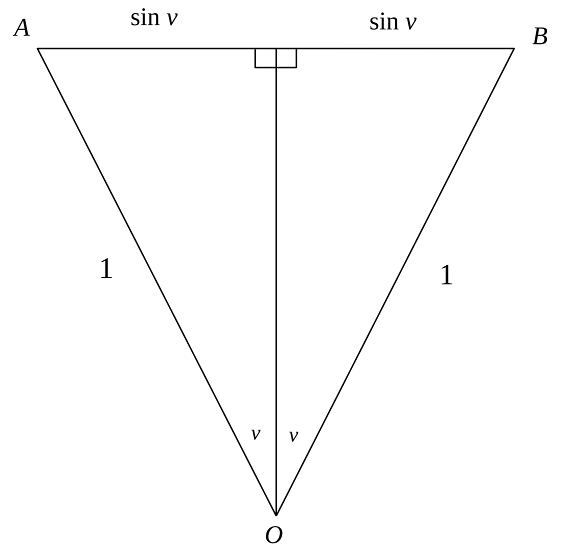
Vores mål er at kunne konstruere $sin(v)$ ud fra kendskab til $sin(3v)$, for så kan vi også på enhedscirklen konstruere *v* ud fra 3*v*.

Øvelse

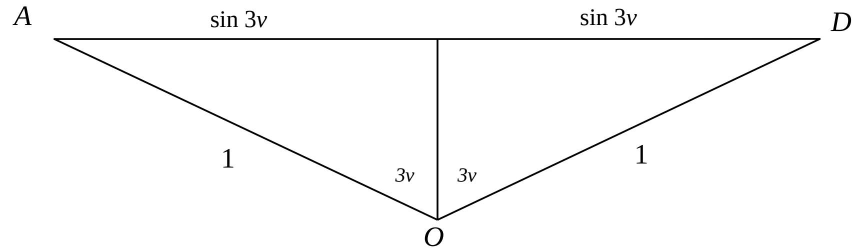
Argumenter for dette.

ISBN 9788770668699

Vi går nu efter at finde en sammenhæng $sin(v)$ og $sin(3v)$. For at løse den opgave vil vi udnytte, at trekant *OAB* er ligebenet, så $|AB| = 2 \cdot \sin(v)$:



samt udnytte, at trekant *OAD* er ligebenet, så $|AD| = 2 \cdot sin(3v)$:



Nu mangler vi blot at få *AD* udtrykt ved *AB*.

<u>Øvelse</u>

Se figuren med konstruktionen i enhedscirklen. Linjen *l* er parallel med *OC*, og skærer *AD* i *G*. Argumenter for, at:

1. $|BC| = |GF|$, og $|DF| = |DC| = |AB|$.
2. $|AD| = |DF| + |GF| - |GE|$
3. $|AD| = 3 \cdot |AB| - |GE|$
4. I trekant *BGE* er $\angle G = 90° - v$. (Vink: Udnyt, at *l* er parallel med *OC*, samt at vi har styr på vinklerne i trekant *OEF*).
5. $\angle E$ er også lig med $90° - v$, så trekant *BGE* er ligebenet og ligedannet med trekant *ABE*. Vis ud fra dette:

$$|GE| = \frac{|BE|^2}{|AB|}$$

6. Fra en øvelse ovenfor har vi $|BE| = |AB|^2$. Indsæt dette og vis:

$$|GE| = |AB|^3$$

7. Vis ud fra dette:

$$|AD| = 3 \cdot |AB| - |AB|^3$$

8. Udnyt endelig de to sinus-omskrivninger til at få følgende ligning:

$$sin(3v) = 3 \cdot sin(v) - 4 \cdot sin^3(v)$$

Gennem øvelsen har vi oversat *det geometriske spørgsmål* om tredeling af en vinkel til det algebraiske spørgsmål om løsning af en bestemt tredjegradsligning:

Givet tallet $sin(3v)$. Find det *x*, der opfylder:

$$-4x^3 + 3x = sin(3v)$$

Dette *x* er så $sin(v)$, og kan på enhedscirklen give os *v*.

<u>EKSEMPEL</u>
Tredeling af en vinkel på 30°. Vi ved, at $sin(30°)=\frac{1}{2}$. Altså findes $sin(10°)$ ud af ligningen:

$$-4x^3+3x=\frac{1}{2} \text{ eller } 8x^3-6x+1=0$$

Det medførte ikke, at man nu kunne løse problemet med passer og lineal. Men oversættelsen fra et geometrisk til et algebraisk problem skulle vise sig at være et afgørende redskab til at bevise umuligheden af at løse opgaven. Det undersøger vi nærmere på A-niveau.