ISBN 9788770668699

Projekt 3.5 Faktorisering af polynomier

Hvilke hele tal går op i tallet 60? Det kan vi få svar på ved at skrive 60 som et produkt af sine primtal:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Divisorerne i 60 er lige præcis de tal, der kan fås ved at kombinere disse primtal. Opskrivningen af 60 som et produkt af sine primtal kaldes en *fuldstændig faktorisering* af 60.

Øvelse1:

a) Angiv alle divisorer i 60.

b) Opskriv en fuldstændig faktorisering af tallene 70, 100, 110, 124, 130.

Primtallene er atomerne eller byggestenene inden for de hele tal. Blandt polynomier har vi faktisk noget, der ligner. I det foregående afsnit gangede vi polynomier sammen og fik et nyt polynomium som resultat. Faktorisering er det modsatte. Her har vi givet et polynomium og ønsker at skrive dette som et produkt af andre polynomier.

I eksemplet med den forstærkede kasse udregnede vi rumgangsfunktionen således:

$$\text{højde} \cdot \text{bredde} \cdot \text{længde} = \text{rumfang}$$

$$x \cdot (24 - 2x) \cdot (48 - 4x) = \text{rumfang}$$

$$8x \cdot (x - 12) \cdot (x - 12) = \text{rumfang}$$

hvor sidste linje blot er en reduktion, hvor vi har sat 2 udenfor den første parentes og 4 udenfor den sidste parentes, der gør det lettere at overskue udtrykket på venstre side. I eksemplet var vi interesseret i at få en forskrift for rumfangsfunktionen, vi gangede ud og fik:

$$V = 8x^3 - 192x^2 + 1152 \cdot x$$

Hvis vi fra start har givet polynomiet *V* og er i stand til at opskrive det således:

$$8x^3 - 192x^2 + 1152 \cdot x = 8x \cdot (x - 12) \cdot (x - 12)$$

så siger man, at vi har foretaget *en fuldstændig faktorisering af polynomiet V*.

Når vi faktoriserer hele tal, er byggestenene primtallene. Udtrykket for $V(x)$ antyder, at blandt polynomierne udgør førstegradspolynomierne $x - a$ i hvert fald nogle af byggestenene. Faktoriseringen af *V* antyder også, hvilke tal, der indgår, som tallet *a*.

Førstegradspolynomierne er her $x = x - 0$, $x - 12$, og $x - 12$. Og tallene 0 og 12 er rødderne i *V*. Tallet12 er en dobbeltrod, så der er ikke flere rødder i dette tredjegradspolynomium. Det er kun et eksempel, men det er en generel egenskab ved polynomier.

> **Sætning. Faktorisering af polynomier. Version 1.**
> Hvis et polynomium $p(x)$ af n'te grad har roden *t,* så kan $p(x)$ faktoriseres således:
> $$p(x) = (x - t) \cdot q(x),$$
> hvor $q(x)$ er et polynomium af grad $n - 1$, dvs. én lavere end $p(x)$.

Bevis

Vi vil først gennemføre beviset i tilfældet hvor $p(x)$ er et tredjegradspolynomium:

$$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Vi antager at tallet *t* er en rod i $p(x)$, dvs. $p(t) = 0$. I dette tilfælde siger sætningen, at der findes et andengradspolynomium $q(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$, så:

$$p(x) = (x - t) \cdot q(x)$$

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = (x - t) \cdot (a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1)$$

Da vi ikke ved, om det kan lade sig gøre indfører vi et restled *r* som hjælpevariabel og ser på ligningen:

$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=(x-t)\cdot(a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1)+r$$

Situationen er her følgende: Vi kender tallene *a*, *b*, *c*, *d* og *t*, og skal overbevise os om, at vi kan bestemme koefficienterne i andengradspolynomiet, så ligningen stemmer. Og vi skal dernæst overbevise os om, at *r* må være 0. Vi benytter blot reglen for, hvordan vi ganger polynomier sammen, og bestemmer skridt for skridt koefficienterne. Vi får:

$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=x\cdot(a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1)-t\cdot(a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c_1)+r$$
$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=(a_1\cdot x^3+b_1\cdot x^2+c_1\cdot x)-(a_1\cdot x^2\cdot t+b_1\cdot x\cdot t+c_1\cdot t)+r$$
$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=a_1\cdot x^3+(b_1-a_1\cdot t)\cdot x^2+(c_1-b_1\cdot t)\cdot x+(r-c_1\cdot t)$$

Sammenligner vi nu koefficienterne på hver side af lighedstegnet, så får vi:

$\underline{a_1=a}$	Koefficienterne til x^3 bliver hermed ens
$b_1-t\cdot a_1=b$	Koefficienterne til x^2 bliver hermed ens
$\underline{b_1=b+t\cdot a_1}$	Ligningen løses mht. b_1
$c_1-t\cdot b_1=c$	Koefficienterne til *x* bliver hermed ens
$\underline{c_1=c+t\cdot b_1}$	Ligningen løses mht. c_1
$r-t\cdot c_1=d$	Konstantleddene bliver ens
$\underline{r=d+t\cdot c_1}$	Ligningen løses mht. *r*

Hvis vi indsætter de understregede værdier som koefficienter i andengradspolynomiet stemmer ligningen!

Vi har nu bestemt et andengradspolynomium, så vi har følgende:

$$p(x)=(x-t)\cdot q(x)+r$$

Men tallet *t* er en rod i tredjegradspolynomiet. Indsættes *t* får vi:

$$p(t)=(t-t)\cdot q(t)+r$$
$$0=0\cdot q(t)+r$$
$$0=0+r$$
$$0=r$$

Hermed har vi bevist, at sætningen gælder for tredjegradspolynomier. Det er let at se, at metoden kan generaliseres til vilkårlige polynomier. Hermed er sætningen vist.

Øvelse 2:

a) Vis, at tallet $t=4$ er en rod i polynomiet $p(x)=3x^3-5x^2-41x+52$.

b) Bestem ved hjælp af ovenstående metode koefficienterne i andengradspolynomiet. Hvad bliver restleddet?

Øvelse 3:

a) Vis, at tallet *t* = 2 er en rod i polynomiet $p(x)=x^6-2x^5+4x^4-11x^3+14x^2-21x+10$ **.**

b) Bestem ved hjælp af ovenstående metode koefficienterne i femtegradspolynomiet $q(x)$, så $p(x)$ faktoriseres som beskrevet i sætningen.

Når vi har en rod t i $p(x)$, og når vi har faktoriseret:

$$p(x)=(x-t)\cdot q(x) \qquad (*)$$

så kan det jo være, at $q(x)$ også har en rod. Hvis det er tilfældet kan vi faktorisere $q(x)$ og indsætte i (*). Dette kunne vi fortsætte med, så længe vi kunne finde rødder og i nogle tilfælde ville vi ende med en fuldstændig faktorisering af typen:

$$p(x)=(x-t_1)\cdot(x-t_2)\cdot\ ...\ \cdot(x-t_n) \qquad (**)$$

Bemærk, at alle t'erne er rødder i $p(x)=(x-t)\cdot q(x)$.

Øvelse 4:

a) Opret grafen for tredjegradspolynomiet $p(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)$ med rødderne x_1, x_2 og x_3 ved hjælp af passende skydere for x_1, x_2 og x_3 samt a.

b) Hvad sker der med grafen for tredjegradspolynomiet, når du trækker i skyderne for rødderne?
Hvordan ser grafen fx ud, når to af rødderne falder sammen?

c) Kan du frembringe grafen for et vilkårligt tredjegradspolynomium på denne måde?

Øvelsen fortæller os, at sætningen om faktorisering af et førstegradsled ikke kan være hele historien om polynomiers faktorisering. Ikke alle tredjegradspolynomier har tre rødder, og i så fald kan de jo ikke skrives som (**), dvs. som produktet af tre førstegradsfaktorer. Et tredjegradspolynomium har imidlertid altid mindst én rod og kan dermed altid faktoriseres som angivet i sætningen.

Øvelse 5

Tegn grafen for tredjegradspolynomiet skrevet på formen $p(x)=(x-t)\cdot(a\cdot x^2+b\cdot x+c)$ ved hjælp af passende skydere for t, a, b, c.

a) Trækker i skyderne for de forskellige variable (husk variabelkontrol; dvs. varier én variabel af gangen), og undersøg om du kan frembringe grafen for et vilkårligt tredjegradspolynomium på denne måde?

b) Lad din sidekammerat tegne grafen for et bestemt tredjegradspolynomium med hele tal som koefficienter og med tallet t = -2 som rod i *dit* værktøjsprogram sammen med grafen for p. Kan du frembringe denne graf ved at flytte på a, b, c?

Øvelse 61:

Opret grafen for fjerdegradspolynomiet skrevet på formen $p(x)=(x^2+b\cdot x+c)\cdot(x^2+d\cdot x+\mathrm{e})$ ved hjælp af passende skydere for b, c, d, e.

a) Træk i skyderne for de forskellige variable (husk variabelkontrol, dvs. varier én variabel af gangen), og vurdér, om grafen for et vilkårligt fjerdegradspolynomium kan frembringes på denne måde?

Øvelse 7:

a) Undersøg, hvordan man faktoriserer tal og polynomier på dit værktøjsprogram. Kontroller med nogle små øvelser, du selv finder på.

b) Faktoriser følgende:

$$p_1(x)=x^4+5x^3-3x^2-26x+8 \qquad p_2(x)=x^4+4x^3+2x^2-x \qquad p_3(x)=x^4-x^3+6x^2-10x+12$$

Man skelner i den forbindelse mellem en *blød faktorisering*, der kun opløser i pæne faktorer med heltallige koefficienter, og en *hård faktorisering*, der opløser til bunds, også selv om rødderne ikke er pæne tal, men fx indeholder kvadratrødder, kubikrødder osv. Fx har andengradspolynomiet x^2-1 den bløde faktorisering $(x^2-1)=(x+1)\cdot(x+1)$ mens andengradspolynomiet x^2-2 har den hårde faktorisering $(x^2-2)=(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$.

ISBN 9788770668699

Øvelse 8:

Faktoriser polynomiet $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$ ved hjælp af factor-kommandoen i dit værktøj og sammenlign med det grafiske billede. Hvor mange rødder er der? Hvordan ser en blød faktorisering ud? Hvordan ser en hård faktorisering ud?

Øvelserne og diskussionen ovenfor antyder, at mens der i de hele tals verden kun er én slags byggesten, nemlig primtallene, er der i polynomiernes verden to slags byggestenene, nemlig førstegrads- og andengradspolynomier. Der gælder faktisk følgende sætning:

Sætning. Faktorisering af polynomier. 2. version
Et polynomium $p(x)$ med rødderne t_1, t_2, ... ,t_k kan faktoriseres i et produkt af førstegrads-polynomierne $(x - t_1)$, $(x - t_2)$, ... , $(x - t_k)$ samt andengradspolynomier uden rødder.
En sådan faktorisering kaldes en *fuldstændig faktorisering af* $p(x)$.

Bemærkning. Beviset for sætningen bygger på *algebraens fundamentalsætning*, som vi omtalte i afsnit 3.1. Ifølge denne kan et polynomium altid faktoriseres som et produkt af førstegradspolynomier, hvis vi udvider vores verden af tal til at omfatte de såkaldte komplekse tal. Det viser sig så yderligere, at alle førstegradspolynomierne, der indeholder komplekse tal kan samles parvis og ganges sammen til andengradspolynomier uden rødder. Vi vender tilbage til dette i A-bogen.

Eksempel. Anvendelse af faktorisering til fortegnsundersøgelser.
I afsnit 2.1 gav vi en opskrift på hvilke punkter der ofte vil indgå i en undersøgelse af polynomiers grafiske forløb. Et af disse punkter handler om *fortegnsundersøgelse*, dvs. angivelse af funktionens nulpunkter, og af hvor funktionsværdierne er positive, og hvor de er negative. Hvis det er lykkedes at faktorisere et polynomium $p(x)$, så får vi med en simpel teknik fortegnsvariationen.
Lad os som et første eksempel se på $p(x) = 3x^3 - 3x^2 - 66x + 120$, som vi har faktoriseret således:

$$3x^3 - 3x^2 - 66x + 120 = 3\cdot(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-4)$$

Vi stiller de enkelte faktorer op i et skema, hvor den øverste række repræsenterer tallinjen. *Her afsættes nulpunkterne*, i dette tilfælde: $x = -5$, $x = 2$, $x = 4$:

x		**-5**		**2**		**4**	
a	+	+	+	+	+	+	+
(*x*+5)	-	0	+	+	+	+	+
(*x*-2)	-	-	-	0	+	+	+
(*x*-4)	-	-	-	-	-	0	+
***p*(*x*)**	-	0	+	0	-	0	+

Fortegnet for $p(x)$ fremkommer ved at anvende reglerne om produkt af fortegn i hver lodret søjle.
Vi konkluderer således:

Grafen for $p(x)$, ligger under 1. aksen når $x < -5$. Eller: ... for $x \in]-\infty;-5[$

Grafen for $p(x)$, ligger over 1. aksen når $-5 < x < 2$. Eller: ... for $x \in]-5;2[$

Grafen for $p(x)$, ligger under 1. aksen når $2 < x < 4$. Eller: ... for $x \in]2;4[$

Grafen for $p(x)$, ligger over 1. aksen når $x > 4$. Eller: ... for $x \in]4;\infty[$

Tegn grafen og kontroller.

Øvelse 2:

Gennemfør en tilsvarende fortegnsundersøgelse $p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 34x + 30$.