ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 3.4 Fjerdegradspolynomiets symmetri

Indledning: Symmetri for polynomier

I kapitel 2 har vi set at grafen for et andengradspolynomium $p_2(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ altid er symmetrisk omkring den lodrette akse $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Tilsvarende har vi i kapitel 3 set, at grafen for tredjegradspolynomiet $p_3(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ altid er symmetrisk omkring punktet $\left(-\dfrac{b}{3a}, p_3\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$.

Men for polynomier af højere grad er det mere kompliceret. Allerede ved fjerdegradspolynomiet behøver grafen derfor ikke have en symmetriakse.

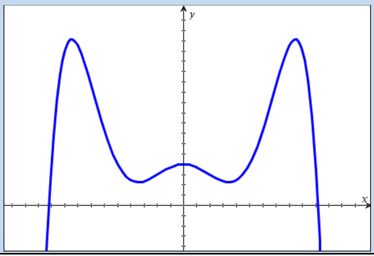
Øvelse 1:

b) Tegn grafen for et tilfældigt fjerdegradspolynomium. I dit CAS-værktøj findes fx sandsynligvis en kommando noget i retning af randpoly(x,4), der frembringer en forskrift for et tilfældigt fjerdegradspolynomium med heltallige koefficienter mellem -10 og 10. Er det nemt at finde et symmetrisk fjerdegradspolynomium?

Inden vi kigger nærmere på fjerdegradspolynomierne ser vi lidt nærmere på symmetri for et vilkårligt polynomium.

Sætning 1:
Grafen for et polynomium $p(x)$ er symmetrisk omkring *y*-aksen $x = 0$, hvis og kun hvis polynomiet *kun* indeholder led af lige grad:

$$p(x) = a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + \ldots$$



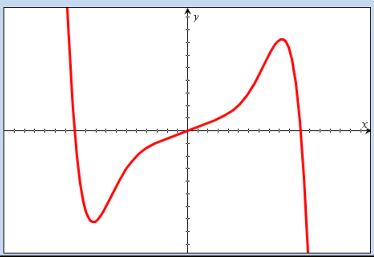
Øvelse 2:

a) Indskriv for et generelt polynomium $p_6(x)$ af grad 6. Gør rede for at hvis grafen er symmetrisk omkring *y*-aksen skal der gælde $p(-x) = p(x)$. Udregn differensen $p(x) - p(-x)$.
b) Gør nu rede for at grafen for sjettegradspolynomiet netop er symmetrisk omkring *y*-aksen, når de ulige led mangler.
c) Gennemfør nu et generelt argument for vilkårlige polynomier.

Man siger at polynomiet er *en lige funktion*, hvis det kun indeholder led af lige grad og grafen dermed er symmetrisk omkring *y*-aksen.

Sætning 2:
Grafen for et polynomium $p(x)$ er symmetrisk omkring begyndelsespunktet (0,0), hvis og kun hvis polynomiet kun indeholder led af ulige grad:

$$p(x) = a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + a_5 \cdot x^5 + \ldots$$



ISBN 9788770668699

Øvelse 2:

a) Indskriv for et generelt polynomium $p_5(x)$ af grad 5. Gør rede for at hvis grafen er symmetrisk omkring (0,0) skal der gælde $p(-x) = -p(x)$. Udregn summen $p(x) + p(-x)$.

b) Gør nu rede for at grafen for femtegradspolynomiet netop er symmetrisk omkring (0,0), når de lige led mangler.

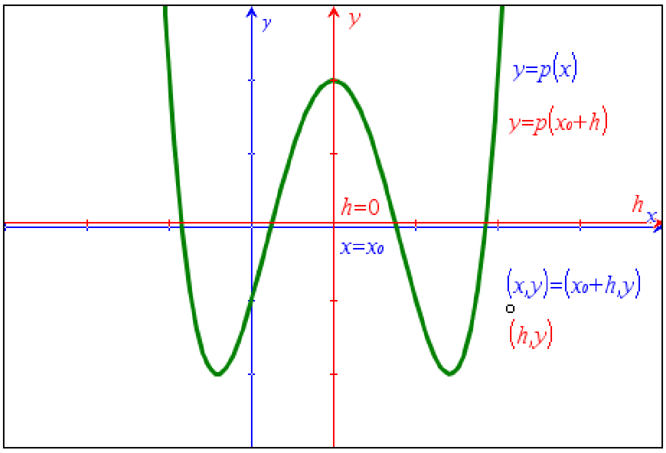
c) Gennemfør nu et generelt argument for vilkårlige polynomier.

Man siger at polynomiet er *en ulige funktion*, hvis det kun indeholder led af ulige grad og grafen dermed er symmetrisk omkring (0,0).

Hos grafen for et polynomium af lige grad vender de yderste grene samme vej. Derfor kan grafen for et polynomium af lige grad godt have aksesymmetri, men *ikke* punktsymmetri.

Hos grafen for et polynomium af ulige grad vender de yderste grene modsat. Derfor kan grafen for et polynomium af ulige grad godt have punktsymmetri, men *ikke* aksesymmetri.

Første del: Symmetriske fjerdegradspolynomier



Vi går så over til at se nærmere på symmetrien for fjerdegradspolynomier. Her er der chance for aksesymmetri. Vi skal altså undersøge hvad der skal til for at grafen er symmetrisk omkring den lodrette linje $x = x_0$. Vi kigger derfor på den forskudte graf svarende til polynomiet $q(h) = p(x_0 + h)$. Her skal grafen være symmetrisk omkring den lodrette linje h = 0, dvs. andenaksen i de forskudte koordinater (h, y). Vi udregner derfor forskriften for det forskudte polynomium med et CAS-værktøj, hvor expand(…,h) samler udtrykket efter potenser af h:

$$p(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$\text{exp}and(p(x_0 + h), h)$$

$$= a \cdot h^4 + (4 \cdot a \cdot x_0 + b) \cdot h^3 + \left(6 \cdot a \cdot x_0^2 + 3 \cdot b \cdot x_0 + c\right) \cdot h^2$$
$$+ \left(4 \cdot a \cdot x_0^3 + 3 \cdot b \cdot x_0^2 + c \cdot x_0 + d\right) \cdot h + \left(a \cdot x_0^4 + b \cdot x_0^3 + c \cdot x_0^2 + d \cdot x_0 + e\right)$$

Det kan se lidt overvældende ud, men essensen af udtrykket er at det forskudte polynomium q også er et fjerdegradspolynomium. Men hvis det skal være symmetrisk omkring andenaksen h = 0, skal alle leddene af lige grad forsvinde:

$$4\cdot a\cdot x_0+b=0$$

$$4\cdot a\cdot {x_0}^3+3\cdot b\cdot {x_0}^2+c\cdot x_0+d=0$$

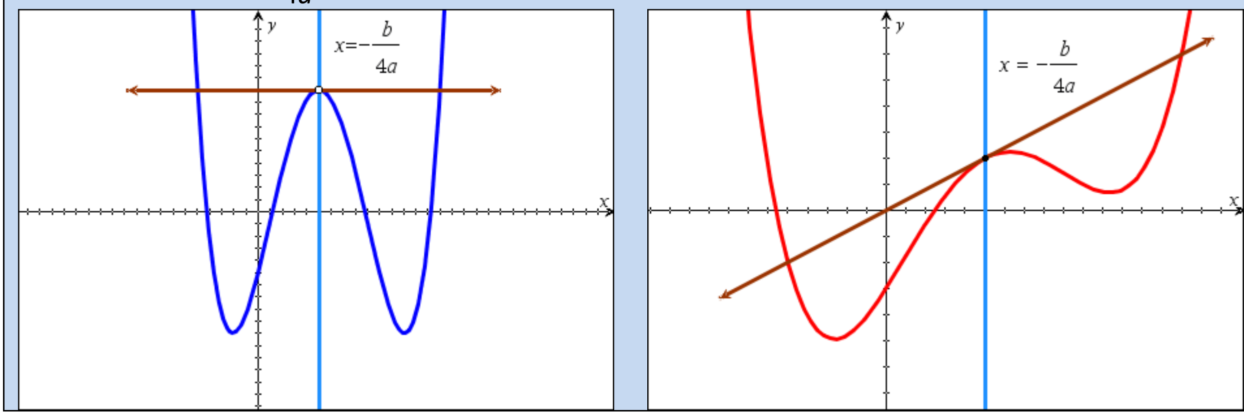
Den første betingelse sikrer at tredjegradsleddet forsvinder, den anden at førstegradsleddet forsvinder. Da førstegradsleddet netop angive hældningen af grafen ved skæring med anden-aksen h = 0, siger den anden betingelse blot at aksetangenten skal være vandret. Den første betingelse kan umiddelbart løses med hensyn til x_0 :

$$4\cdot a\cdot x_0+b=0$$

$$x_0=-\frac{b}{4a}$$

Vi ser altså:

Sætning 3: Fjerdegradspolynomiet $p(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$ er symmetrisk, hvis og kun hvis aksetangenten i $x=-\dfrac{b}{4a}$ er vandret. I givet fald er grafen symmetrisk omkring den lodrette akse $x=-\dfrac{b}{4a}$.



Bemærkning: Hvis du kan lidt differentialregning er det altså simpelt at kontrollere om et givet fjerdegradspolynomium er symmetrisk ved at kontrollere om aksetangenten er vandret ved at udregne $p'(-\frac{b}{4a})$. Ellers kan du fx udregne det forskudte polynomium som vist ovenfor.

Anden del: Løsningen af symmetriske fjerdegradsligninger

Symmetriske fjerdegradspolynomier udgør en særligt simpel type fjerdegradspolynomium, bl.a. fordi den er sammensat af to andengradspolynomier og derfor kan en symmetrisk fjerdegradsligning nemt løses!

Sætning 4: Fjerdegradspolynomiet $y=p(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$ er symmetrisk hvis og kun hvis det kan sammensættes af to andengradspolynomier $y=f(u)=a_2\cdot u^2+b_2\cdot u+c_2$, $u=g(x)=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c$, dvs. $p(x)=f(g(x))$. I givet fald arver det symmetrien fra det inderste andengradspolynomium, dvs. $u=g(x)=a_1\cdot x^2+b_1\cdot x+c$.

ISBN 9788770668699

Øvelse 3:

a) Find sammensætningen af de to andengradspolynomier $y = f(u) = u^2 + 2 \cdot u - 3, \quad u = g(x) = x^2 - 2 \cdot x - 4$
Vis at sammensætningen bliver et symmetrisk fjerdegradspolynomium med samme symmetriakse som andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 2 \cdot x - 4$.

b) Gør rede for at sammensætningen af to vilkårlige andengradspolynomier $y = f(u) = a_2 \cdot u^2 + b_2 \cdot u + c_2$ og $u = g(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ giver et symmetrisk fjerdegradspolynomium med samme symmetriakse som andengradspolynomiet $g(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$. Brug gerne dit CAS-værktøj til at hjælpe dig med udregningerne ☺.

Øvelse 4:

a) Gør rede for at fjerdegradspolynomiet $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ er et symmetrisk fjerdegradspolynomium. Vis at det kan sammensættes af to andengradspolynomier ved at udføre forskydningen
$q(h) = p\left(-\frac{b}{4a} + h\right)$. Vink: Opløs først det forskudte polynomium $q(h)$ som en sammensætning af to andengradspolynomier $y = f(u)$ og $u = h^2$.

b) Gør på samme måde rede for at et vilkårligt symmetrisk fjerdegradspolynomium kan sammensættes af 2 andengradspolynomier.

Vi mangler at vise at vi kan løse en vilkårlig *symmetrisk* fjerdegradsligning ved at reducere den til andengradsligninger.

Eksempel: Vi ser på den symmetriske fjerdegradsligning fra øvelse 3 ovenfor:
$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 5 = 0$

Øvelse 5:
Løs ligningen såvel grafisk som symbolsk ved hjælp af dit CAS-værktøj.

Du skulle da gerne finde fire rødder til ligningen der kan udtrykkes ved hjælp af kvadratrødder. Men hvor kommer disse fire rødder fra? Ja ifølge teorien kan vi forskyde fjerdegradspolynomiet så vi slipper for leddene af ulige grad. Symmetriaksen er givet ved

$$x_0 = -\frac{b}{4a} = -\frac{-4}{4 \cdot 1} = 1$$

Vi finder derfor

$$p(x) := x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 5$$
$$q(h) := p(1+h)$$
$$q(h) = h^4 - 8h^2 + 12$$

Sætter vi $x = 1 + h$ og dermed $h = x - 1$ fås altså opløsningen

$$p(x) = h^4 - 8h^2 + 12, \quad h = x - 1$$

Men det viser jo netop at fjerdegradspolynomiet $p(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 5$ kan opløses i de to andengradspolynomier

$$y = f(u) = u^2 - 8u + 12$$
$$u = g(x) = (x-1)^2$$

ISBN 9788770668699

For at løse andengradsligningen

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 5 = 0$$

løser vi derfor først den yderste ligning $u^2 - 8u + 12 = 0$ og derefter den inderste ligning $(x-1)^2 = u$ med de fundne værdier af u.

Øvelse 6:
Løs de to andengradsligninger i hånden og kontrollér at det giver de samme løsninger til fjerdegradsligningen som dit CAS-værktøj fandt.

Øvelse 7:

a) Løs fjerdegradsligningen $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$.
b) Formulér nu en generel strategi til løsning af symmetriske fjerdegradsligninger.

Kommentar: Asymmetriske fjerdegradsligninger er langt sværere at løse. Her kan man i stedet benytte en faktorisering af fjerdegradspolynomiet i to andengradspolynomier som udgangspunkt for løsningen. Det kan du løse mere om i projekt 3.5. Også symmetriske fjerdegradsligninger kan løses ved opløsning i produkt af to andengradspolynomier. Symmetriakserne for de to andengradspolynomier skal så blot ligge symmetrisk omkring symmetriaksen for fjerdegradspolynomiet. Fx kan fjerdegradspolynomiet $x^4 + 1$ med symmetriaksen $x = 0$ opløses i to andengradspolynomier på formen $x^2 - b \cdot x + 1$ og $x^2 + b \cdot x + 1$. Ganger vi ud fås

$$(x^2 - b \cdot x + 1) \cdot (x^2 + b \cdot x + 1) = x^4 + (2 - b^2) \cdot x^2 + 1$$

Vi skal derfor blot sætte $b = \sqrt{2}$, hvorved vi finder

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)$$

Læg mærke til at de to andengradspolynomier ikke har nogen rødder.

Tredje del: Prototyper for symmetriske fjerdegradspolynomier

De *symmetriske* fjerdegradspolynomier minde meget om tredjegradspolynomierne i deres struktur. Ligesom tredjegradspolynomiet har de fire frie parametre. Symmetribetingelsen binder nemlig den ene parameter:

$$p(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$\text{expand}\left(p\left(-\frac{b}{4a}+h\right),h\right) = a \cdot h^4 + \frac{8 \cdot a \cdot c - 3 \cdot b^2}{8 \cdot a} \cdot h^2 + \boxed{\frac{8 \cdot a^2 \cdot d - 4 \cdot a \cdot b \cdot c + b^3}{8 \cdot a^2}} \cdot h + \frac{256 \cdot a^3 \cdot e - 64 \cdot a^2 \cdot b \cdot d + 16 \cdot a \cdot b^2 \cdot c - 3 \cdot b^4}{256 \cdot a^3}$$

Da fjerdegradspolynomiet er symmetrisk omkring symmetriaksen $x = -\dfrac{b}{4a}$ skal det lineære led forsvinde, dvs. der må gælde:

$$8 \cdot a^2 \cdot d - 4 \cdot a \cdot b \cdot c + b^3 = 0$$

$$d = -\frac{b \cdot \left(b^2 - 4 \cdot a \cdot c\right)}{8 \cdot a^2}$$

Førstegradskoefficienten *d* er altså låst af de øvrige tre koefficienter (*a*, *b*, *c*).

Ligesom tredjegradspolynomierne kan de symmetriske fjerdegradspolynomier derfor transformeres over i tre grundlæggende prototyper. I første omgang flytter vi polynomiet, så symmetriaksen ligger i *y*-aksen. Vi kan altså gerne antage at det symmetriske fjerdegradspolynomium er på formen:

$$p(x) = x^4 + C \cdot x^2 + E$$

Her har vi også skaleret *y*-koordinaten ved at dividere igennem med *a.* Ved en samtidig skalering af *x*- og *y*-koordianter kan vi nu også normere koefficienten til x^2 :

$$s \cdot p(\frac{x}{k}) = \frac{s}{k^4} \cdot x^4 + \frac{s}{k^2} \cdot C \cdot x^2 + s \cdot E$$

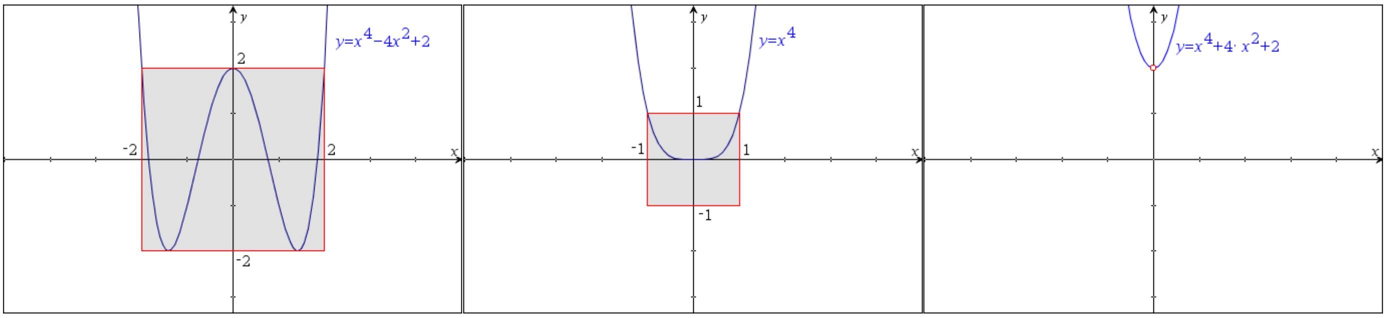
Da vi ikke må ændre koefficienten til x^4 må der gælde $s = k^4$ dvs. skaleringen tager formen:

$$k^4 \cdot p(\frac{x}{k}) = x^4 + k^2 \cdot C \cdot x^2 + k^4 \cdot E$$

Vi kan altså ikke ændre fortegnet på *C*, hvorfor der netop bliver tre prototyper svarende til de tre mulige fortegn for *C*, dvs. -1, 0 og +1. Til sidst kan vi ændre konstantleddet med en lodret forskydning.

ISBN 9788770668699

Der dukker da de følgende tre prototyper op:



$p_1(x) = x^4 - 4x^2 + 2$
$\quad = (x^2 - 2)^2 - 2$
Dobbelt brønd

$p_2(x) = x^4$
Flad brønd

$p_3(x) = x^4 + 4x^2 + 2$
$\quad = (x^2 + 2)^2 - 2$
Stejl brønd

Øvelse 8:

c) Bestem toppunkterne for $p_1(x)$. Gør rede for hvordan antallet af løsninger til ligningen $x^4 - 4x^2 + 2 = k$ afhænger af parameteren *k*, og angiv en løsningsformel i hvert parameterområde.

d) Gør rede for hvordan antallet af løsninger til ligningen $x^4 = k$ afhænger af parameteren *k*, og angiv en løsningsformel i hvert parameterområde.

e) Gør rede for hvordan antallet af løsninger til ligningen $x^4 + 4x^2 + 2 = k$ afhænger af parameteren *k*, og angiv en løsningsformel i hvert parameterområde.

Fjerde del: Rødderne i et symmetrisk fjerdegradspolynomium

Hvis et tal *x* kan udtrykkes alene ved hjælp af hele tal, de fire regneoperationer og en enkelt kvadratrod, er det faktisk løsning til en pæn andengradsligning, dvs. en andengradsligning med heltallige koefficienter. Vi vil ikke beviser det i alle detaljer men blot gennem et simpelt eksempel vise hvordan man finder andengradsligningen.

Eksempel:
Givet tallet $x = 2 + \sqrt{3}$. Find den pæne andengradsligning den stammer fra.
Løsning: Vi udnytter vores CAS-værktøj til at isolere kvadratroden og ophæve den med en kvadrering. Det kan fx se således ud:

$$
\begin{array}{lll}
eq1 := & x = 2 + \sqrt{3} & \% \quad x = 2 + \sqrt{3} \\
eq2 := & eq1 - 2 & \% \quad x - 2 = \sqrt{3} \\
eq3 := & eq2^2 & \% \quad (x-2)^2 = 3 \\
eq4 := & eq3 - 3 & \% \quad x^2 - 4x + 1 = 0
\end{array}
$$

Tallet $x = 2 + \sqrt{3}$ er altså rod i andengradsligningen $x^2 - 4x + 1 = 0$. Den kan vi selvfølgelig nu løse og derved finde den anden rod, men vi kan også ræsonnere således: Skifter vi fortegn på kvadratroden, dvs. ser i stedet på tallet $x = 2 - \sqrt{3}$ vil vi finde frem til den *samme* andengradsligning, når vi kvadrerer for at slippe af med roden!

ISBN 9788770668699

Øvelse 9:

f) Givet tallet $x = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Find den pæne fjerdegradsligning, som den er rod i.
g) Hvad hedder de andre rødder? Hvordan ligger de fire rødder i forhold til hinanden? Er fjerdegradsligningen symmetrisk?
h) Givet tallet $x = c+\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Find den pæne fjerdegradsligning, som den er rod i.
i) Hvad hedder de andre rødder? Hvordan ligger de fire rødder i forhold til hinanden? Er fjerdegradsligningen symmetrisk?

Øvelse 10:

j) Givet tallet $x = 1+\sqrt{4+\sqrt{3}}$. Find den pæne fjerdegradsligning, som den er rod i.
k) Hvad hedder de andre rødder? Hvordan ligger de fire rødder i forhold til hinanden? Er fjerdegradsligningen symmetrisk?
l) Givet tallet $x = c+\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Find den pæne fjerdegradsligning, som den er rod i.
m) Hvad hedder de andre rødder? Hvordan ligger de fire rødder i forhold til hinanden? Er fjerdegradsligningen symmetrisk?

Hvad kan vi konkludere ud fra de to øvelser? Hvad fortæller de om løsningerne til symmetriske fjerdegradsligninger? Hvad fortæller de om løsningerne til asymmetriske fjerdegradsligninger?