ISBN 9788770668699

Projekt 3.1 Matematikken bag Bezierkurver

A. Leg selv med Bezierkurver

1. Introduktion til Bezierkurver
Her kan du se en kort introduktion fra Khan Academy til animation vha. Bezier kurver:
https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/animate/ball/p/animation-with-bezier-curves

2. Animation af Bezierkurver
Der findes Bezierkurver af forskellig orden eller grad:
Første orden, hvor to punkter genererer en linje
Anden orden, hvor vi har tre frembringende punkter, forbundet i en trekant, og hvor kurven svarer til den vi frembringer ved ”syning af en parabel” som beskrevet i projekt 2.7
Tredje orden, hvor vi har fire frembringende punkter, som genererer de kurver, vi har beskrevet i kapitel 3, afsnit 1, og har behandlet i projekt 3.1
Fjerde orden, hvor vi har fem frembringende punkter … osv.
På adressen: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php
kan du undersøge de kurver programmerne tegner. Læg mærke til, at der er røde frembringende punkter, som du kan trække i. Og andre farvede punkter, som er de der beregnes ud fra de frembringende punkter, og som vi derfor naturligvis ikke kan trække i.
Du kan skifte mellem de forskellige ordner, og på en given tegning vil du kunne trække i de frembringende punkterne. Prøv om du kan tegne bestemte figurer.

På denne side finder du også en indføring i den matematiske beskrivelse af kurverne. Vi går dybere ned i dette i *Hvad er matematik*? 3, under emnet *vektorfunktioner og parameterkurver*.

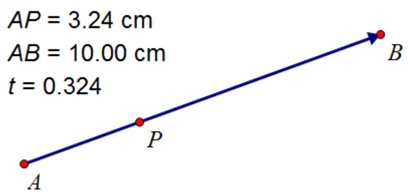
3. Split op og kombiner forskellige Bezierkurver
Her kan du få et interaktivt ark, hvor du selv kan trække og ændre på kurven:
https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/animate/ball/p/animation-with-bezier-curves

4. Hvorfor var Bezierkurver så revolutionerende for design af næsten enhver art?
I den gennemgang af Bezierkurver af tredje orden, der er demonstreret i det indledende afsnit til kapitel 3, når vi frem til, at den figur vi har tegnet ud fra fire punkter – og som vi bagefter har flyttet rundt på indtil vi har fundet en interessant kurve – den figurs *x*- og *y-koordinater* kan skrives som funktioner af parameteren *t*. I dette tilfælde bliver det 3. gradspolynomier. Men det betyder, at når vi har tegnet og er tilfredse, så har vi tegningen på formel. Disse formler kan lægges ind i computerprogrammer og værktøjsmaskiner og derved sikre, at fx bilens design bliver præcis som vi ønskede. En af de store anvendelser er i en meget mindre skala, nemlig design af skrifttyper o.l. Brugeren vil gerne kunne skalere og trække og vride i disse typer, og computerprogrammer som pdf-værktøjer skal kunne garantere, at resultatet er som ønsket. Og det kan lade sig gøre, fordi disse fonte er udtrykt i matematiske formler.

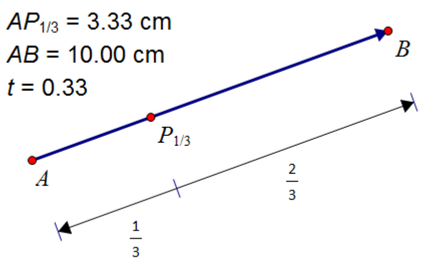
ISBN 9788770668699

B. Vi regner på Bezierkurver af anden og tredje orden

Vi starter med det simpleste tilfælde: Hvad har et linjestykke og et førstegradspolynomium med hinanden at gøre? For at forstå det skal vi forstå delingsforholdet for et linjestykke *AB*:



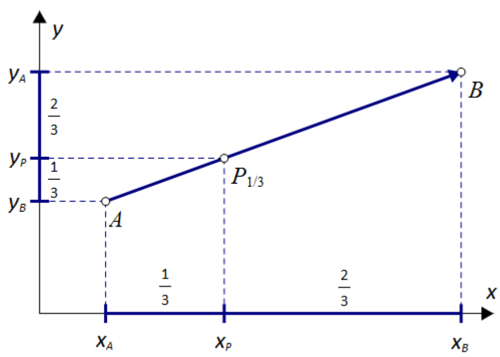
Hvis vi indfører et delepunkt *P* på linjestykket kan vi finde delingsforholdet *AP*/*AB* som vi kort vil betegne med *t*. Det afgørende er da, at når delingsforholdet er 0 er vi i begyndelsespunktet *A*, når delingsforholdet er 1 er vi i slutpunktet *B*. Når delingsforholdet er ½ er vi i midtpunktet for *AB* osv. Vi vil nu udvikle en simpel formel, der fortæller os hvordan vi finder delepunktet P_t ud fra delingsforholdet *t*. Lad os som et konkret eksempel se på tredelingspunkt $P_{1/3}$: Vi ved da, at stykket *AP* udgør 1/3 af hele linjestykket *AB* og dermed også at det resterende linjestykke *PB* udgør 2/3 af hele linjestykket *AB*:



Vi kan da opfatte delepunktet P som det punkt, der indeholder 2/3 af A og 1/3 af B (læg mærke til at vægtene er byttet om: Det endepunkt, der ligger nærmest ved *P* har den største vægt). Vi kan altså udregne delepunktet *P* som det vægtede gennemsnit:

$$P = \tfrac{2}{3}\cdot A + \tfrac{1}{3}\cdot B$$

Der er forskellige måder at forstå denne formel på, men lad os bare her bruge koordinater: Formlen siger da at den vandrette *x*-koordinat netop er det vægtede gennemsnit af *x*-koordinaterne og tilsvarende for *y*-koordinaterne:



I almindelighed vil delepunktet P_t dele linjestykket *AB* i delingsforholdet *t* : (1-*t*) og kan derfor beregnes som et vægtet gennemsnit ud fra formlen

$$P = (1-t)\cdot A + t\cdot B$$

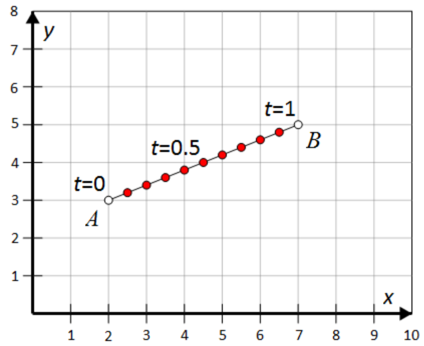
Den afgørende pointe er nu at dette udtryk viser at delepunktet er konstrueret som et *førstegradspolynomium* i *t*, hvilket vi kan tydeliggøre med omskrivningen

$$P = A + (B-A)\cdot t$$

Ikke overraskende er begyndelsesværdien punktet *A* og hvis vi går 1 hen (dvs. sætter *t* = 1) fås netop slutpunktet $A + (B-A) = B$.

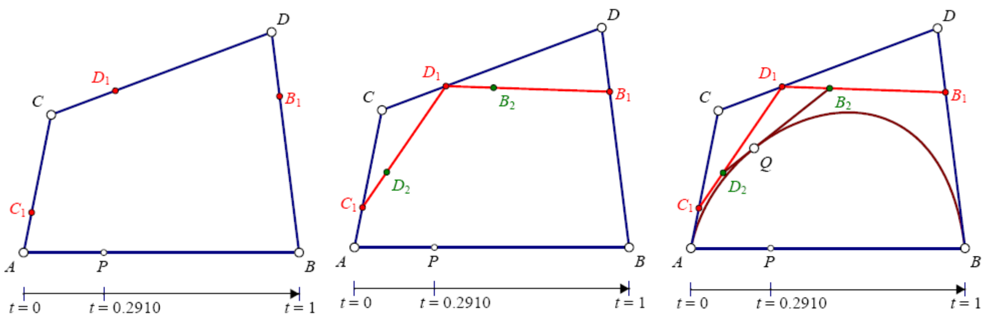
ISBN 9788770668699

Øvelse: I den følgende tabel har vi anført *x*- og *y*-koordinaterne som funktioner af *t* (som du fx kan tænke på som tiden).



a) Gør rede for at både x og y må være lineære funktioner af t og fastlæg deres ligninger.
b) Gør rede for at tabelpunktet *P*(*x*, *y*) ligger på linjestykket *AB* med begyndelsespunktet *A* = (2,3) og slutpunktet *B* = (7,5).
c) Gør rede for at tabelpunktet *P* netop deler linjestykket i delingsforholdet *t*.
d) Tegn også graferne for *x* og *y* som funktion af *t* på intervallet [0;1]. Prøv evt. med en mosaik, der viser hvordan de tre grafer hænger sammen.

Af det foregående følger at man kan tegne linjestykker med førstegradspolynomier. Vi vil nu undersøge Bezier-kurver af anden grad (parabler) og tredje grad (kubiske kurver) og vise at de er forbundne med anden – og tredjegradspolynomier. Vi vender tilbage til vores konstruktion af Bezier-kurven:



Her vil førsteordens-delepunkterne C_1, D_1 og B_1 være forbundet med førstegradspolynomier og gennemløbe de tre linjestykker *AC*, *CD* og *DB*:

$$C_1 = (1-t)\cdot A + t\cdot C, \quad D_1 = (1-t)\cdot C + t\cdot D, \quad B_1 = (1-t)\cdot D + t\cdot B$$

Men så brugte vi dem til at frembringe to nye linjestykker og dele dem på samme måde. Herved frembragte vi andenordens-delepunkterne D_2 og B_2:

$$D_2 = (1-t)\cdot C_1 + t\cdot D_1, \quad B_2 = (1-t)\cdot D_1 + t\cdot B_1$$

Men nu er C_1 og D_1 førstegradspolynomier i *t* og da vi ganger dem med førstegradspolynomierne (1-*t*) og *t* bliver resultatet et andengradspolynomium i *t*!

ISBN 9788770668699

Øvelse:

a) Vis, gerne med inddragelse af CAS, at de to andengradspolynomier er givet ved
$D_2 = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot C + t^2 \cdot D, \quad B_2 = (1-t)^2 \cdot C + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot D + t^2 \cdot B$

b) Vis at summen af de tre andengradspolynomier $(1-t)^2, \quad 2 \cdot (1-t) \cdot t, \quad t^2$ netop er 1, dvs. der er tale om et vægtet gennemsnit af punkterne *A*, *C* og *D* henholdsvis *C*, *D* og *B*, hvorfor parablerne forløber indenfor trekanterne *ACD* henholdsvis *CDB*.

Endelig brugte vi andenordens-delepunkterne til at frembringe det sidste linjestykke og dele det på samme måde. Herved frembragte vi tredjeordens-delepunktet *Q*:

$$Q = (1-t) \cdot D_2 + t \cdot B_2$$

Men nu er C_2 og D_2 andengradspolynomier i *t* og da vi ganger dem med førstegradspolynomierne (1-*t*) og *t* bliver resultatet et tredjegradspolynomium i *t*!

Øvelse:

a) Vis, gerne med inddragelse af CAS, at tredjegradspolynomiet er givet ved
$Q = (1-t)^3 \cdot A + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot B + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot C + t^3 \cdot D$

b) Vis at summen af de fire tredjegradspolynomier $(1-t)^3, \quad 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t, \quad 3 \cdot (1-t) \cdot t^2, \quad t^3$ netop er 1, dvs. der er tale om et vægtet gennemsnit af punkterne *A*, *C* , *D* og *B*, dvs. Bezier-kurven forløber indenfor firkanten *ACDB*.

c) Hvis du har tegnet Bezier-kurven efter opskriften i afsnittet, mål da koordinaterne for hjørnepunkterne *A*, *C*, *D* og *B* og indsæt disse i formlen for tredjegradspolynomiet
$Q = (1-t)^3 \cdot A + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot B + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot C + t^3 \cdot D$. Derved finder du tredjegradspolynomierne for koordinatfunktionerne *x* og *y*. Sammenlign disse med de udtryk, du tidligere har fundet ved regression.

3. Dybere ned i teori og praksis omkring Bezierkurver

I *Hvad er matematik*? 3 behandles emnet *vektorfunktioner*. Der vil vi gå dybere ned i teori og praksis omkring Bezierkurver, og bl.a. opdage et nært slægtskab til de såkaldte Bernstein polynomier. Et af de store resultater i moderne funktionsteori er, at blot en funktion er kontinuert, så kan den på begrænsede intervaller tilnærmes med polynomier. Dette er også et vigtigt praktisk resultat, idet det er let at programmere en computer til at udregne funktionsværdier af polynomier, men ofte vanskeligt at få udregnet værdier af mere komplekse funktioner som eksponentialfunktioner, trigonometriske eller endnu mere eksotiske funktioner. I denne tilnærmelse spiller disse Bernsteinpolynomier en central rolle. Så den teknik, der skaber en Bezierkurve, så denne kan sættes på formel er principielt den samme som den der tilnærmer en given kurve med grafen for et polynomium.