ISBN 9788770668699

Projekt 3.10 Differenstabeller for polynomier

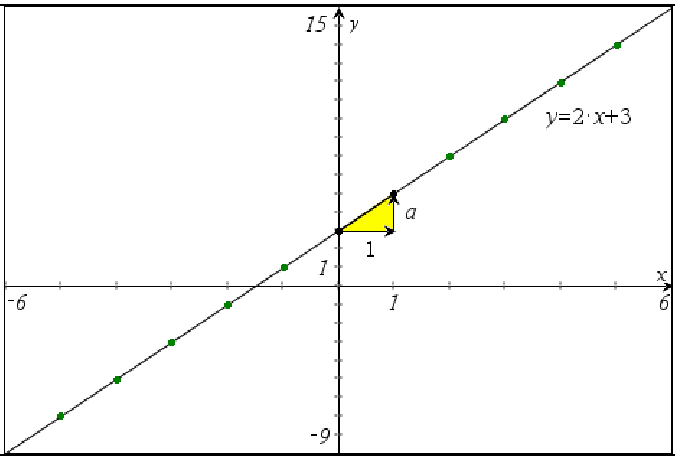
Man kan vise, at ethvert grafisk forløb, hvor grafen hænger sammen (er *kontinuert*), kan tilnærmes så tæt, vi ønsker det med et polynomium. Det spiller en stor praktisk rolle for polynomier har den store fordel frem for andre klasser af funktioner som logaritmefunktioner eller trigonometriske funktioner (fx $\sin(x)$ og $\cos(x)$), at de er bygget op af de simpleste regneoperationer: plus, minus- og gange.

Det betyder, at det i princippet er en simpel sag at udregne tabelværdier for polynomier, og at sådanne udregninger kan automatiseres. Før regnemaskinernes tid var der dog et betydeligt regnearbejde og dermed risiko for at begå fejl, især ved multiplikationer og potensopløftninger. Derfor spurgte man sig i gamle dage (dvs. for ca. 100 år eller længere tid siden): Kunne man ikke finde metoder til at undgå disse operationer?

For at svare på det, starter vi med at lede efter en systematik i tabelværdier for et polynomium.

Førstegradspolynomier $p_1(x)=ax+b$. Som eksempel tager vi $p_1(x)=2x+3$.

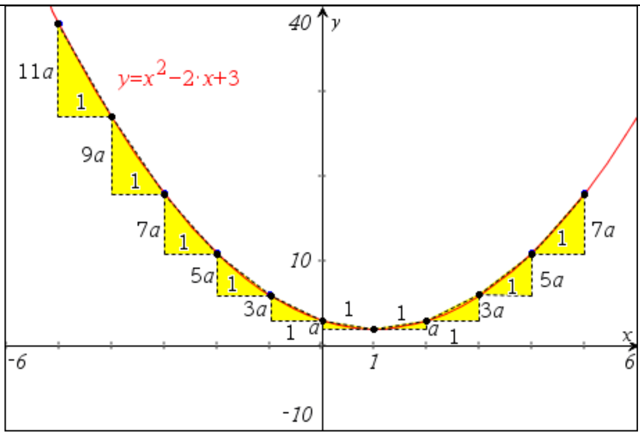
Her ligger systematikken i selve definitionen. Hver gang vi går 1 enhed frem i *x*-aksens retning, går vi stykket *a* op eller ned i *y*-aksens retning. Det fremgår af tabellen, hvor tilvæksten kaldes Δy. Bemærk, at *tilvæksten er lig med differenserne af y-værdierne*.



x	y	Δy
-5	-7	2
-4	-5	2
-3	-3	2
-2	-1	2
-1	1	2
0	3	2
1	5	2
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2

Andengradspolynomier $p_2(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Som eksempel tager vi $p_2(x)=2x^2-2x+3$.

Her er strukturen ikke så oplagt, men hvis vi får den idé ikke blot at udarbejde en liste Δ*y* over differenserne af *y*-værdierne, men også *at udarbejde en differensliste* $\Delta^2 y$ over differenserne af Δ*y*-værdierne, ser vi straks at den vokser jævnt med en konstant tilvækst.



x	y	Δy	Δ²y
-5	33	-14	4
-4	19	-10	4
-3	9	-6	4
-2	3	-2	4
-1	1	2	4
0	3	6	4
1	9	10	4
2	19	14	4
3	33	18	4
4	51	22	4
5	73	26	4

Differenslisten Δ*y* udgør med andre ord funktionsværdierne for et førstegradspolynomium. Vi ser også at Δ*y* konstante tilvækst netop er 2*a*, dvs. det dobbelte af koefficienten til x^2.

ISBN 9788770668699

Ved udregningen af tabeller for polynomier giver disse differenser betydelige fordele: Hvis man fx skulle udregne en tabel for et andengradspolynomium vidste man, at den anden differensliste var konstant. Man behøvede derfor kun at udregne tre funktionsværdier for at finde startværdierne for differenslisterne. Derefter kunne man arbejde sig baglæns gennem tabellen ved hjælp af kumulerede summer!

Øvelse 1:
Afprøv metoden på andengradspolynomiet $p(x) = x^2 + 4x + 3$, hvor du på **bogens website** kan hente en tabel, der er udfyldt for $x = 0$, $x = 1$ og $x = -1$. Regn selv baglæns og udfyld tabellen. Kontroller nogle af tabelværdierne.

Metoden er let at generalisere. Når man udregner differenslisten for et fjerdegradspolynomium får man et tredjegradspolynomium. Udregner man derefter differenslisten for et tredjegradspolynomium får man et andengradspolynomium osv. Det kan vi sammenfatte i følgende sætning:

Sætning. Differenslisterne for et polynomium
Hvis der opstilles en tabel over et *n*'tegradspolynomium for heltallige værdier af *x*, vil 1., 2., … op til *n*'te differensliste følge polynomier af grad $n-1$, $n-2$ osv. indtil den sidste (*n*'te) differensliste vil være konstant.

Øvelse 2:

a) Vælg et tilfældigt femtegradspolynomium, som du kalder $p(x)$.

b) Definer i dit værktøjsprogram $p_1(x) := p(x+1) - p(x)$. Hvilken grad har $p_1(x)$?

c) Definer dernæst $p_2(x) := p_1(x+1) - p_1(x)$. Hvilken grad har $p_2(x)$?

d) Fortsæt processen. Overvej, at denne proces kan generaliseres og dermed give et bevis for sætningen.

Hvis vi får oplyst den konstante n'te ordens differens for et n'te gradspolynomium og startværdierne for de foregående differenser (inklusive startværdien for *y*), kan vi som i øvelse 1 håndregne os gennem tabellen *alene* ved at lægge tal sammen og trække tal fra hinanden. Man behøver ikke have en grundig uddannelse i matematik for at blive polynomiumsberegnere!

I kapitel 4 om logaritmer fortælles historien om tabelfabrikken som den franske matematiker Prony oprettede efter revolutionen for at opstille helt nye, mere præcise og mere pålidelige trigonometriske logaritmetabeller end dem der allerede fandtes. Tabelfabrikken var organiseret på tre niveauer:

1) Det øverste ledelseslag bestående af specialister som Prony, der konstruerede polynomier, som tilnærmede de funktioner man skulle tabellægge. Det krævede et godt kendskab til den teoretiske matematik. Under emnet differentialregning vil vi hvordan man kan finde disse polynomier.

2) Et lag af mellemledere, der var ansvarlige for udregningen af startværdierne for de fundne polynomier og for at organisere arkene med tabeller, hvor startværdierne for søjlerne var anført, så tabellen var klar til udfyldning af de mange søjler.

3) Et stort lag af arbejdere, der stod for udfyldelsen af de mange tusinde ark efter den ovenfor beskrevne metode, men nu med langt flere søjler. Disse arbejdere var bl.a. omskolede frisører, der var blevet arbejdsløse efter den franske revolution i 1789, hvor adelen mistede sine privilegier.

ISBN 9788770668699

Tabelfabrikken var et kæmpe projekt og yderst ambitiøst og trykkeomkostningerne viste sig langt at overstige den nye franske stats ressourcer. Franskmændene forsøgte sig med internationalt samarbejde, specielt med briterne, men forhandlingerne brød sammen og først med næsten hundrede års forsinkelse lykkedes det franskmændene at udgive en stærkt forenklet udgave af den ambitiøse tabel.

På **bogens website** kan du hente en artikel, hvor den engelske matematiker Babbage, der skabte de første effektive regnemaskiner, forklarer differensmetoden for børn og unge i stor detalje.