ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 3.11. Transformation af grafen for $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ over i en prototype.

Projektet består af to dele: 1. del, hvor vi ser en film om tredjegradspolynomiernes tre prototyper. Og 2. del, hvor vi selv regner på et eksempel, der illustrerer, hvordan et koordinatskifte kan føre givne polynomier over i en af de tre prototyper: $p_1(x)=x^3$, $p_2(x)=x^3-x$, $p_3(x)=x^3+x$

I. Video

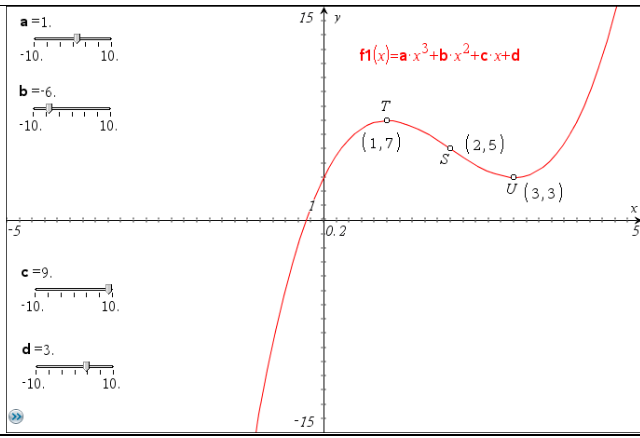
Den video om prototyperne på tredjegradspolynomier, som du kan se her, er en del af et større projekt, *Project Mathematics*, som University og California udarbejdede i 1990'erne. Det er tiden før elever selv arbejdede med værktøjsprogrammer på computere, men vi ser bl.a. hvordan der arbejdes med skydere, så man umiddelbart selv kan overføre ideerne til sit eget program. Du starter videoen ***her***.

II. Transformation over i en prototype

Vi opretter en graf for tredjegradspolynomiet $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$, og vælger her som taleksempel $y=x^3-6x^2+9x+3$. Vinduet bestemmes af x-intervallet fra -5 til 5 og y-intervallet fra -15 til 15.

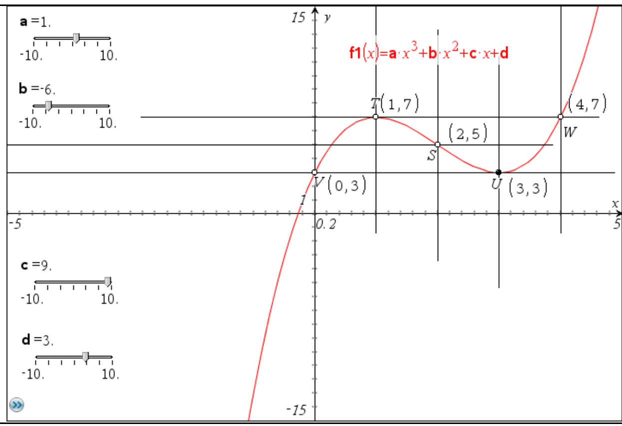
På grafen afsættes vendepunktet S, samt ekstremumspunkterne T og U ved hjælp af et CAS-værktøj.

Vi har i bogens kapitel 3, afsnit 3 vist, at tredjegradspolynomiet er symmetrisk omkring S. Symmetri betyder her, at hvis vi drejer grafen 180 grader om S, så føres den over i sig selv. Det betyder specielt, at de to ekstremumspunkter T og U ligger symmetrisk omkring vendepunktet S.



Vi konstruerer nu såvel vandrette som lodrette linjer gennem vendepunktet S og de to ekstremumspunkter T og U. De vandrette linjer gennem ekstremumspunkterne T og U skærer grafen for tredjegradspolynomiet i endnu to punkter V og W. Der trækkes lodrette linjer gennem V og W.

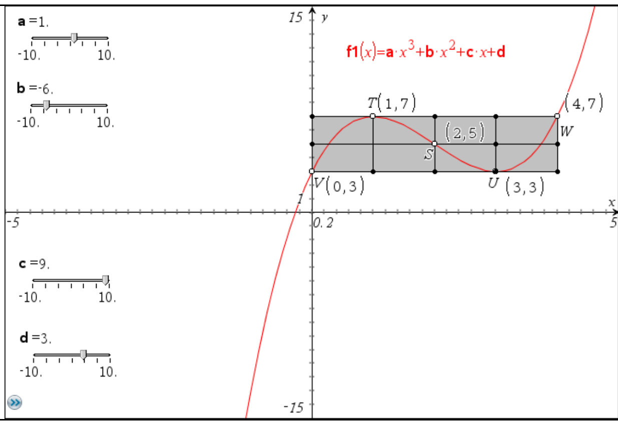
Vi har nu oprettet et gitter bestående af tre vandrette linjer gennem T/W, S og U/V og tilsvarende fem lodrette linjer gennem punkterne V, T, S, U og W.



ISBN 9788770668699

Det kan betale sig at afgrænse området med et vandret/lodret rektangel med hjørnepunkter i *V* og *W* og tilsvarende erstatte de vandrette/lodrette linjer med vandrette/lodrette linjestykker indenfor dette rektangel.

Vi ser da, at de fem lodrette linjestykker ligger ækvidistant i forhold til hinanden! Også her anvender vi blot symmetrien om punktet *S* til at indse det.



Vi opretter nu et nyt koordinatsystem med centrum i S. I dette koordinatsystem skærer grafen 2-aksen i 0, dvs. d-koefficienten må være nul. Tilsvarende krummer grafen hverken opad eller nedad i skæringspunktet med anden-aksen, dvs. b-koefficienten må være nul. Ligningen for grafen har derfor fået formen $p(x) = A \cdot x^3 + C \cdot x$. Vi er altså sluppet af med såvel andengradsleddet som konstantleddet!

Men vi kan forenkle ligningen endnu mere: Som nye enheder vælger vi en fjerdedel af den vandrette side og en fjerdedel af den lodrette side i rektanglet. De fem punkter *V*, *T*, *S*, *U* og *W* får da koordinaterne:

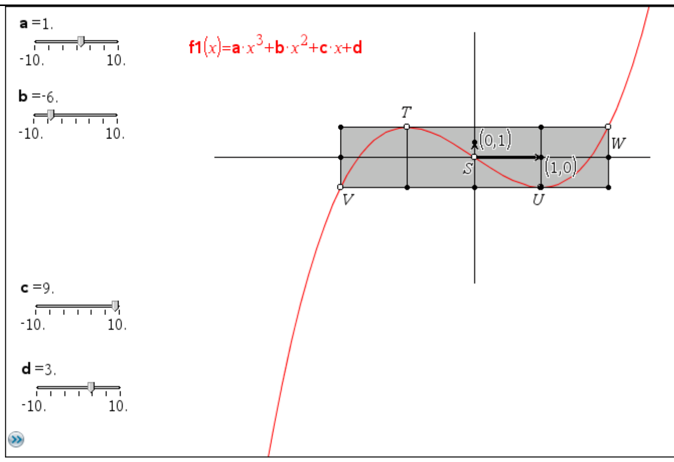
(-2,-2), (-1,2), (0,0), (1,-2) og (2,2)

i det nye koordinatsystem.

Ved at løse ligningerne:

$p(1) = -2$ og $p(2) = 2$

finder vi nu, at ligningen for tredjegradspolynomiet i det nye koordinatsystem er $p(X) = X^3 - 3X$, hvor X og Y betegner de nye variable i det nye koordinatsystem! Men det er jo netop ligningen for type



Dette kunne vi også regne os frem til. Begyndelsespunktet blev forskudt på en måde, så (x,y)=(2,5) i det gamle koordinatsystem svarer til (X,Y)=(0,0) i det nye koordinatsystem, dvs. forbindelsen mellem de to koordinatsystemer er givet ved

$x = X + 2$ og $y = Y + 5$

Øvelse 1

Indsæt disse udtryk i den oprindelige ligning for grafen

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Udregn og reducer med brug af dit værktøjsprogram, og få:

$Y = X^3 - 3X$

Øvelse 2

a) Find det karakteristiske rektangel og det nye koordinatsystem for det følgende tredjegradspolynomium:

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

b) Vis at i det nye koordinatsystem er ligningen: $Y = X^3 + 3X$

b) Bestem koordinattransformationen og kontroller, at det transformationen giver, er samme polynomium.