ISBN 9788770668699

Projekt 2.7 Parabelsyning – en vej ind i moderne computerdesign

(*Vi anvender differentialregning enkelte steder, specielt vedr. tangenthældninger. Man kan bare acceptere resultatet her, og så i en evt. repetition overveje rigtigheden i påstanden. Eller man kan vente med at gennemgå dette projekt til senere. Det foreslås under alle omstændigheder, at afsnit 3 først genoptages sent i 2. g eller i 3.g*)

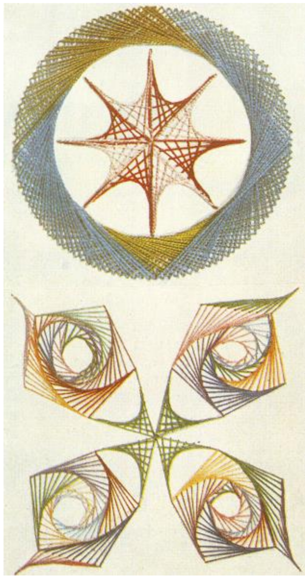
Parabelbuer anvendes i en række store konstruktioner inden for design og arkitektur. I *Hvad er matematik*? bind 1, kapitel 8 mødte vi dem i en fortælling om brokonstruktioner. I bind 3 vil vi møde dem igen i en undersøgelse af den spanske arkitekt Gaudis særegne byggestil. Her vil vi se på anvendelsen af parabelbuer i en helt anden skala, nemlig hvordan man syer parabelbuer! Kurvesyning stammer fra starten af det forrige århundrede, om end selve ideen – som det fremgår af citatet – går helt tilbage til 1840'erne. Kurvesyning frembringer parabelbuer som det man i matematik kalder for indhyldningskurver.

Interessen for kurvesyning er nok begrænset, selv om syningen kan overføres til matematikprogrammer og gennemføres på en skærm. Men det viser sig, at den geometriske metode vi her afdækker er et første skrift ind i moderne computerdesign: Det giver os et værktøj til at ”tegne med andengradspolynomier”, hvormed menes, at den kurve vi frembringer i en plan tegning, matematisk kan beskrives ved at *x*- og *y*-koordinaterne begge er andengradspolynomier af den samme parameter *t*. I næste kapitel om polynomier generelt vil vi se, at denne teknik kan generaliseres til at ”tegne med tredjegradspolynomier”, og så bliver det virkelig interessant: Det giver os de Bezierkurver, der ligger bag design af nye flytyper og bil-modeller, design af nye skrifttyper osv osv.

Vi vil her sætte os grundigt ind i matematikken der kan forklare, hvad der sker ved en *parabelsyning*, først eksperimentelt, så teoretisk.

1. Parabelsyning som et pædagogisk instrument i det engelske skolesystem.

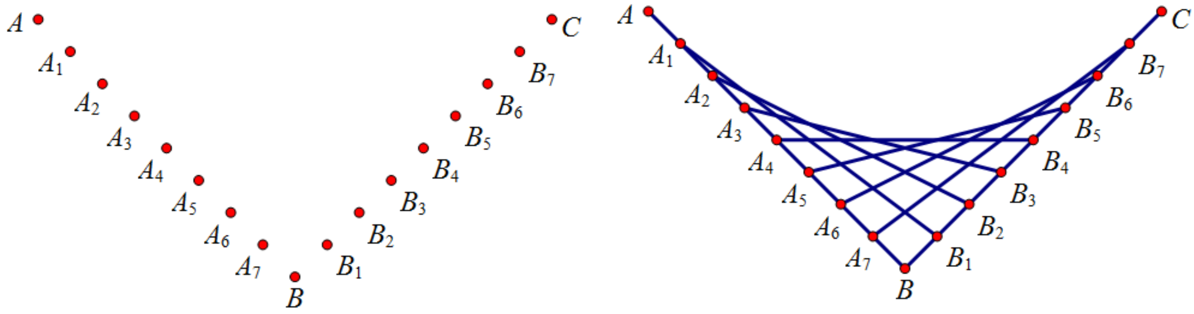
“In my young days cards of different shapes were sold in pairs, in fancy shops, for making needle-books and pin-cushions. The cards were intended to be painted on; and there was a row of holes round the edge by which twin cards were to be sewn together. As I could not paint, it got itself somehow suggested to me that I might decorate the cards by lacing silkthreads across the blank spaces by means of the holes. When I was tired of so lacing that the threads crossed in the centre and covered the whole card, it occurred to me to vary the amusement by passing the thread from each hole to one not exactly opposite to it, thus leaving a space in the middle. I can feel now the delight with which I discovered that the little blank space so left in the middle of the card was bounded by a symmetrical curve made up of a tiny bit of each of my straight silk lines."



Sådan skrev Mary Boole i 1904, 60 år efter, at hun opfandt kurvesyningen. Du kan finde bogen Mary Boole *Preparation of the child for science* ***her.*** Ideen med at inddrage denne form for kurveundersøgelser i undervisningen var ret udbredt på dette tidspunkt. Næsten samtidig udkommer in USA en bog om at indføre en rytmisk og musisk side ved matematikken – at dyrke skønheden i matematikken – Edith Somervell *A Rhythmic approach to mathematics*, som du kan finde ***her***. Denne bog har en mere udførlig beskrivelse og undersøgelse af de forskellige kurver og rummer mange illustrationer.

Lad os følge opskriften i citatet, og i stedet for at sy en parabelbue med garn på et papstykke, syr vi i et dynamisk geometriprogram. Først gør vi os lige klart, hvad der sker ved syningen: På et stykke pap afsættes tre huller svarende til punkterne *A*, *B* og *C*. Vi deler nu linjestykkerne AB og BC i otte lige store stykker med delepunkterne $A_1, A_2, \ldots, A_8$ henholdsvis $B_1, B_2, \ldots, B_8$.

ISBN 9788770668699



Derefter syr vi som følger:

> Fra A til B, hvor vi stikker igennem og kommer op igen ved B_1, og videre til A_1, hvor vi stikker igennem og kommer op igen ved A_2, og videre herfra til B_2 osv. indtil vi til allersidst kommer op ved C.

Derved frembringer vi en figur, der indhyller en ny kurve. Den indhyllede kurve er netop en parabelbue – dvs. vi har syet en parabelbue!

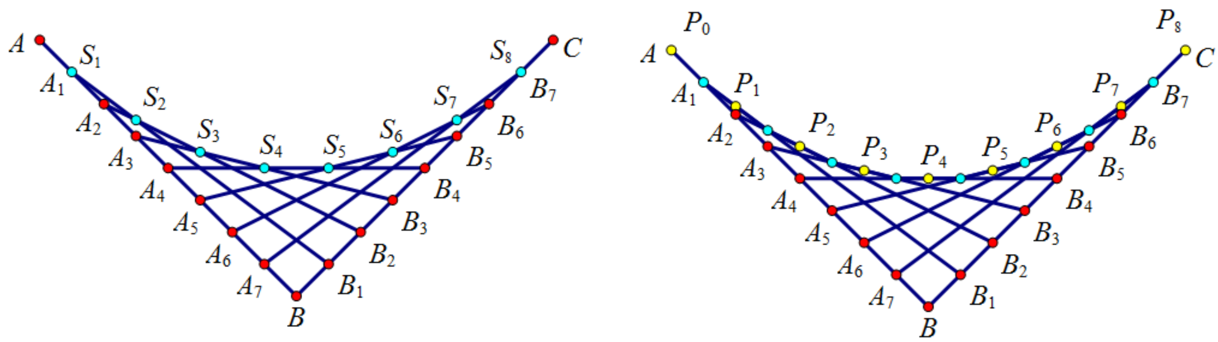
Øvelse 1:

a) Tegn to linjestykker AB og BC i et dynamisk graftegneprogram, så fx A har koordinaterne $(-8,8)$, B har koordinaterne $(0,0)$ og C har koordinaterne $(8,8)$. Inddel linjestykkerne AB og BC i otte lige store stykker og forbind dele punkterne, som beskrevet ovenfor.

b) Bestem ligningen for den parabel, der går gennem endepunkterne A og C samt midtpunktet for det midterste linjestykke A_4B_4. Hvordan ligger denne parabel i forhold til indhylningskurven?

c) Fordobl antallet af punkter og undersøg om indhylningskurven passer endnu bedre sammen med grafen.

Øvelse 2



a) Afsæt som vist på figuren skæringspunkterne mellem de yderste linjer (de blå punkter) og konstruer derefter midtpunkterne (de gule punkter) for de linjestykker (tangenter til indhylningskurven) der udspændes af skæringspunkterne.

b) Aflæs koordinaterne til punkterne P_0, P_1, …, P_8 langs syningen og udfør en kvadratisk regression på punkterne i dit it-værktøj. Hvad kan du konkludere?

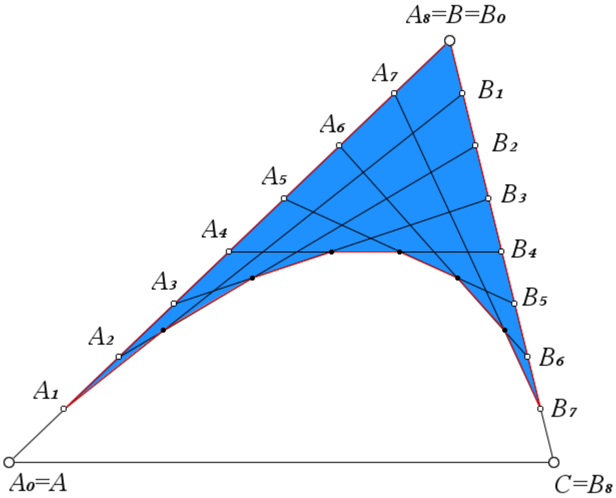
ISBN 9788770668699

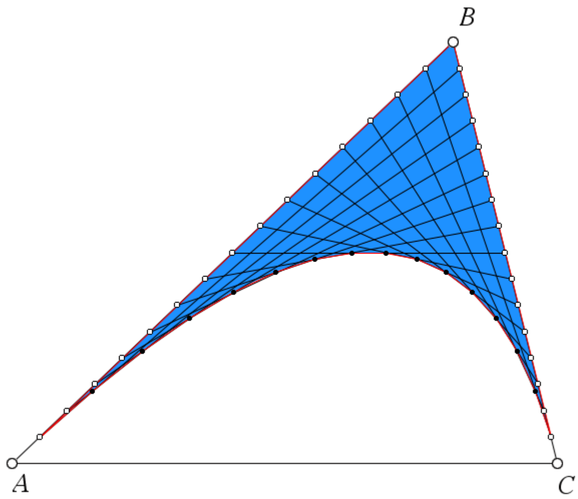
2. Kan vi bevise, at indhylningskurven er en parabel?

Vi så ovenfor, at med den specielle symmetriske figur fik vi en kurve frem, der på overbevisende måde lignede en parabel – selv om vi ikke beviste dette. Men kunne det ikke være, at resultatet afhang af valget af de tre punkter med en særlig pæn beliggenhed. Hvad hvis vi havde valgt tre tilfældige punkter?

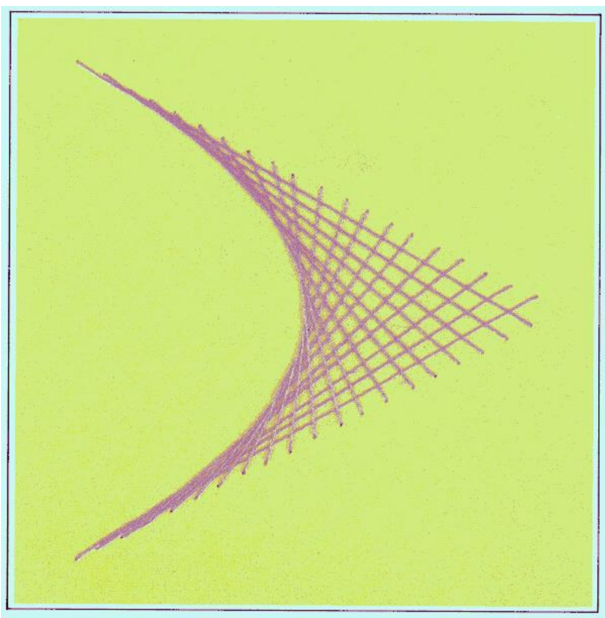
Øvelse 3: Parabelsyning i en vilkårlig trekants situation.

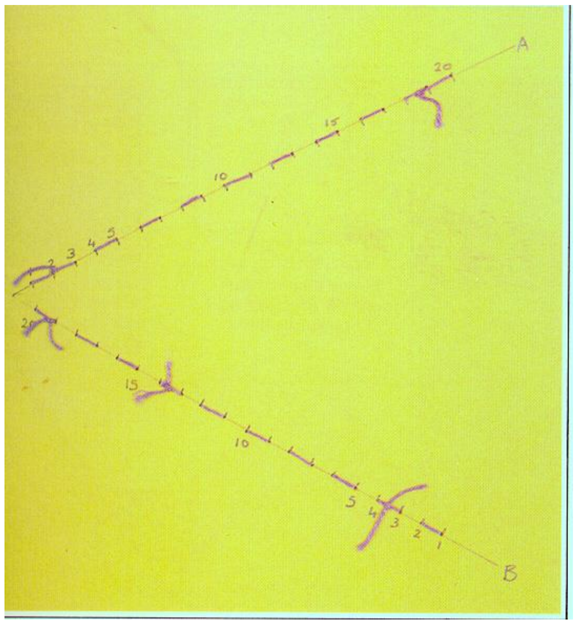
a) Konstruer en tilfældig trekant *ABC*. Del herefter de to sider *AB* og *BC* i lige mange dele, fx 8 dele. De otte delepunkter nummereres $A_0 = A$, A_1, …, A_7, $A_8 = B$, henholdsvis $B_0 = B$, B_1, …, B_7, $B_8 = C$. Derefter trækkes linjestykkerne A_1B_1, A_2B_2, …, A_8B_8. Resultatet er en figur, hvor linjestykkerne tydeligvis indhyller en fælles kurve. Jo flere punkter jo tydeligere figur.





b) Det er også nemt at *sy* den pågældende figur, idet man stikker en nål igennem delepunkterne og forbinder delepunkterne på tværs af de to linjer på forsiden af papstykket og på langs af de to linjer på bagsiden af papstykket. Det er en fornøjelig aktivitet såvel med nål og tråd som med et geometriprogram.





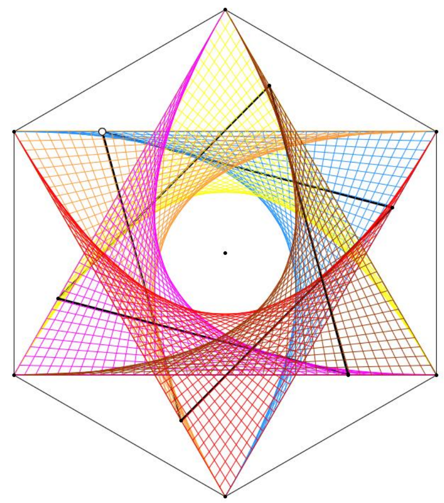
Den foregående øvelse rejser umiddelbart nogle fundamentale spørgsmål:

- Det ligner godt nok en parabelbue, men er det virkelig en parabelbue?
- Og hvilken rolle spiller siderne *AB* og *BC*? De kunne godt ligne tangenter til parablen, men er det nu virkeligt tilfældet?

ISBN 9788770668699

Hvis svaret er bekræftende har vi en simpel konstruktion til at konstruere parabelbuen, der forbinder to tangenter og dermed til at indskrive parabelbuer i trekanter (og videre herfra til at indskrive parabelbuer i vilkårlige polygoner).

Vi fortsætter vores eksperimenter med at lægge konstruktionen ind i et koordinatsystem. Vi kan da dels prøve om man kan *gætte* ligningen for den pågældende parabel ud fra tre særligt pæne punkter på parabelbuen og se om den passer. Dels kan vi prøve at finde en hel stribe punkter langs kurven og så forsøge sig med en kvadratisk regression.

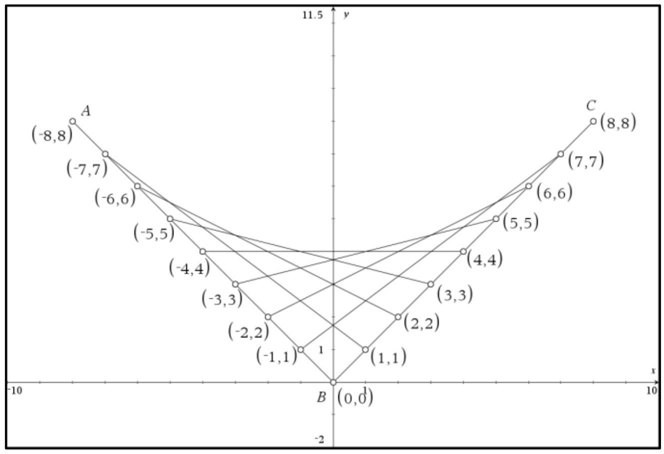


Øvelse 4:

Som udgangspunkt for et sådant gæt kan det betale sig at arbejde med en meget simpel konfiguration i et koordinatsystem. Fx kan vi lade linjestykkerne ligge fra $A(-8,8)$ til $B(0,0)$ og fra $B(0,0)$ til $C(8,8)$. Det gør det nemt at afsætte delepunkterne og det giver anledning til en kurve, der ligger symmetrisk omkring y-aksen.

a)

Af symmetrigrunde ser det ud til at parablen skærer y-aksen i 4. Find nu ligningen for den parabel, der går gennem $A(-8,8)$, $T(4,0)$ og $C(8,0)$. Hvordan passer den med indhylningskurven? Hvilke tangenter har din parabel i A, T og C?

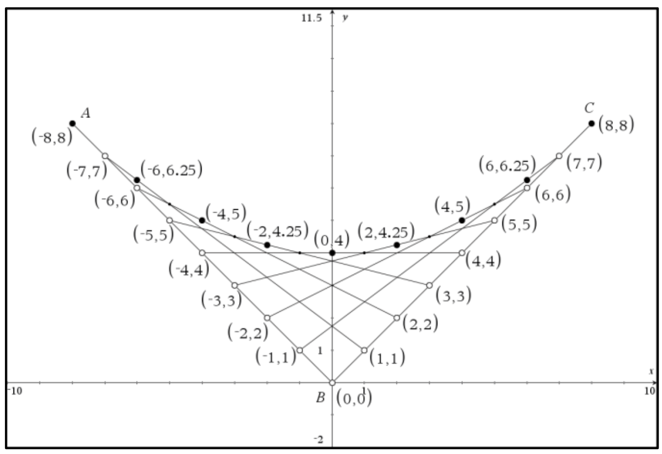


b)

For at komme tættere på parablen prøver vi nu at finde flere punkter på parablen og så se om de passer med en kvadratisk regression. Vi konstruerer derfor først de yderste skæringspunkter mellem sekanterne. Disse ligger *ikke* på parablen som sådan, da parablen tangerer inde mellem skæringspunkterne. Vi tilføjer derfor midtpunkterne mellem skæringspunkterne som vist på figuren:

c)

Prøv nu med en kvadratisk regression om du kan finde en parabel, der går gennem alle midtpunkterne. Konklusion?



ISBN 9788770668699

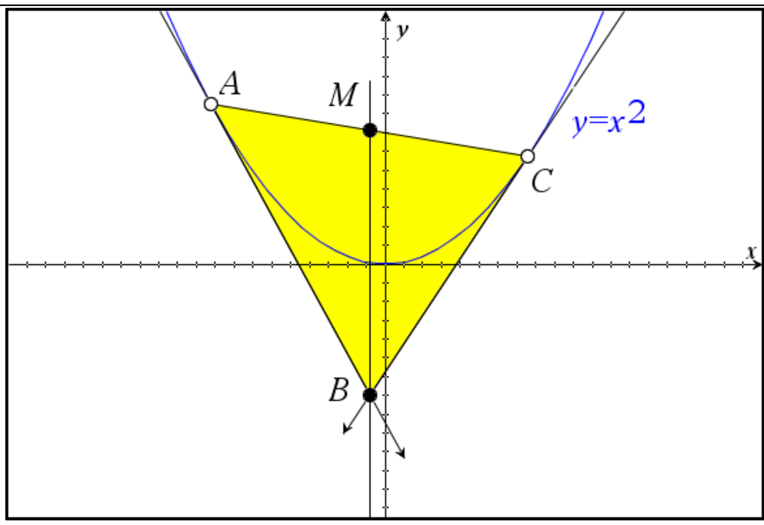
På basis af øvelsen kigger vi nu videre på sammenhængen mellem parabelbuer og tangenter. Men vi vender nu problemstillingen på hovedet så vi tager udgangspunkt i parablen i stedet for i trekanten. Da alle parabler er ligedannede, kan vi nøjes med at undersøge enhedsparablen $y=x^2$. Vi frembringer da trekanten *ABC* ud fra to parabelpunkter *A* og *C* med tilhørende tangenter, som skærer hinanden i det tredje punkt *B*.

Øvelse 4:

a) Tegn enhedsparablen $y=x^2$ og afsæt to tilfældige punkter *A* og *C* på parablen. Konstruer de tilhørende tangenter t_A og t_C samt deres tilhørende skæringspunkt *B*.

b) Hvilken sammenhæng er der mellem *x*-koordinaterne for de tre trekanthjørner *A*, *B* og *C*?

c) Konstruer den lodrette linje gennem *B*. Hvor skærer den trekantens grundlinje *AC*? Hvilken linje i trekanten er der så tale om?



Den indsigt, vi har fået i øvelse 4, vil vi nu gerne formulere generelt. Vi får her brug for en lille hjælpesætning, som er formuleret og vist i *Hvad er matematik*? 2, kapitel 5A (sætning 5):

Sætning 5: Linjens ligning med kendt punkt og hældningskoefficient
Linjen med hældningskoefficienten *a*, og som går gennem punktet (x_0, y_0), har ligningen:

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

Bevis:
Betragt to punkter på grafen for *f*: Det givne punkt (x_0, y_0) og et variabelt punkt (x, y)
Vi anvender to-punkts-formlen for *a*-tallet for lineære funktioner:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$a \cdot (x - x_0) = y - y_0 \qquad \text{Gange over}$$

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \qquad \text{Isoler } y \text{ og roker rundt}$$

hvilket er den ønskede formel.

Sætning 1: **To tangenter til en parabel**
Der er givet en parabel med to tangenter t_A og t_C, hvor *A* og *C* er røringspunkterne.
1) De to tangenter skærer hinanden i et punkt *B*. Medianen fra *B* vil da netop være parallel med parablens akse, dvs. linjen gennem *B* parallel med parablens akse skærer grundlinjen *AC* i midtpunktet *M*.
2) Midtpunktet mellem *M* og *B* ligger på parablen.

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis for 1:

Da alle parabler er ligedannede kan vi nøjes med at vise sætningen for enhedsparablen $y = x^2$. Lad punkterne *A* og *C* have koordinaterne $\left(x_A, x_A^{\,2}\right)$ og $\left(x_C, x_C^{\,2}\right)$. Tangenthældningerne i de to parabelpunkter *A* og *C* er givet ved $2x_A$ og $2x_C$. Det viser vi under differentialregning i kapitel 5A. Vi anvender nu sætning 5 fra grundbogens kapitel 5A og får, at tangentligningerne hørende til røringspunkterne *A* og *C* er givet ved:

$$y = 2x_A \cdot (x - x_A) + x_A^{\,2} = 2x_A \cdot x - x_A^{\,2}$$
$$y = 2x_C \cdot (x - x_C) + x_C^{\,2} = 2x_C \cdot x - x_C^{\,2}$$

x-koordinaten til skæringspunktet *B* mellem de to tangenter bestemmes:

$$\begin{aligned} 2x_A \cdot x - x_A^{\,2} &= 2x_C \cdot x - x_C^{\,2} \\ 2 \cdot (x_A - x_C) \cdot x &= x_A^{\,2} - x_C^{\,2} \\ 2 \cdot (x_A - x_C) \cdot x &= (x_A - x_C) \cdot (x_A + x_C) \\ 2 \cdot x &= x_A + x_C \\ x &= \frac{x_A + x_C}{2} \end{aligned}$$

Gør selv omhyggeligt rede for omskrivningen fra trin til trin!
Da midtpunktet mellem to punkter på en tallinje findes som gennemsnittet af de to værdier – fx findes midtpunktet mellem 8 og 14 som tallet: $\frac{8+14}{2} = 11$ – så er den fundne x-værdi midtpunktet mellem de to givne koordinater.
Den lodrette linje gennem *B* skærer altså linjen *AC* i et punkt *M*, hvis *x*- koordinat er midtpunktet mellem *A* og *C*'s *x*-koordinater. Men så er dette punkt *M* midtpunktet mellem *A* og *C*. Dette var den første påstand i sætning 1.

Øvelse 5:

Gør argumentet færdig og bevis ved at tegne ensvinklede trekanter, at *M* er midtpunktet mellem *A* og *C*.

Bevis for 2:

y-koordinaten til *M* findes på samme måde som: $\dfrac{x_A^{\,2} + x_C^{\,2}}{2}$.

y-koordinaten til *B* kan findes ved at indsætte $x = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ i en af tangentligningerne, fx den første:

Ligningen for tangenten gennem *A* så vi ovenfor var: $y = 2x_A \cdot x - x_A^{\,2}$.
Indsæt:

$$y = 2x_A \cdot \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right) - x_A^{\,2}$$
$$y = x_A \cdot \left(x_A + x_C\right) - x_A^{\,2}$$
$$y = x_A^{\,2} + x_A \cdot x_C - x_A^{\,2}$$
$$y = x_A \cdot x_C$$

ISBN 9788770668699

Midtpunktet mellem M og B findes som:

$$\frac{\frac{x_A^2+x_C^2}{2}+x_A\cdot x_C}{2}=$$

$$\frac{\frac{x_A^2+x_C^2}{2}+\frac{2x_A\cdot x_C}{2}}{2}=$$

$$\frac{\frac{x_A^2+x_C^2+2x_A\cdot x_C}{2}}{2}=$$

$$\frac{x_A^2+x_C^2+2x_A\cdot x_C}{2\cdot 2}=$$

$$\frac{(x_A+x_C)^2}{2^2}=\left(\frac{x_A+x_C}{2}\right)^2$$

Men det er jo lige præcis punktet på parablen over $x=\frac{x_A+x_C}{2}$.

Konklusion: Midtpunktet mellem M og B ligger på parablen.

Bemærkning:
Vi ved at tre punkter kan bestemme en parabel (fordi der indgår tre parametre i parablens ligning.
Vi har ovenfor set, at to tangenter kan bestemme en parabel, da de frembragte et tredje punkt, der også ligger på parablen.

Korollar (følgesætning) og konstruktionsmetode ifølge sætning 1.
Vi har samme situation som ovenfor med punkterne A, C og B. Kald midtpunktet mellem M og B for P_1.
Tangenten gennem P_1 er parallel med linjen AC.
Derfor vil tangenten gennem P_1 skære siden AB i et punkt, der halverer linjen AB.
Det betyder omvendt, at hvis vi halverer linjestykket AB, kalder midtpunktet for B_1 og tegner linjen fra B_1 til P_1. så er denne linje tangent til parablen.
Trekanten AP_1B_1 kan derfor anvendes i næste trin til at finde et nyt punkt på parablen, præcis som trekanten ACB blev anvendt i første trin.

Bevis for påstanden: Tangenten gennem P_1 er parallel med linjen AC.

Linjen gennem $A\left(x_A, x_A^2\right)$ og $C\left(x_C, x_C^2\right)$ har hældningskoefficienten:

$$a=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{x_C^2-x_A^2}{x_C-x_A}=\frac{(x_C+x_A)\cdot(x_C-x_A)}{x_C-x_A}=(x_C+x_A)$$

Punktet P_1 har x-koordinaten $x_{P_1}=\frac{x_A+x_C}{2}$. Tangenten i P_1 har derfor hældningen:

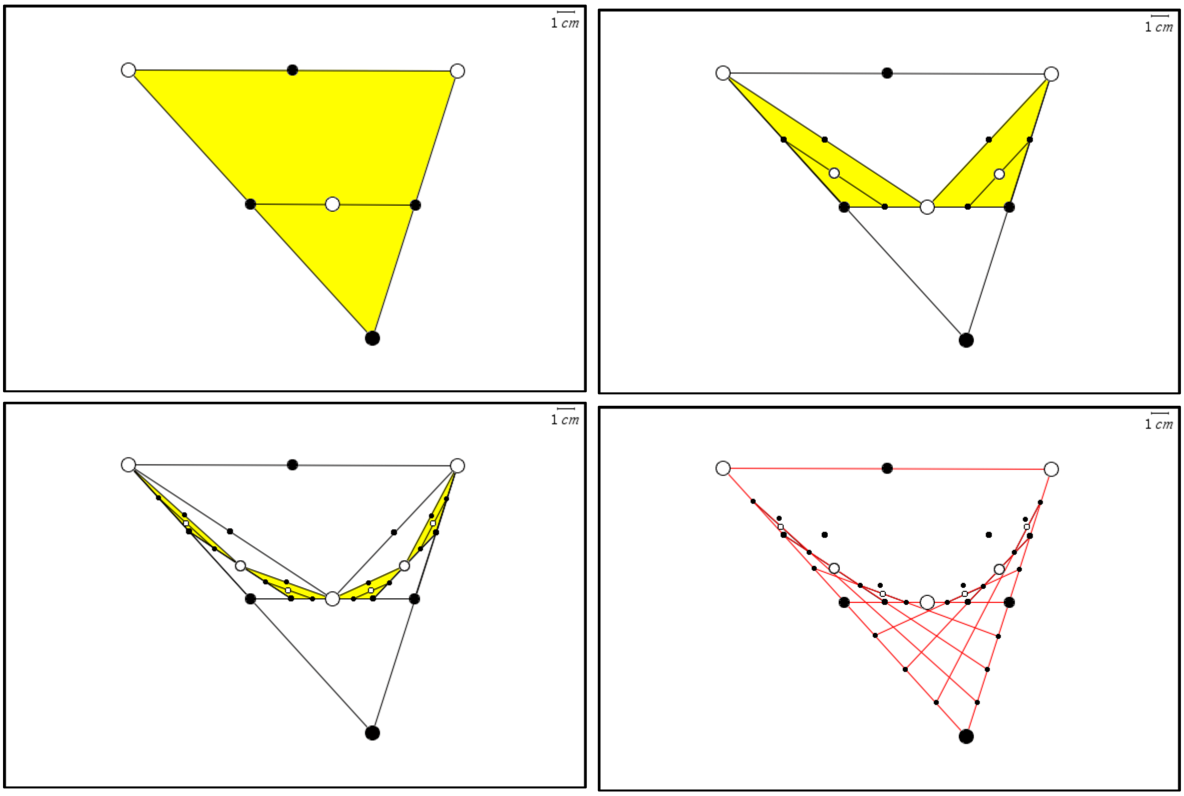
$$2\cdot x_{P_1}=2\cdot\frac{x_A+x_C}{2}=x_A+x_C$$

Altså samme hældning!

Øvelse 6
Tegn nu selv en figur af situationen og argumenter ud fra ensvinklede trekanter for, at tangenten gennem P_1 skærer siden AB i et punkt, der halverer linjen AB.

ISBN 9788770668699

Vi kan nu konstruere successive punkter på en parabel ved fortsat at 'halvere' trekanten, og derved skabe parablens omrids ved at 'trække perler på en snor'. Perlerne i figurerne nedenfor er de hvide punkter, der alle ligger på parablen. Derved genskaber vi netop de samme figurer, som vi brugte til at sy en parabel med 2, 4, 8, … delepunkter på siderne:

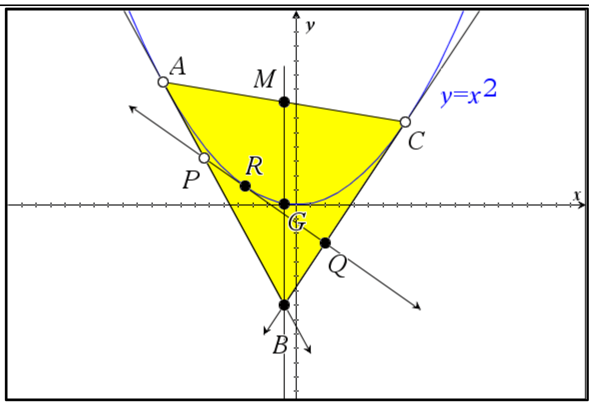


Øvelse 7:

a) Konstruere selv figurer som ovenstående

b) Marker de hvis punkter og konstruer en parabelbue gennem dem.

For at få en kontinuert glidende konstruktion af parablen som et geometrisk sted udvider vi nu konstruktionen og inddrager et tredje parabelpunkt *R* med tilhørende tangent. Når *R* glider langs parablen svarer det netop til forbindelseslinjerne i syningen af parablen.



ISBN 9788770668699

Øvelse 8

a) Tilføj et tredje parabelpunkt *R* med tilhørende tangent t_R.

b) Denne tangent skærer tangenten fra *A* i punktet *P* og tangenten fra *C* i punktet *Q*. Undersøg forholdet $\frac{AP}{AB}$ sammenholdt med forholdet $\frac{BQ}{BC}$ ved at trække i punktet *R*.

c) Konklusion? Hvorfor viser det, at tangenten fra *R* netop fungerer som forbindelseslinje mellem de to trekantsider i overensstemmelse med den måde vi syede parablen på i begyndelsen af afsnittet?

d) Tilføj nu forholdet $\frac{PR}{PQ}$. Konklusion? Hvad viser det om røringspunktet for tangenten *PQ*?

Den ovenstående øvelse udmøntes i den følgende sætning:

Sætning 6: **Tre tangenter til en parabel**
Der er givet en parabel med tre tangenter t_A, t_R og t_C, hvor *A, R* og *C* er røringspunkterne. De tre tangenter skærer hinanden i punkterne *P*, *B og Q*. Delepunkterne *P*, *R* og *Q* vil da dele de respektive tangentstykker *AB*, *PQ* og *BC* i det samme forhold $t = \frac{AP}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{BQ}{BC}$.

Bevis: Det er nok at bevise sætningen for enhedsparablen $y = x^2$, da alle parabler er ligedannede med enhedsparablen. Endvidere er det nok at vise, at forholdene mellem projektionerne af linjestykkerne på *x*-aksen er de samme, da den retvinklede projektion bevarer delingsforholdene. Fra sætningen om to tangentger til en parabel ved vi at *x*-koordinaten til skæringen mellem to tangenter netop er middelværdien af *x*-koordinaterne til røringspunkterne, dvs. der gælder:

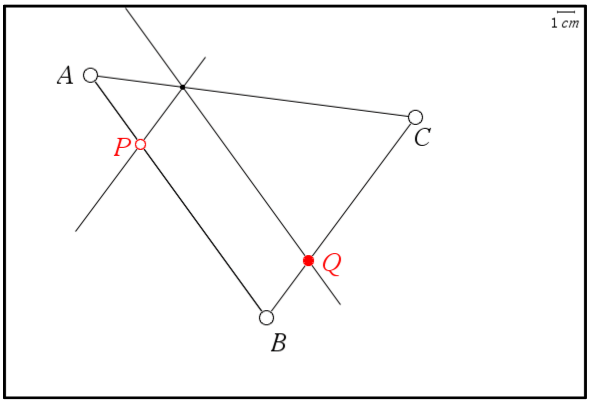
$$x_P = \frac{x_A + x_R}{2}, \quad x_B = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad x_Q = \frac{x_R + x_C}{2}$$

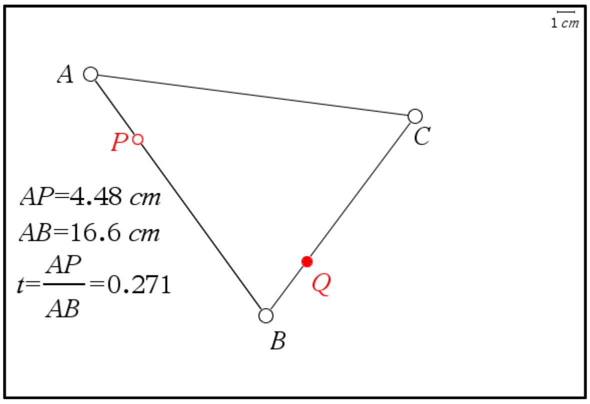
Heraf fås:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{x_A + x_R}{2} - x_A}{\frac{x_A + x_C}{2} - x_A} = \frac{\frac{x_R - x_A}{2}}{\frac{x_C - x_A}{2}} = \frac{x_R - x_A}{x_C - x_A}$$

Øvelse 9. Afslutning af beviset!

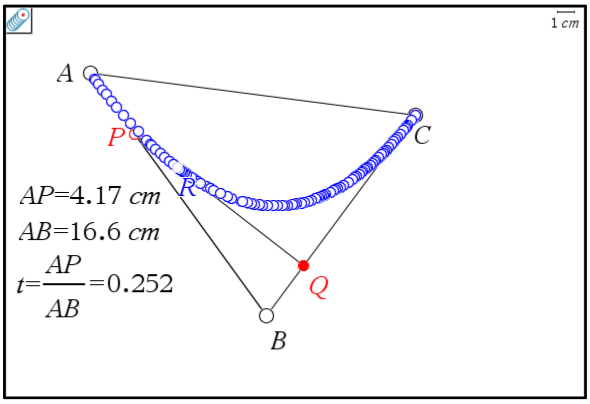
a) Vis nu selv på samme måde at der også gælder $\frac{PR}{PQ} = \frac{BQ}{BC} = \frac{x_R - x_A}{x_C - x_A}$.

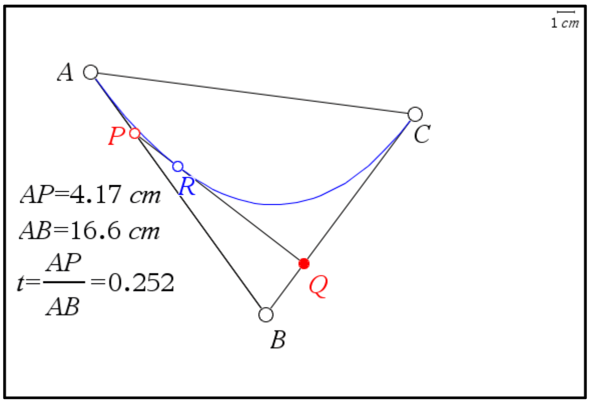




Vi er nu endeligt fremme ved konstruktionen af parabelbuen som et geometrisk sted! Udgangspunktet er trekanten *ABC*, hvor parabelbuen starter i *A* og slutter i *C*. Vi starter da med at dele siden *AB* med et delepunkt *P*. Vi skal nu finde det korresponderende delepunkt *Q* på siden *BC*. Det kan som vist på figuren gøres på snedig vis ved hjælp af paralleller, der først overfører delepunktet til siden *AC* og derefter til siden *BC*. Men det nemmeste er at bruge en multiplikation. Vi måler da sidelængderne *AP* og *AB*, hvorefter vi beregner forstørrelsesfaktoren $t = AP/AB$. Derefter finder vi *Q* ved at multiplicere punktet *C* med faktoren *t* ud fra punktet *B* (husk at angive multiplikationscentret *B* først!).

Derefter gør vi det samme med delepunktet *R* på forbindelsesstykket *PQ*. Vi kan da trække i delepunktet *P* og se at sporet for delepunktet *R* netop er parabelbuen og at forbindelsesstykket *PQ* netop glider langs parabelbuen som en tangent:



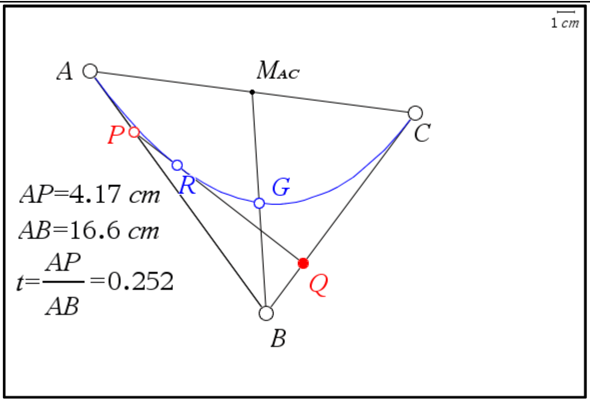


Men det simpleste er selvfølgelig som vist at konstruere parablen som et geometrisk sted frembragt af delepunktet *R* drevet af det frie punkt *P*.

ISBN 9788770668699

Øvelse 10

Prøv nu selv at gennemføre den ovenstående konstruktion. Kontroller at parablen som forventet går gennem midtpunktet for medianen fra *B*. NB! Husk at punktet *P* skal afsættes på linjestykket *AB* og ikke på trekantsiden *AB*!

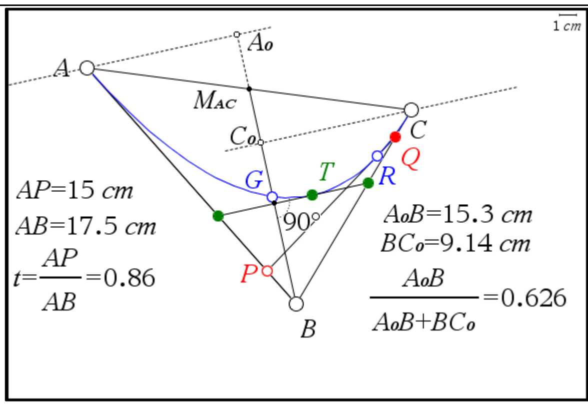


Medianen fra *B* er parallel med parablens akse. Med lidt øvelse kan man nu også konstruere parablens toppunkt, der jo er karakteriseret ved at tangenten står vinkelret på aksen. Da tangenthældningen varierer lineært langs toppunktstangenten (*x*-aksen!) kan vi forholdsvis nemt finde det punkt, hvor tangenthældningen er nul:

Øvelse 11:

a) Gør rede for at deleforholdet for parablens toppunkt er givet ved $t_{top} = \dfrac{A_0B}{A_0B + bC_0}$ hvor A_0 og C_0 er de vinkelrette projektioner af *A* og *C* på medianen fra *B*.

b) Konstruer nu parablens toppunkt.



ISBN 9788770668699

3. Parablen som parameterkurve

Hidtil har vi gennemført konstruktionen af parabelbuen rent geometrisk. Vi vil nu udnytte vores viden om vektorer, linjer og parameterfremstillinger:

Flytter vi konstruktionen ind i et koordinatsystem kan vi finde en parameterfremstilling for parablen og tegne den som en parameterkurve.

Vi udnytter, at når vi deler et linjestykke *AB* i forholdet *t* må delepunktet *P* være givet ved

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

I koordinater fås derfor

$$P - A = t \cdot (B - A)$$

$$P = A + t \cdot (B - A) = (1-t) \cdot A + t \cdot B$$

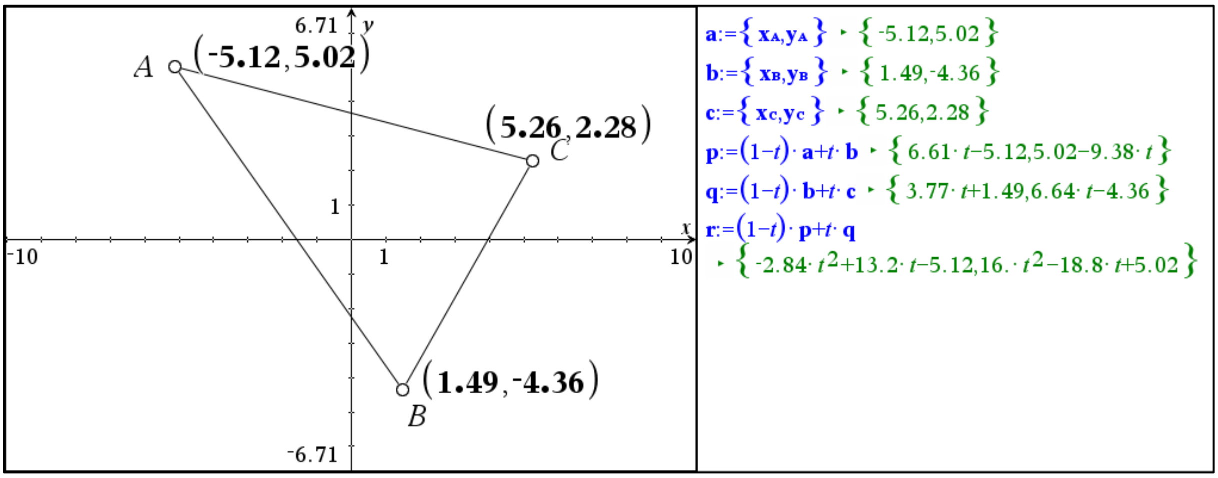
Men så kan vi nemt finde delepunkterne i trekanten *ABC*:

$$P = (1-t) \cdot A + t \cdot B$$

$$Q = (1-t) \cdot B + t \cdot C$$

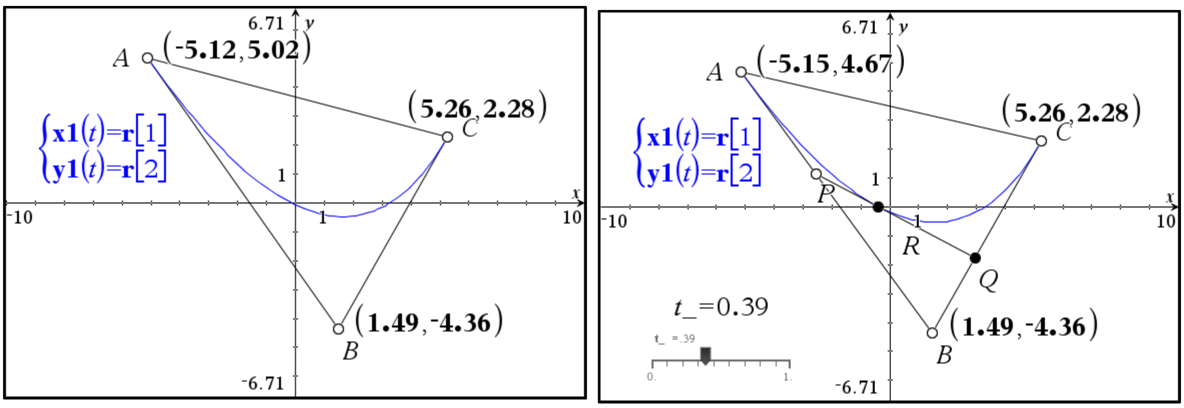
$$R = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$$

Lagrer vi koordinaterne til trekantens hjørner fås derfor:



Læg mærke til at delepunkterne P og *Q* har lineære parameterfremstillinger i overensstemmelse med at de kører langs linjestykkerne *AB* og *BC*, mens delepunktet *R* har kvadratiske parameterfremstillinger i overensstemmelse med at dette delepunkt kører langs en parabel!

Vi kan nu nemt tegne parameterkurven frembragt af *R* ud fra dens parameterfremstilling:



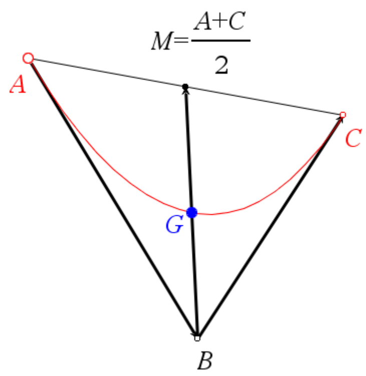
ISBN 9788770668699

Vi kan endda som vist sammenholde den med den rent geometriske konstruktion. Vi indfører da en skyder for parameteren. Skydervariablen kaldes *t*_ med understregning på for ikke at forveksle den med variablen *t*, der jo er reserveret til parameterfremstillingen! Indføres en tekstboks for *t*_ kan vi udregne tekstboksens værdi som skydervariablens værdi, så vi kan referere til den i multiplikationerne.

Øvelse 1.21:

a) Prøv nu selv først at konstruere parabelbuen som en parameterkurve og dernæst at sammenholde den med den geometriske konstruktion af parabelbuen, idet du indfører en skydervariabel for parameteren som forklaret ovenfor.

Vi kan også gennemføre udregningen af parameterfremstillingen rent symbolsk:



$$\mathbf{p}:=(1-t)\cdot a+t\cdot b \;\blacktriangleright\; (b-a)\cdot t+a$$
$$\mathbf{q}:=(1-t)\cdot b+t\cdot c \;\blacktriangleright\; (c-b)\cdot t+b$$
$$\mathbf{r}:=(1-t)\cdot \mathbf{p}+t\cdot \mathbf{q} \;\blacktriangleright\; (a-2\cdot b+c)\cdot t^2+(2\cdot b-2\cdot a)\cdot t+a$$

(*Udtrykkene er her opskrevet i Nspire, der desværre ikke kan skelne mellem store og små bogstaver, så her er a og A det samme*)

Delepunktet *R* er altså givet ved et andengradspolynomium i *t*. *Konstantleddet A* (lille a ovenfor) angiver begyndelsespunktet, det lineære led med koefficienten $2B-2A=2\cdot(B-A)=2\cdot\overrightarrow{AB}$ angiver begyndelseshastigheden, dvs. tangentvektoren i *A*, der altså peger i retning mod *B*. Endelig er der det kvadratiske led med koefficienten $A-2B+C=2\cdot(\frac{A+C}{2}-B)=2\cdot(M-B)=2\cdot\overrightarrow{BM}$. Det svarer netop til den halve acceleration, der altså er rettet langs medianen fra *B*. Accelerationen er derfor rettet langs parablens akse. Denne symbolske repræsentation gør det altså nemt at se hvordan parablen starter, men det er sværere at se hvad der sker undervejs, og hvor den slutter. Vi kan imidlertid regne videre!

Øvelse 1.22:

a) Bestem positionen til tiden *t* = ½ og *t* = 1.

b) Udregn også midtpunktet på medianen, dvs. midtpunktet mellem *M* og *B*. Konklusion?

c) Differentier stedvektoren **r** som funktion af tiden og find derved et udtryk for hastighedsvektoren **v**. Udregn specielt hastighedsvektoren til tiden *t* = ½ og *t* = 1. Konklusion?

d) Differentier hastighedsvektoren **v** som funktion af tiden og find derved et udtryk for hastighedsvektoren.

Med støtte i parameterfremstillingen kan vi nu give et nyt bevis for at parameterkurven netop må være en parabel:

Sætning 7: **Parameterkurven for et andengradspolynomium i *t* er enten en parabel eller en halvlinje**.

Hvis et punkt *P* gennemløber parameterkurven $\mathbf{a}\cdot t^2+\mathbf{b}\cdot t+\mathbf{c}$, hvor $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, så er parameterkurven

• enten en parabel, der går gennem begyndelsespunktet med stedvektoren **c**, med begyndelseshastigheden **b** og accelerationsvektoren 2**a**, der netop er parallel med parablens akse

• eller en halvlinje, med retningsvektor **a**, hvis **a** og **b** er parallelle.

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis:
Vi skifter til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen, hvor vi vælger koordinatsystemet snedigt. Da vektoren $\vec{a}$ er en egentlig vektor kan vi vælge *y*-aksen, så den ligger parallel med vektoren $\vec{a}$. I dette koordinatsystem har vektoren $\vec{a}$ derfor koordinaterne $\{0,a\}$, hvor *a* er positiv og angiver længden af vektoren $\vec{a}$. Men så er vi næsten færdige, idet vi nu ved at banekurven har parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \cdot t + c_x \\ a \cdot t^2 + b_y \cdot t + c_y \end{bmatrix}$$

Derefter forskyder vi koordinatsystemet, så Origo falder i punktet med stedvektoren $\vec{c}$, dvs. *c*-vektoren får koordinaterne $c_x = 0, c_y = 0$. Dermed forenkles parameterfremstillingen yderligere til

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \cdot t \\ a \cdot t^2 + b_y \cdot t \end{bmatrix}$$

Hvis $b_x \neq 0$, dvs. vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært uafhængige (dvs. de er *ikke* parallelle), kan vi eliminere parameteren *t* og finde ligningen for banekurven i *x*-*y*-planen. Vi finder da

$$t = \frac{x}{b_x} \quad , y = \frac{a}{{b_x}^2} \cdot x^2 + \frac{b_z}{b_x} \cdot x$$

Men det er netop ligningen for en parabel med *y*-aksen som akseretning.
Hvis derimod $b_x = 0$, dvs. vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært afhængige (dvs. de er netop parallelle) forenkles parameterfremstilingen til

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t \end{bmatrix}$$

Men det viser netop at banekurven ligger på *y*-aksen. Da andengradspolynomiet er nedadtil begrænset af toppunktet for andengradspolynomiet, bliver banekurven denne gang en halvlinje.