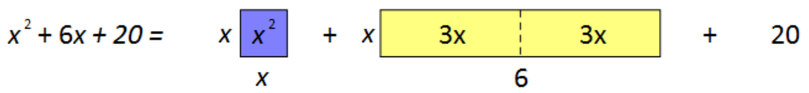
ISBN 9788770668699

Projekt 2.4 Kvadrering af toleddet størrelse – kvadratkomplettering

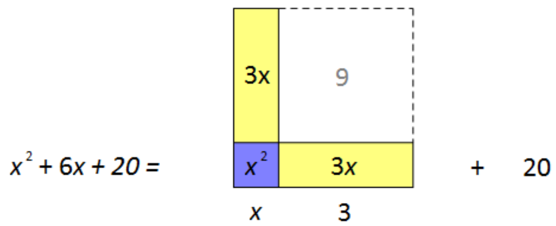
Vi har i kapitel 2 set at andengradspolynomiet $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ med toppunktet (h, k) også kan skrives på formen $p(x) = a \cdot (x-h)^2 + k$. Det kaldes en kvadratkomplettering. Oprindeligt var det en geometrisk omformning. Se fx på andengradsudtrykket:

$$x^2 + 6x + 20$$

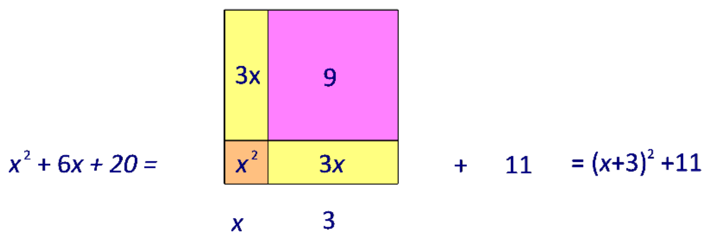
Her kan første led tolkes som arealet af et kvadrat med siden x. Tilsvarende kan andet led tolkes som arealet af et rektangel med siderne 6 og x. Endelig kan det tredje led opfattes som arealet af en uspecificeret figur.



Halveres rektanglet kan vi flytte rundt på figuren som vist:



Vi ser da, at vi kun mangler et kvadrat med siden 3 for at komplettere figuren til et stort kvadrat med siden 3. Vi låner derfor arealet 9 fra konstantleddet og har fået omformet andengradsudtrykket til en sum af et stort kvadrat og et nyt konstantled:



Den færdige omskrivning $x^2 + 6x + 20 = (x+3)^2 + 11$ viser da, at toppunktet for andengradspolynomiet netop er (-3,11).
Hvis et andengradspolynomium er skrevet som en kvadratkomplettering er det trivielt, at omskrive det til standardformen, det kræver bare, at vi bare gange parentesen ud og reducerer, fx

$$(x-4)^2 + 7 = (x-4)\cdot(x-4) + 7 = (x^2 - 4x - 4x + 16) + 7 = (x^2 - 8x + 16) + 7 = x^2 - 8x + 23$$

Det er den modsatte vej, der er svær! Værktøjsprogrammer har typisk en kommando, fx CompleteSquare, der kan gennemføre omskrivningen.
Men skal vi selv gøre det, kan vi typisk vælge mellem to strategier:

Strategi nr. 1:

Toppunktet beregnes ud fra toppunktsformlen, hvor x-koordinaten bestemmes ved: $x_{top} = -\dfrac{b}{2a}$, hvorefter y-koordinaten bestemmes ved at indsætte x-værdien i funktionsforskriften $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Til sidst sættes toppunktets koordinater i den omskrevne formel: $p(x) = a \cdot (x - x_{top})^2 + y_{top}$.

Strategi nr. 2:
Man gennemfører en detaljeret omskrivning ved at se nøje på strukturen af de enkelte led og anvende kvadratsætningerne fra C-bogen.
Denne strategi er mere abstrakt, så vi vil beskrive ved hjælp af nogle eksempler.

ISBN 9788770668699

Eksempel: Kvadratkomplettering der "går op"

$(x+4)^2$ er kvadratet på en toleddet størrelse, nemlig summen som består af de to led *x* og 4.

$(x+4)^2$ kan omskrives ved at agne parenteserne ud, som vi så ovenfor, men vi kan også anvende den første kvadratsætning:

Kvadratet på en toleddet størrelse er kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt

Gør vi set, så får vi kvadratet på *x* plus kvadratet på 4 plus to gange produktet af *x* og 4, dvs.

$$(x+4)^2 = x^2 + 4^2 + 2\cdot(x\cdot 4) = x^2 + 8\cdot x + 16$$

Kvadratsætningerne gør det lidt hurtigere at overskue udregningerne, så de kan være gode at huske!

Omvendt kan vi omskrive $x^2+8x+16$ til $(x+4)^2$, idet vi bruger kvadratsætningen omvendt, dvs. vi går fra *kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt* til *kvadratet på en to-ledede størrelse*. Typisk er det lettest, først at se på førstegradsleddet (det der indeholder x), som jo stammer fra det dobbelte produkt af det to faktorer, vi leder efter. Vi skal altså omskrive det til to gange et produkt af de to søgte faktorer, her $8x = 2\cdot 4\cdot x = 2\cdot(4\cdot x)$. Herved fremgår det, at det første led i parentesen skal være 4, og at det andet led skal være *x*.

Øvelse 1

Omskriv følgende kvadrater på to-leddede størrelser ved hjælp af kvadratsætningen ovenfor:

a) $(x+3)^2$ b) $(x+11)^2$ c) $(8+x)^2$ d) $(2x+5)^2$ e) $\left(4x+6\right)^2$

Kontroller omskrivningerne ved brug af dit værktøjsprograms indbyggede faciliteter.

Øvelse 2

Omskriv følgende kvadrater på to-leddede størrelser ved hjælp af kvadratsætningen, men denne omvendt dvs. vi går fra *kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt* til *kvadratet på en to-leddet størrelse*:

a) x^2+6x+9 b) x^2+2x+1 c) $x^2+12x+36$ d) $x^2+10x+25$ e) $64+16x+x^2$

Kontroller omskrivningerne ved brug af dit værktøjsprograms indbyggede faciliteter (*complete square*).

Eksempel. Kvadratkomplettering der "ikke går op"

Det er dog ikke alle andengradsudtryk, der kan omskrives til kvadratet på en to-leddet størrelse.

Vi vil kvadratkomplettere andengradsudtrykket $x^2+8x+20$.

Som før ser vi først på førstegradsleddet (det dobbelte produkt af det to faktorer, vi leder efter):

$$8x = 2\cdot 4\cdot x = 2\cdot(4\cdot x)$$

Herved fremgår det at det første led i parentesen skal være 4, og det andet led skal være *x*. Men som vi så ovenfor, så er $(x+4)^2 = x^2+8x+16$, så omskrivningen af det nævnte andengradsudtryk "går ikke op" – konstantleddet passer ikke! Men hvis vi lægger 4 til, så får vi, det vi søger:

$$(x+4)^2 + 4 = x^2+8x+16+4 = x^2+8x+20$$

Dvs. vi har omskrevet andengradsudtrykket til en sum af *et kvadrat på en to-leddet størrelse* og et *tal*.

Øvelse 3

Omskriv hvert andengradsudtryk til en sum af et kvadrat på en toleddet størrelse og et tal.

a) $x^2+6x+15$ b) $x^2+2x+10$ c) x^2+8x+8 d) $x^2+12x+20$ e) $50+16x+x^2$

Kontroller omskrivningerne ved brug af dit værktøjsprograms indbyggede faciliteter (*complete square*).

Øvelse 4

Omskriv hvert andengradsudtryk til en sum af et kvadrat på en toleddet størrelse og et tal.

x^2+bx+c x^2+kx+l x^2+mx+n

Kontroller omskrivningerne ved brug af dit værktøjsprograms indbyggede faciliteter (*complete square*).