ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 2.2 Faktorisering af andengradspolynomier

Sætning 1: Rødderne i et faktoriseret andengradspolynomium kan blot aflæses
Givet et andengradspolynomiet $p(x)=ax^2+bx+c$. Antag det kan skrives på formen:

$$p(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)$$

Så har $p(x)$ rødderne r_1 og r_2. Er de to tal ens, har $p(x)$ én (dobbelt-)rod

Bevis:
Argumentet bygger blot på nulreglen:

$$p(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)=0 \Leftrightarrow$$
$$a=0 \vee (x-r_1)=0 \vee (x-r_2)=0$$

Men *a* er jo ikke 0, ellers var det ikke et andengradspolynomium. Så vi har

$$(x-r_1)=0 \vee (x-r_2)=0$$

dvs $\quad x=r_1 \vee x=r_2$

altså r_1 og r_2 er rødder i polynomiet.
Læg mærke til, at de to tal godt kunne være det samme, dvs der kunne godt være tale om en dobbeltrod.

Der gælder også det omvendte: Hvis vi ved, at $p(x)$ har to rødder, nemlig r_1 og r_2, så kan $p(x)$ skrives som et produkt, $p(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)$. Dette kalder man at *faktorisere* $p(x)$.

Det kan vises ved først at vise en i sig selv nyttig sætning:

Sætning 2: Egenskaber ved rødderne i et andengradspolynomium.
Antag, at andengradspolynomiet $p(x)=x^2+b\cdot x+c$ har rødderne x_1 og x_2. Så gælder

$$x_1+x_2=-b \qquad\qquad x_1\cdot x_2=c$$

Øvelse 1: Argumenter selv for trinene i beviset for sætningen:
Lad x_1 og x_2 være rødderne i polynomiet. Rødderne kan skrives på følgende form:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2} \qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}$$

1. Vi udregner x_1+x_2:

$$x_1+x_2=$$
$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}=$$
$$\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}\right)+\left(-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}\right)}{2}=$$
$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}=$$
$$\frac{-2b}{2}=-b$$

Kontroller med dit værktøjsprogram til at udregne.

2. Vi udregner $x_1 \cdot x_2 = c$:

$$x_1 \cdot x_2 =$$
$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}}{2}\right)=$$
$$\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4\cdot c}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4\cdot c}\right)}{2\cdot 2}=$$
$$\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4\cdot c}\right)^2}{4}=$$
$$\frac{b^2-\left(b^2-4\cdot c\right)}{4}=$$
$$\frac{b^2-b^2+4\cdot c}{4}=c$$

Hermed er sætning 2 bevist.

Sætning 3: Faktorisering af andengradspolynomiet

1. Hvis andengradspolynomiet $p(x)=ax^2+bx+c$ har to rødder r_1 og r_2, så kan p faktoriseres og skrives på formen:

$$p(x)=a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)$$

2. Hvis andengradspolynomiet $p(x)=ax^2+bx+c$ har én rod r, så kaldes denne rod for en dobbeltrod og p kan skrives på formen:

$$p(x)=a\cdot(x-r)^2$$

3. Hvis andengradspolynomiet $p(x)=ax^2+bx+c$ ingen rødder har, så kan p ikke faktoriseres.

Øvelse 2: Argumenter selv for trinene i beviset for sætningen

Punkt 3 følger af sætning 1, for hvis vi kunne faktorisere, så var der rødder.

Punkt 2 følger umiddelbart af punkt 1.Så det er punkt 1 vi skal bevise

Antag $p(x)=ax^2+bx+c$ har de to rødder r_1 og r_2 (der gerne må være ens).
Betragt først polynomiet:

$$q(x)=\frac{1}{a}\cdot p(x)=\frac{1}{a}\cdot\left(ax^2+bx+c\right)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

$q(x)$ og $p(x)$ har samme rødder, da $\frac{1}{a}$ blot er et fast tal.

Så r_1 og r_2 er rødder i $q(x)$.

Ifølge sætning 2 gælder så:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

ISBN 9788770668699

Indsæt i $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 + (-r_1 - r_2)\cdot x + r_1 \cdot r_2 \\ &= x^2 - r_1 \cdot x - r_2 \cdot x + r_1 \cdot r_2 \\ &= x^2 - r_1 \cdot x - r_2 \cdot x + (-r_1)\cdot(-r_2) \\ &= (x - r_1)\cdot x - r_2 \cdot (x - r_1) \\ &= (x - r_1)\cdot(x - r_2) \end{aligned}$$

Nu har vi altså:

$$q(x) = (x - r_1)\cdot(x - r_2)$$

Men vi definerede jo: $q(x) = \frac{1}{a}\cdot p(x)$, så indsættes dette har vi:

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - r_1)\cdot(x - r_2) \Leftrightarrow \\ \frac{1}{a}\cdot p(x) &= (x - r_1)\cdot(x - r_2) \Leftrightarrow \\ p(x) &= a\cdot(x - r_1)\cdot(x - r_2) \end{aligned}$$

Og dette var netop den første påstand i sætning 3.

Eksempel: Faktorisering af andengradspolynomiet

Andengradspolynomiet $p(x) = x^2 - 6x + 8$ har rødderne $x = 2$ og $x = 4$, så derfor kan vi ved faktorisering omskrive p til et produkt af de to faktorer $(x-2)$ og $(x-4)$, så vi får:

$$p(x) = (x-2)\cdot(x-4)$$

Bemærk: De fleste værktøjsprogrammer har indbyggede værktøjer til faktorisering af polynomier.

Øvelse 3

Faktoriser andengradspolynomierne ved brug af et værktøjsprogram, og angiv derud fra andengradspolynomiets rødder:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ b) $g(x) = x^2 - 7x + 10$ c) $h(x) = x^2 - 9x - 10$ d) $p(x) = 2x^2 - 16x + 24$

Øvelse 4: Babylonsk matematik

Matematikerne i det gamle Babylon, der var en stor kultur i det nuværende Irak i perioden omkring 2000 – 1500 fvt., kunne løse andengradsligninger. De problemer, som de ønskede at løse var ofte af typen: En mark har en omkreds på 54 enheder, og et areal på 180 enheder. Bestem markens sider.

Hvad er sammenhængen mellem den teori du har lært her i projektet og denne babylonske opgave?

Løs opgaven ved at opstille andengradsligningen og løse denne med brug af formlen.

Øvelse 5: Anvendelse i kryptologi

Hent og se filmen med Peter Landrock: *Kryptologi med brug af primtal*, fra serien **10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger.** I gennemgangen af mulighederne for at bryde en given kode opstiller anvender Peter Landrock faktisk den viden du har lært her i projektet. Find stedet og forklar, hvordan Peter Landrock bruger sætningen til at argumenter for sikkerheden i RSA systemet.