ISBN 9788770668699

Projekt 2.10. Cosinusrelationerne løst som andengradsligning

Da vi i *Hvad er matematik*? bog 1 lærte om trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter beskrev vi, hvilke trekantstilfælde, der klares ved hjælp af sinusrelationerne, og hvilke der klares ved hjælp af cosinusrelationerne. Hvis vi var nødt til at bruge sinusrelationerne kunne vi risikere at gå i "sinusfælden".

Øvelse
Hvad er "sinusfælden"? Illustrer din forklaring ved at gennemgå løsningen til følgende opgave:
Vi får oplyst om trekant *ABC*, at $\angle A$ er $37°$, siden *a* er 12 og siden *b* er 10. Vi får yderligere oplyst, at $\angle B$ er stump. Vi ønsker at bestemme siden *c* og de øvrige vinkler.
a) Konstruer trekanten ud fra de opgivne mål. Hvad er din foreløbige konklusion på løsningen af opgaven?
b) Lad geometriprogrammet give svaret på spørgsmålet om de ukendte stykker.
c) Beregn $\angle B$ med brug af sinusrelationerne og beregn dernæst siden *c*. Forklar sammenhængen mellem din konstruktion og dine beregninger.
d) Hvad ville svaret på opgaven have været, hvis vi ikke havde fået at vide, at $\angle B$ er stump?

Situationen, hvor vi kender en side og en vinkel overfor hinanden samt kender endnu en side, kan også løses med brug af cosinusrelationerne. I øvelsen ovenfor bliver vi spurgt om siden *c*. Hvis vi opskriver den af cosinusrelationerne, hvor vi kan indsætte mest mulig information, får vi følgende:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$10^2 = 12^2 + c^2 - 2 \cdot 12 \cdot c \cdot \cos(37) \qquad \text{Indsæt de opgivne talværdier}$$

$$0 = c^2 - 2 \cdot 12 \cdot \cos(37) \cdot c + 12^2 - 10^2 \qquad \text{Roker rundt i ligningen}$$

$$0 = c^2 - 18{,}37 \cdot c + 44 \qquad \text{Udregn koefficienterne}$$

Dette er en andengradsligning i den ubekendte *c*.

Hvis vi vil løse den med brug af løsningsformlen finder vi først $d = 18{,}37^2 - 44 = 161{,}46$. Dvs. der er to løsninger!
Hvis vi løser den med brug af en solve-kommando kan det se således ud:

solve($c^2 - 18{,}37 \cdot c + 44$ =0,c) *c*=2,83 or c=15,54

Der er altså to løsninger til siden *c*, og dermed er der altså to forskellige trekanter, der opfylder betingelserne.
1. trekantsmulighed:
c = 2,83 giver følgende beregning af $\angle B$:

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos(B) = \frac{10^2 + 2{,}83^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 2{,}83} \qquad \text{Indsæt talværdier}$$

$$\cos(B) = -0{,}636 \qquad \text{Udregn brøken}$$

$$\angle B = 129{,}5° \qquad \text{Isoler } B$$

Endelig får vi $\angle C$:

$$\angle C = 180° - 129{,}5° - 37° = 13{,}5°$$

2. trekantsmulighed:
c = 15,54 giver følgende beregning af $\angle B$:

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos(B) = \frac{10^2 + 15{,}54^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 15{,}54} \qquad \text{Indsæt talværdier}$$

$$\cos(B) = 0{,}636 \qquad \text{Udregn brøken}$$

$$\angle B = 50{,}5° \qquad \text{Isoler } B$$

ISBN 9788770668699

Endelig får vi $\angle C$:

$$\angle C = 180^\circ - 50{,}5^\circ - 37^\circ = 92{,}5^\circ$$

Hvis vi fik oplyst at $\angle B$ er stump, så så vi bort fra tilfælde 2. I modsat tilfælde ville der være to trekanter som løsning til opgaven. Det særlige ved anvendelsen af cosinusrelationerne er, at vi er helt sikre på resultatet, her er ingen "fælde".

Øvelse

Antag vi om trekant *ABC* ved, at $\angle A$ er 37° og siden a er 12. Hvis vi kender b kan vi udføre en geometrisk konstruktion som i den tidligere øvelse. Beskriv de tre geometriske situationer, der svarer til hvert af de tre tilfælde, hvor andengradsligningen har 0, 1 eller 2 løsninger.