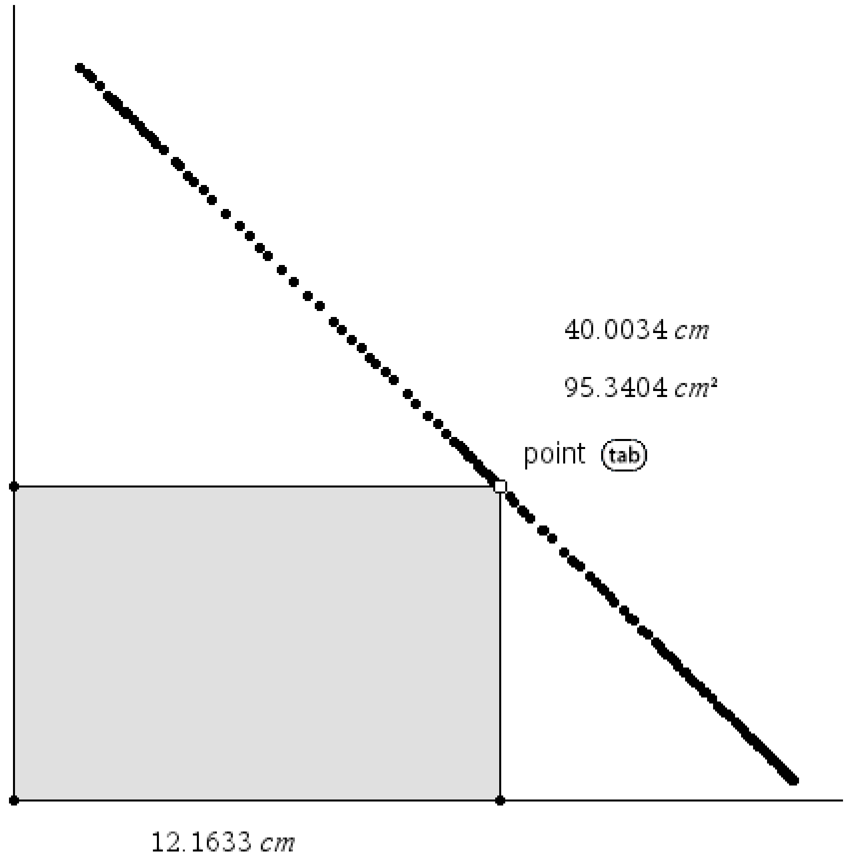
ISBN 9788770668699

Projekt 1.4 Tagrende problemet – en instruktiv øvelse i modellering med IT.

Projektet kan bl.a. anvendes til et forløb, hvor en af målsætningerne er at lære om samspillet mellem værktøjsprogrammernes geometriske og beregningsmæssige faciliteter.

Prolog

Det er velkendt at det største rektangel med en fast omkreds er et kvadrat. Man kan nemt illustrere dette i TI-Nspire ved at tegne et vilkårligt rektangel, måle omkredsen og arealet og derefter låse omkredsen så værdien ikke længere kan ændres. Trækker man i et hjørne af rektanglet kan man nu se, hvordan sporet ligger på en ret linje med hældning -1.

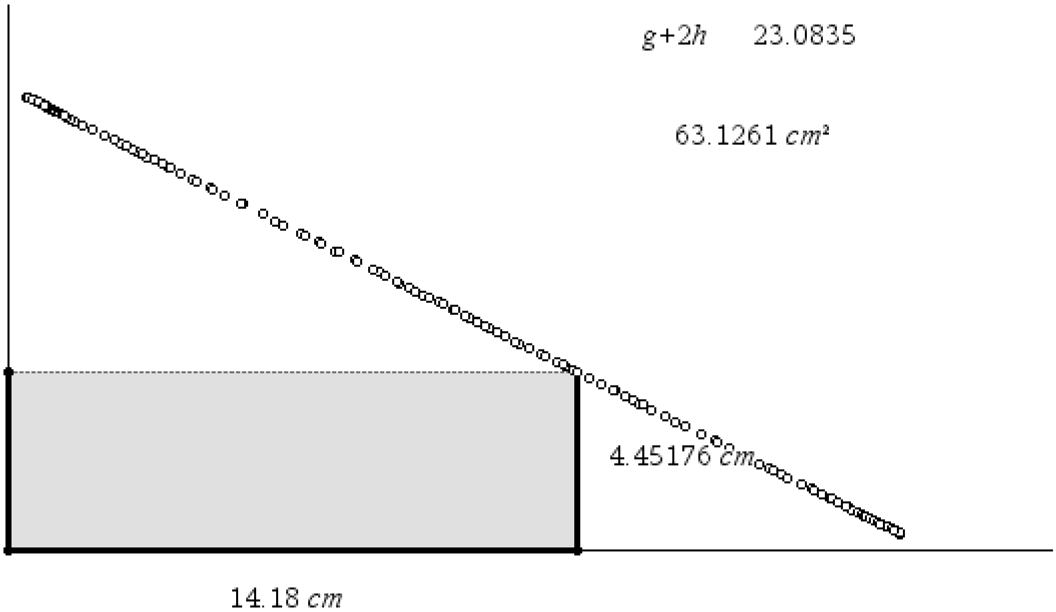


Det er ikke svært at begrunde hvor denne rette linje kommer fra og at den har to vigtige konsekvenser: Højden er en lineær funktion af grundlinjen og arealet dermed en kvadratisk funktion af grundlinjen. Da rektanglet udarter i enderne, hvor grundlinjen henholdsvis højden er nul, følger det at arealet topper midtvejs, dvs. det største rektangel er netop et kvadrat. Man kan fylde mange detaljer ud, men vi forstiller os altså her at problemet er velkendt.

Problemet kan gives en drejning ved i stedet at forestille os at vi skal bukke en rektangulær plade til en tagrende og ønsker at opnå det størst mulige tværsnitsareal. Hvis vi bukker pladen symmetrisk i hver sin side i en ret vinkel, får tværsnittet form som et rektangel. Igen konstruer vi derfor et vilkårligt rektangel til at repræsentere tværsnittet af tagrenden og måler denne gang grundlinje, højde og areal for rektanglet. Herefter kan vi udregne 'omkredsen' for tagrenden (dvs. bredden af den metalplade vi har bukket), som er givet ved
grundlinje + 2·højde

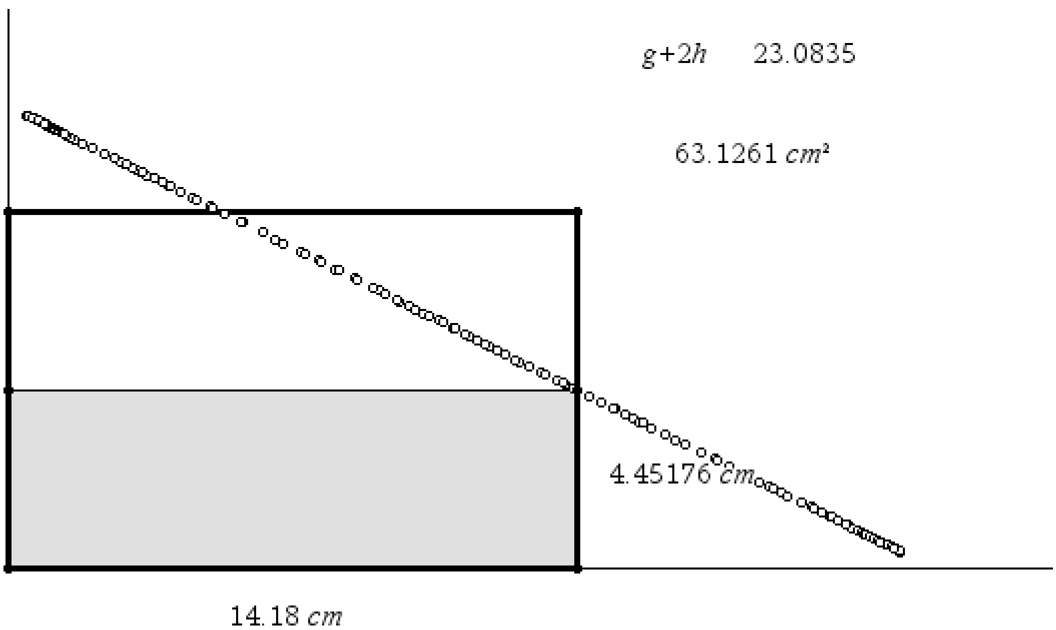
ISBN 9788770668699

Låser vi omkredsen kan vi igen trække i et hjørne af rektanglet kan man igen se hvordan sporet ligger på en ret linje, der denne gang får hældningen -½:



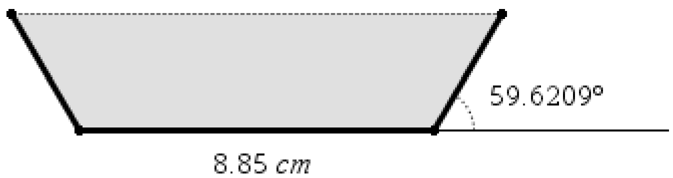
Igen er det ikke svært at begrunde den rette linje. Det har to vigtige konsekvenser: Højden er en lineær funktion af grundlinjen og arealet dermed en kvadratisk funktion af grundlinjen. Da rektanglet udarter i enderne, hvor grundlinjen henholdsvis højden er nul, følger det at arealet topper midtvejs, dvs. det maksimale rektangel fremkommer når grundlinjen er netop halvt så lang som bredden af det metalstykke, vi har bukket. Det maksimale rektangel er altså denne gang et halvt kvadrat.

Vi kan også nemt forstå, hvorfor det må blive et halvt kvadrat ved at appellere til symmetri. Hvis vi spejler rektanglet i den øverste kant fås et dobbelt så stort rektangel hvis omkreds netop er det dobbelte af bredden for det metalstykke vi har bukket. Det dobbelte rektangel har altså en fast omkreds, og dermed et maksimalt areal, når det er et kvadrat:



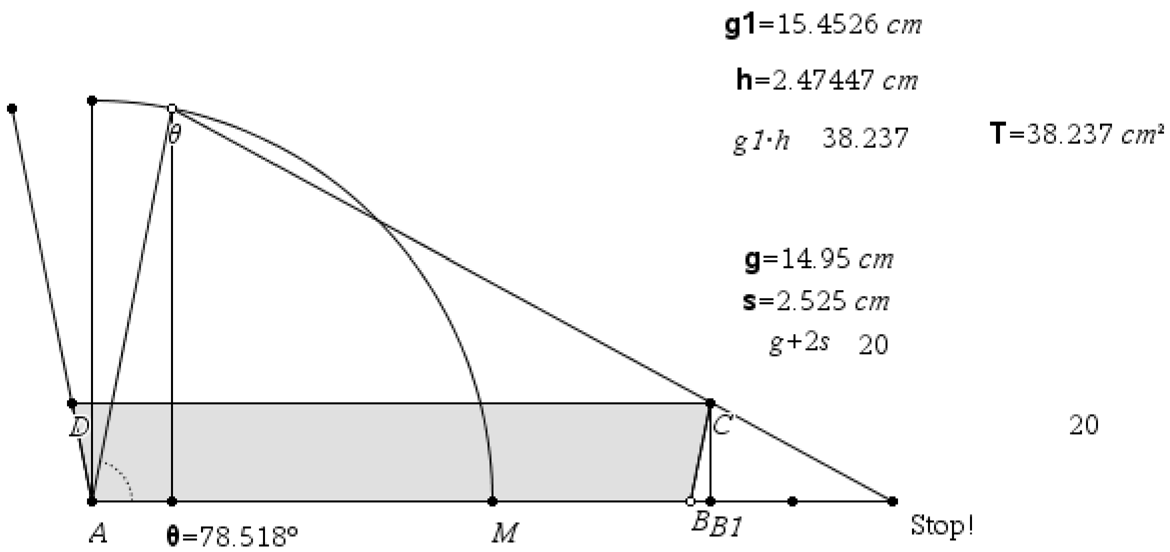
ISBN 9788770668699

Stykket: Vi folder en skrå tagrende
I det ovenstående antog vi at vi bukkede tagrenden så den fik to vinkelrette sider, men den kunne jo lige så godt bukkes så siderne vipper ud af. Denne gang får tværsnittet altså form som et ligebenet trapez.



Spørgsmålet at da: Hvordan skal man nu bukke metalstykket, så tværsnitsarealet bliver maksimalt. Dette er et eksempel på en HOT problemstilling, fordi der nu er to uafhængige variable, dels grundlinjen for trapezet, dels den vinkel vi bukker siderne i. Denne gang vil vi løse problemet i stor detalje, så vi starter med at vælge en fast bredde på fx 20 cm for det metalstykke vi vil bukke. Det betyder også at den maksimale grundlinje er 20 cm. I den anden ende har vi en grundlinje på nul. Her omdannes trapezet til to sider i en ligebenet trekant, hvor hver af siderne derfor er 10 cm.

For at konstruere en model af tagrendens tværsnit starter vi derfor med at konstruere et vandret linjestykke AS_{stop} på 20 cm og i det venstre endepunkt A konstruerer vi en cirkelbue med radius 10 cm. Grundlinjen AB kontrolleres da af et punkt på det vandrette linjestykke, mens endepunktet for det skrå linjestykke kontrolleres af et punkt θ på cirkelbuen. Længden af de skrå stykker kan fx findes ved at halvere det resterende linjestykke BS_{stop}.



Vi skal så have indført passende variable til at håndtere det ligebenede trapez ABCD. Vi kan for det første måle grundlinjen AB som vi kalder g samt den skrå side BC, som vi kalder s. Vi ved da at der gælder sammenhængen $g + 2s = 20$. Men vi kan også måle højden af trapezet, som vi kalder h og den udvidede grundlinje for trapezet AB_1, som vi kalder B_1. Pointen er da at trapezet har det samme areal som rektanglet med grundlinje AB_1 og højden h. Den udvidede grundlinje g1 kan også opfattes som gennemsnittet af den nederste og øverste grundlinje i trapezet. Trapezets areal er altså som vist givet ved $g_1 \cdot h$.

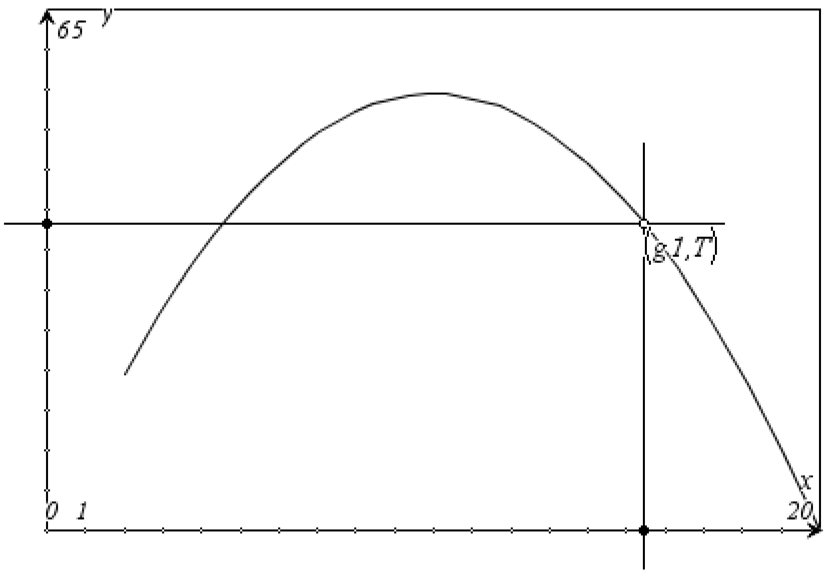
Da rektangler er nemmere at forstå end ligebenede trapezer er det smartere at bruge g_1 som den grundlæggende uafhængige variabel!

Som før kan vi spore hjørnepunktet C eller endnu bedre konstruere det geometriske sted for C (drevet af punktet B).

ISBN 9788770668699

Sporet viser sig igen at være en ret linje, hvis hældning selvfølgelig afhænger af hældningsvinklen θ. Vi skal senere vende tilbage til den præcise sammenhæng. Her noterer vi blot at vi har fundet at højden h er en lineær funktion af den udvidede grundlinje g_1. Altså er arealet $g_1 \cdot h$ en kvadratisk funktion af den udvidede grundlinje.

Vi vil nu tegne grafen for denne kvadratiske funktion ved at overføre den udvidede grundlinje g_1 til x-aksen og arealet T til y-aksen. Grafpunktet (g_1,T) kan da spores ved at trække i B eller endnu bedre konstrueres som et geometrisk sted frembragt af B.

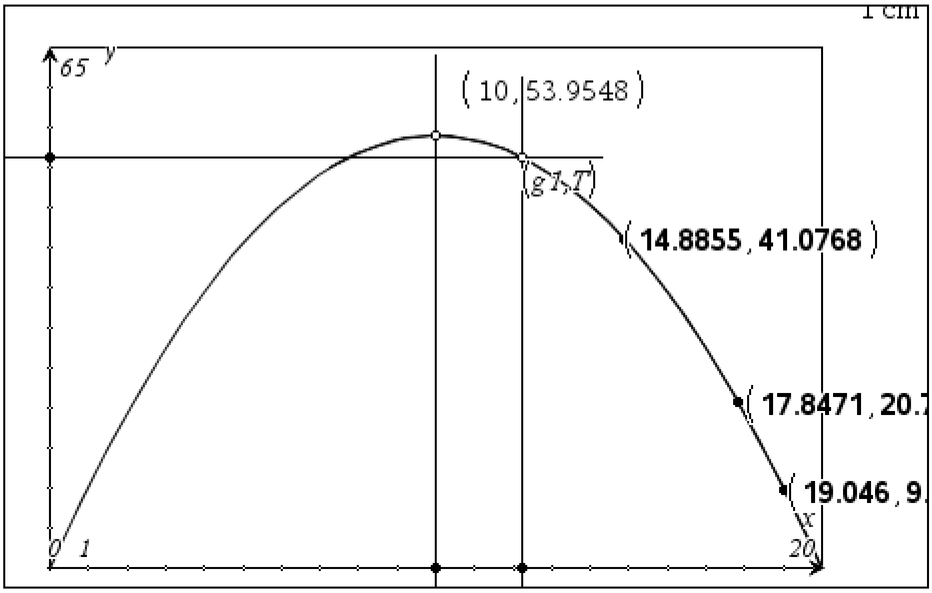


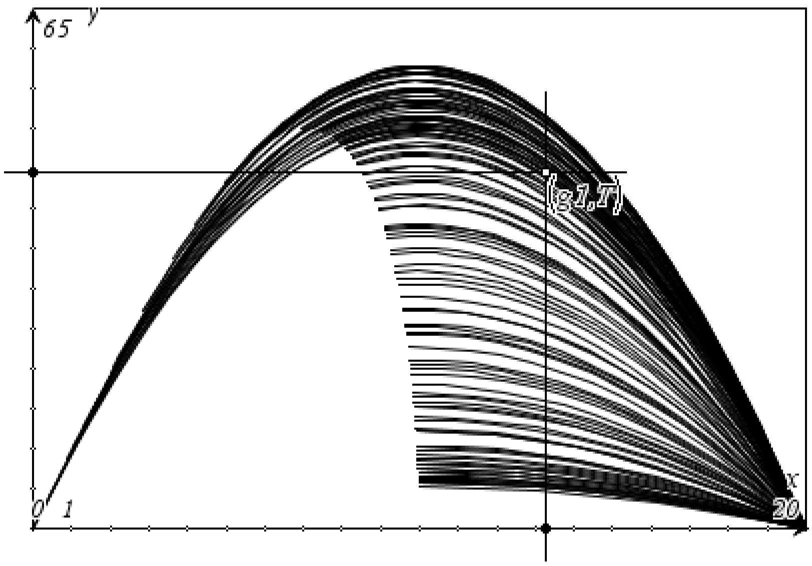
Der fremkommer tydeligvis en parabelbue. Den når ikke ned til begyndelsespunktet (0,0) fordi trapezet slutter som en ligebenet trekant, der netop hører til endepunktet for parabelbuen. Vi kan nemt visuelt bekræfte at der er tale om en parabel. Fx kan man lægge tre punkter (på den højre side af parablen!) gemme deres koordinater i variablene (**x1**, **y1**), (**x2**, **y2**) og (**x3**, **y3**) og så udføre en kvadratisk regression. Vi får da også oplyst ligningen for parablen, der tydeligvis går gennem (0,0) og (20,0).

Men den afgørende pointe er altså at det maksimale ligebenede trapez fås når den udvidede grundlinje g_1 netop er 10.

ISBN 9788770668699

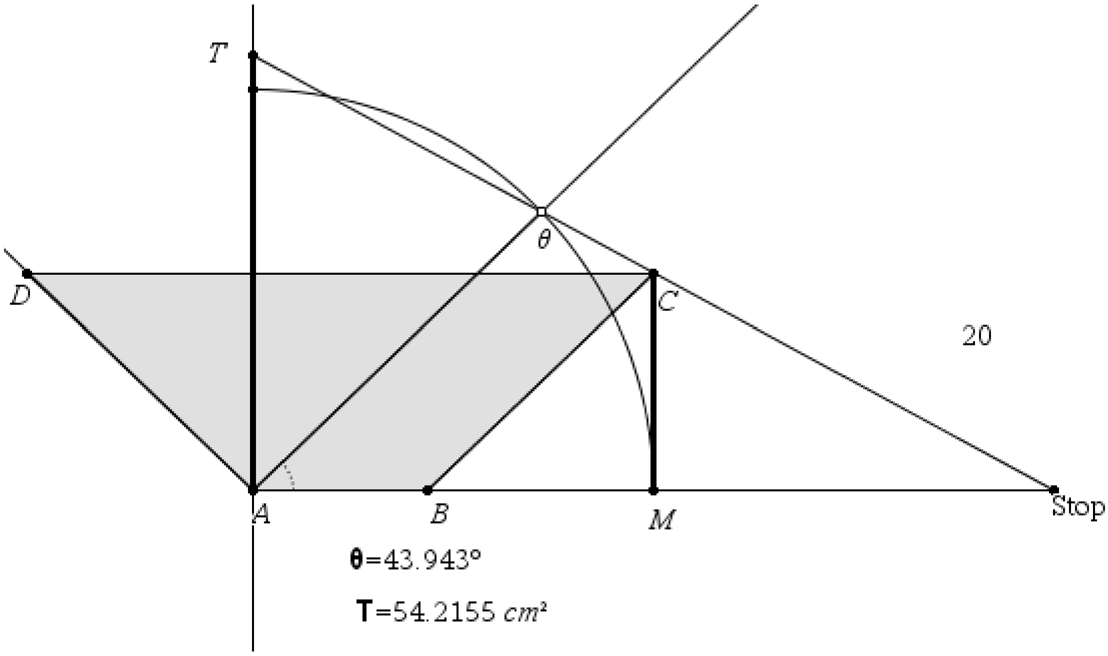
Det er nemt at få toppunktet med ind på parablen, idet *x*-værdien jo blot skal bindes til 10. Da alt er født dynamisk kan vi nu trække i vinkelpunktet θ og dermed ændre på trapezets form, hvorved parablen skifter position. Vi kan nu spore det geometriske sted for parablen og dermed frembringe en indhylningskurve for familien af parabler:



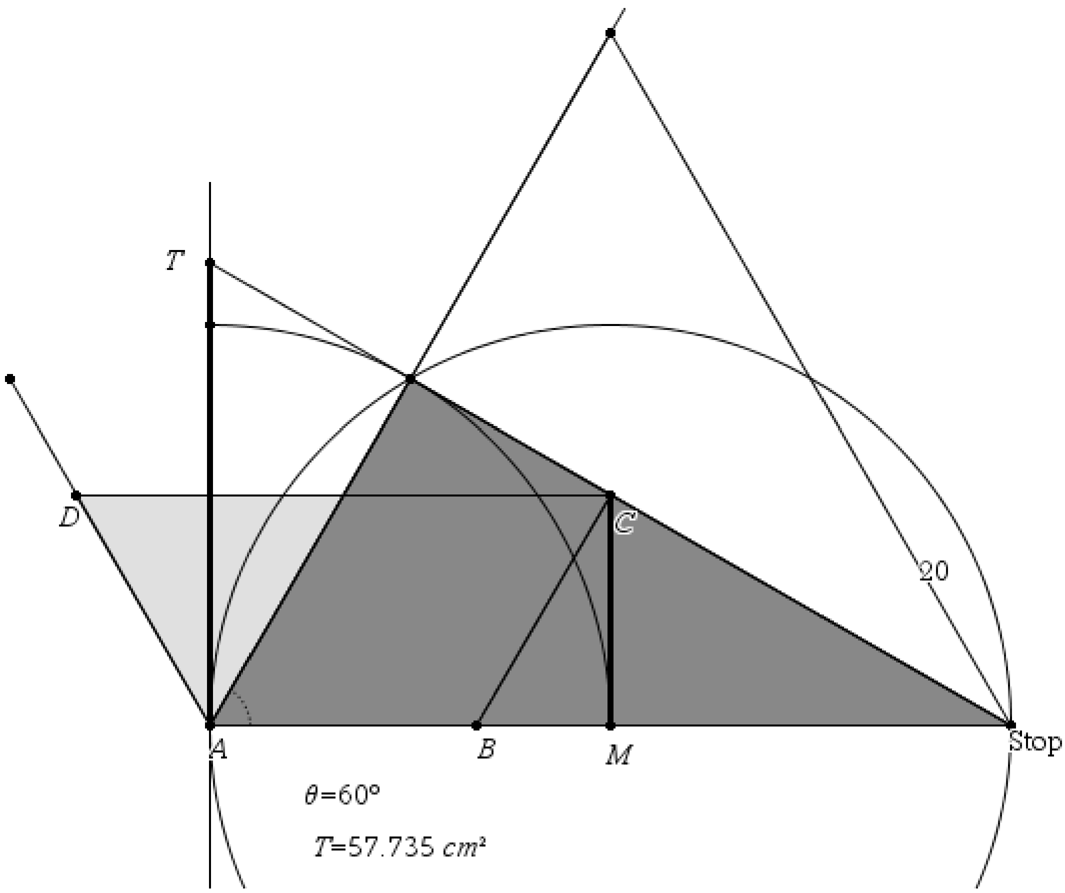


Vi kan da se at der findes et højeste toppunkt for familien af parabler og vi kan gå på jagt efter dette højeste toppunkt, som giver det søgte maksimale trapez. Men vi kan også skærpe undersøgelsen og låse den udvidede grundlinje til 10, idet vi gentager konstruktionen men nu med udgangspunkt i den udvidede grundlinje! Der er altså kun én variabel tilbage vi kan variere på nemlig hældningsvinklen θ. Det er da ikke svært at fedte sig frem til et maksimalt areal i nærheden af 60°, men vi kan finde det mere præcist ved at argumentere som følger: Trapezet har fast udvidet grundlinje, så arealet er størst mulig, når højden MC er størst mulig. Men højden MC er netop det halve af stykket AT på den lodrette akse, fordi M er midtpunktet af AS_{stop}. Vi skal altså presse skæringen T med aksen så højt i vejret som muligt.

ISBN 9788770668699



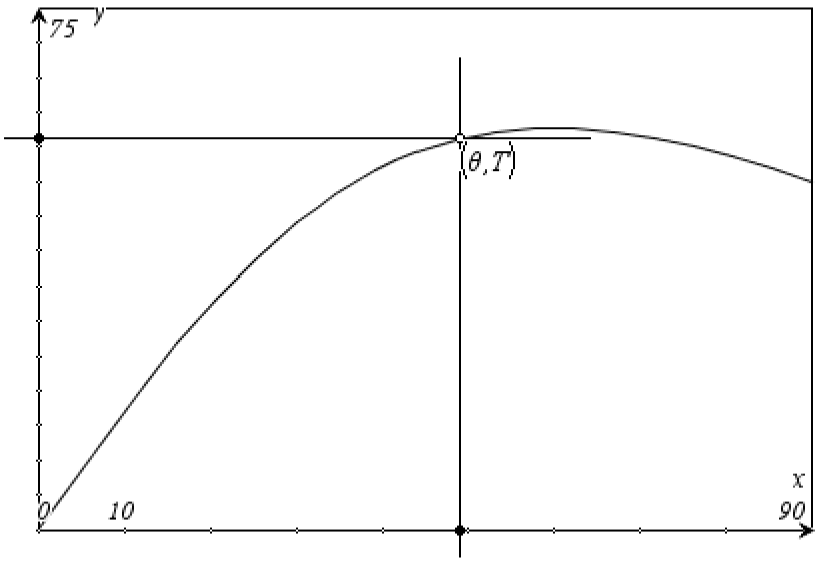
Et blik på figuren viser imidlertid at T kommer så højt op som muligt, når sporet $S_{stop}T$ er en tangent til cirkelbuen. Lige præcis i denne situation opstår der derfor en retvinklet trekant med kateten 10 og hypotenusen 20. Men så er den retvinklede trekant netop halvt så stor som den ligesidede trekant, dvs. hældningsvinklen er 60°:



Opgaven kan altså godt løses rent geometrisk.

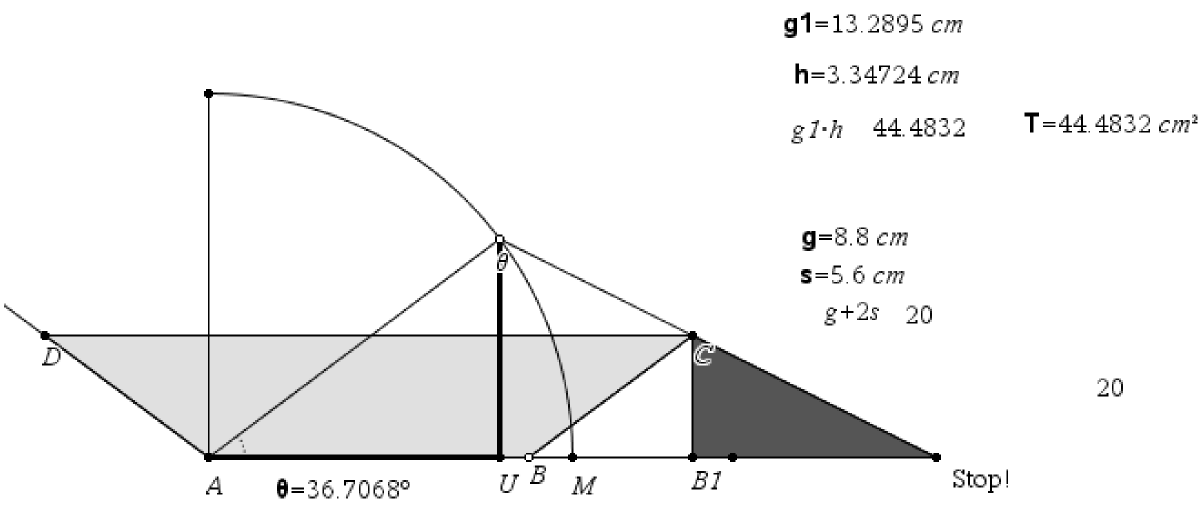
ISBN 9788770668699

Men vi vender tilbage til den foregående situation, hvor vi har de optimale trapezer konstrueret som funktion af hældningsvinklen θ. Vi kan da konstruere grafen for det optimale areal T som funktion af hældningsvinklen θ:



Umiddelbart kunne man nu tænke at det måske var grafen for et polynomium, men det viser sig ikke at være tilfældet. Hvis vi vil lege videre med problemet ud over at fedte med figurerne ved at trække i retningspunktet θ, skal vi derfor have styr på funktionsudtrykket!

Det kræver lidt trigonometri:



$$\frac{10\cdot\sin(\theta)}{20-10\cdot\cos(\theta)}=\frac{h}{20-g1} \qquad (20-g1)\cdot\frac{\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)} \quad 3.34724$$

Her ses den oprindelige konstruktion. Det vandrette stykke AU er givet ved $10\cdot\cos(\theta)$. Det lodrette stykke Uθ er tilsvarende givet ved $10\cdot\sin(\theta)$. Det lodrette stykke B_1C er netop trapezets højde h. Det vandrette stykke AB_1 er netop den udvidede grundlinje g_1.

ISBN 9788770668699

Skifter vi derfor over til de ensvinklede ligedannede trekanter med fælles toppunkt i S_{stop} fås derfor som vist:

$$\frac{10 \cdot \sin(\theta)}{20 - 10 \cdot \cos(\theta)} = \frac{h}{20 - g_1} \rightarrow h = (20 - g_1) \cdot \frac{\sin(\theta)}{2 - \cos(\theta)}$$

Det viser for det første at højden i trapezet som tidligere påstået afhænger lineært af den udvidede grundlinje. For det andet viser det, at den optimale højde (der fås ved at sætte $g_1 = 10$) er givet ved

$$h_{opt} = 10 \cdot \frac{\sin(\theta)}{2 - \cos(\theta)}$$

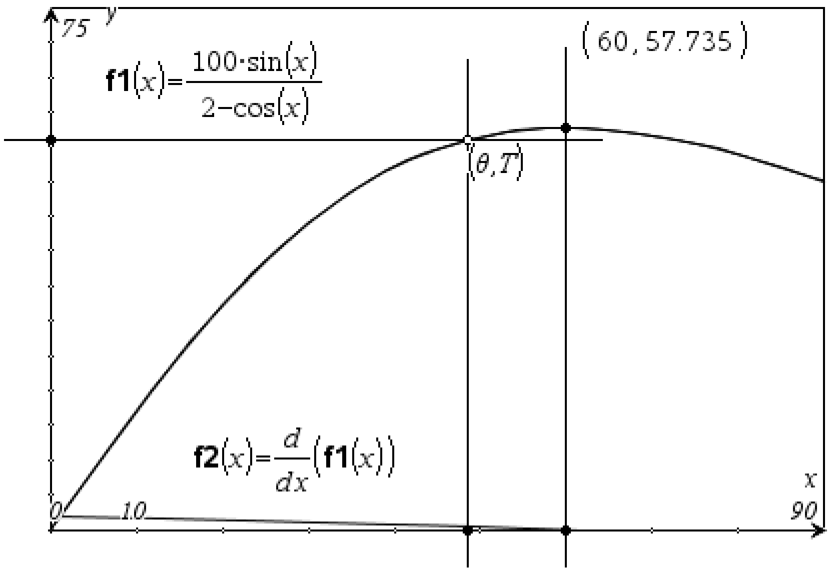
Det er ikke en standardfunktion, som man sådan lige kan genkende. Men nu hvor vi har fundet den kan vi nemt finde et funktionsudtryk for det optimale areal af trapezet hørende til en given hældningsvinkel θ:

$$T_{opt} = 100 \cdot \frac{\sin(\theta)}{2 - \cos(\theta)}$$

Men det kan vi jo checke ved at afbilde funktionen

$$f1(x) = 100 \cdot \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$$

og sammenholde den med det geometriske sted for arealet som funktion af hældningsvinklen θ:



Overensstemmelsen er perfekt. Tilføjer vi også grafen for den afledede kan vi nemt konstruere toppunktet, der som forventet har vinklen 60°.

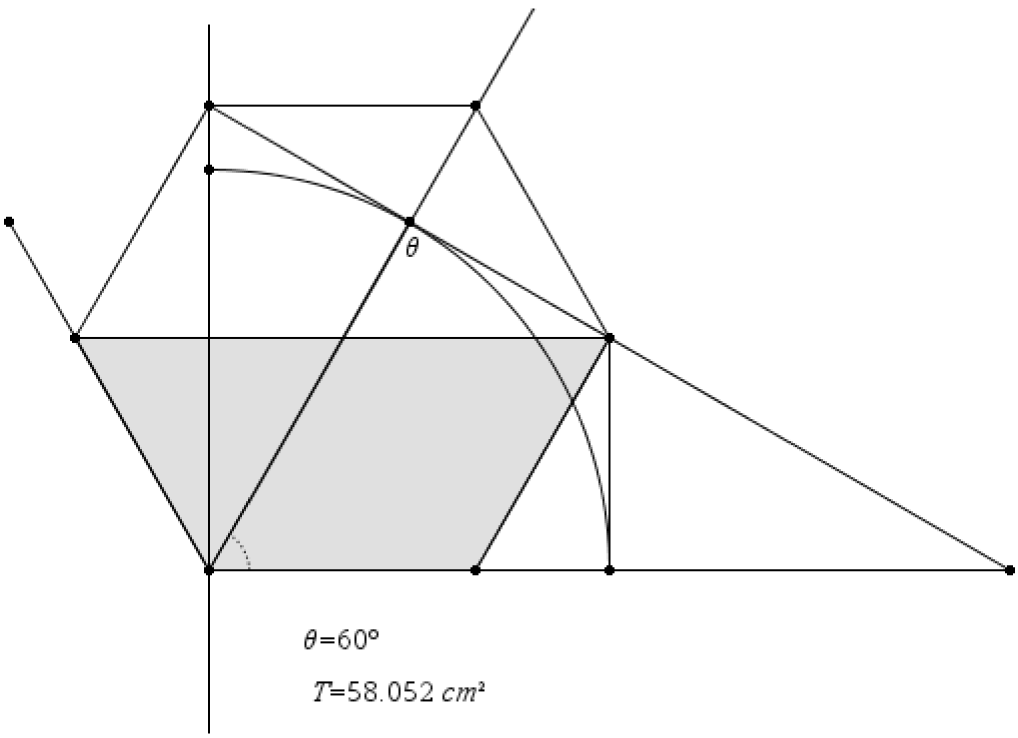
Vi kan også skifte til en symbolsk udregning, hvor vi finder toppunktet (læg mærke til at vi nu regner i radianer, hvor vi hidtil har holdt os til grader).

ISBN 9788770668699

Med brug af en god dosis stramt styret variabelkontrol (hvad man ofte må benytte i HOT sammenhænge), har vi altså løst problemet fuldstændigt nu:

$t(\theta):=\dfrac{100\cdot\sin(\theta)}{2-\cos(\theta)}$	*Done*
$\dfrac{d}{d\theta}(t(\theta))$	$\dfrac{100\cdot(2\cdot\cos(\theta)-1)}{(\cos(\theta)-2)^2}$
$\text{solve}\left(\dfrac{100\cdot(2\cdot\cos(\theta)-1)}{(\cos(\theta)-2)^2}=0,\theta\right)\Big\vert 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$	$\theta=\dfrac{\pi}{3}$
$t\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\dfrac{100\cdot\sqrt{3}}{3}$
$t\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$	57.735

Vi kan endda forstå løsningen intuitivt på samme måde som i prologen. Hvis vi spejler det ligesidede trapez i den øverste kant, fremkommer der en ret så symmetrisk sekskant med en fast omkreds på 40 cm. Den har også det dobbelte areal. Denne trekant skal vi da forsøge at maksimere ved dels at regulere på grundlinjen, dels hældningsvinklen. Den optimale sekskant viser sig ad at være den allermest symmetriske sekskant nemlig den regulære sekskant svarende til en ligesidet trapez med hældningsvinklen 60°:



Vi kan altså både forstå og diskutere løsningen på mange niveauer og set ud fra mange perspektiver.