ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 1.1 Optimeringsproblemer i geometri – eksperimenter og beviser

Introduktion
Projektet kan anvendes både på B og A-niveau. Det enkelte hold vil normalt ikke kunne nå at arbejde hele projektet igennem, men projektet er skrevet, så man kan vælge dele af det ud, eller man kan lade eleverne arbejde med forskellige dele af det.

Projektet lægger op til en eksperimenterende undervisning med brug af IT-værktøjer, og er skrevet så eleven selv får en chance for at opdage centrale ikke-trivielle sammenhænge. Kombinationen af det eksperimentelle og det teoretiske er ideel til en mundtlig eksamen.

Forudsætninger:
Hæftet er først og fremmest en perspektivering af trigonometrien, og der forudsættes derfor et elementært kendskab til trigonometri, inklusive cosinus- og sinus-relationerne og den sædvanlige arealformel for en trekant: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$.

Herudover forudsættes et elementært kendskab til funktioner, dvs. en vis fortrolighed med at opstille funktionsudtryk, tegne grafer og benytte simple grafværktøjer til at bestemme fx skæringspunkter og lokale ekstrema (maks og min).
Derimod forudsættes differentialregningen ikke bekendt. Der er dog medtaget en afsluttende afrunding af det centrale problem ud fra differentialregning, men det er udpræget A-niveau og kræver både en vis modenhed og et vist teknisk kendskab til håndtering af trigonometriske funktioner.

Da der lægges op til en eksperimenterende undervisning med støtte af IT-værktøjer, forudsættes der endeligt et elementært kendskab til dynamiske geometriprogrammer.

Hvordan opdager man matematiske sætninger?
Dette er et centralt spørgsmål i begrundelsen for den eksperimentelle matematik. Det forenklede svar er: Man regner en stribe konkrete eksempler igennem og ser om man kan finde et generelt mønster i de svar man finder. Med lidt held kan de enkelte eksempler samles i et sådant mønster – og man har fundet en sætning, der derefter kan bevises.

Her er det oplagt en klar fordel for at have gode værktøjer til rådighed. Intuitionen må man håbe på, selv om det bestemt hjælper med erfaring og en god portion tålmodighed. Se fx på følgende problemstilling:

Hvis man får oplyst de fire sidelængder for en firkant, kan man deformere firkanten på mange måder (i modsætning til trekanten er den ikke stiv, men kan trykkes sammen på forskellige ledder). Det er da naturligt at spørge om hvilken af disse firkanter med givne sidelængder, der er størst, dvs. har det største areal.

Det er rimeligt simpelt at sætte et eksperiment op med et dynamisk geometriprogram og regne nogle konkrete eksempler igennem. Derefter kan man kigge på løsningerne og se, hvilke mønstre man kan finde: Er der nogle bestemte egenskaber der karakteriserer de optimale firkanter? Det viser sig, at der er mange forskellige karakteristiske egenskaber man kan hæfte sig ved, heraf nogle ganske overraskende man i første omgang tror må bero på fejl i eksperimenterne. I projektet er der samlet en række eksperimenter, man kan benytte som udgangspunkt for selv at gå på opdagelser i firkanternes verden.

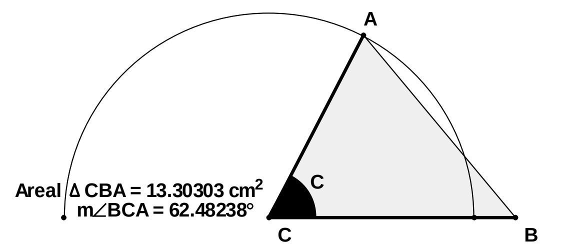
Teori
Som afrunding er der samlet en del teori om firkanter. De første to afsnit er overkommelige på B-niveau. De næste er mere udfordrende og henvender sig især til klasser på A-niveau eller til et talentarbejde.

ISBN 9788770668699

1. Optimering af trekanter

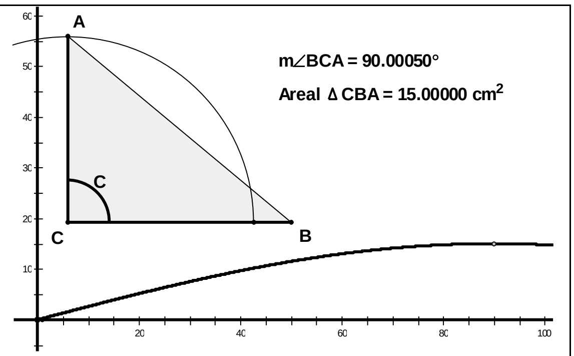
Hvis vi kender tre uafhængige stykker i en trekant, fx de tre sider eller to sider og en vinkel, er trekantens form fastlagt. De tre stykker skal dog være indbyrdes uafhængige. Fx er de tre vinkler ikke uafhængige, da vinkelsummen i enhver trekant er 180°.

Hvis vi derimod kun kender to stykker i en trekant, fx to af siderne *a* og *b*, har vi en frihed til at deformere trekanten og kan derfor konstruere en hel familie af trekanter med de opgivne mål. Fx kan vi opfatte vinklen *C* mellem de to sider *a* og *b* som en *uafhængig variabel*, der kan varieres frit:



Hvordan skal vi nu vælge den uafhængige variabel, dvs. vinklen *C*, så trekanten bliver størst mulig? I dette tilfælde er svaret ikke særligt overraskende, men for at illustrere principperne vil vi kort se på hvordan vi kan eksperimentere os frem til svaret.

Luk op for dit geometriprogram og giv siderne *a* og *b* konkrete værdier fx 6 cm og 5 cm. Start med at konstruere et vandret linjestykke *CB* med længden *a* = 6 cm og en cirkel med centrum i *C* og radius 5 cm. Det sidste trekanthjørne *A* ligger da et eller andet sted på cirklen. Vi kan endda gerne antage, at det ligger et sted på den øvre halvcirkel, så vinklen *C* kan variere mellem 0° og 180°. Mål nu såvel vinklen *C* som arealet af trekanten *ABC*. Trækker du i trekanthjørnet *A* og prøver dig frem, ser det ud som om trekanten er maksimal, når den er retvinklet, og at det største areal er 15:

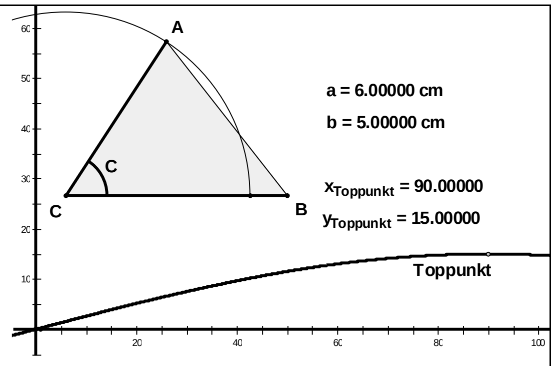


Vi kan bakke det op med en mere præcis grafanalyse på følgende måde: Ved at udpege såvel den uafhængige vinkel *C* som det afhængige areal *T*, kan vi afsætte punktet (*C*,*T*) i et koordinatsystem. Trækker vi i punktet *A* vil grafpunktet da gennemløbe grafen for den funktion, der beskriver arealet *T* som en funktion af vinklen *C*. Som forventet er grafen symmetrisk omkring *C* = 90° med et maksimum tæt på 90°, der netop fører til det største areal.
Vi kan styrke denne konklusion endnu mere ved at opstille et konkret funktionsudtryk for arealfunktionen. Vi tager udgangspunkt i den velkendte formel for trekantens areal: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$.
Vi bør derfor indskrive funktionen: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(x)$

Bemærk, at i visse geometriprogrammer er det kun muligt at håndtere sinus-funktionen korrekt, hvis vi regner argumentet for sinus i radianer. I sådanne programmer må vi først omsætte vinklen til radianer: $x \to x \cdot \pi / 180$, og derefter indskrive arealfunktionen således:

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{180}\right)$$

Maksimum findes i punktet (90,15), dvs. den optimale trekant *er* retvinklet med et areal på 15.



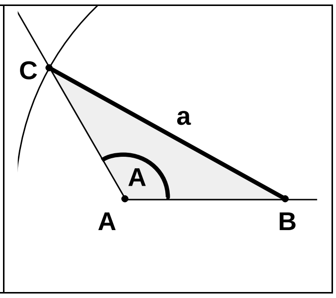
ISBN 9788770668699

Til sidst vil vi prøve om vi kan give en simpel forklaring på det fundne maksimum. Det kan ske ved at se på den maksimale værdi for sinus-funktionen. Men vi kan også argumentere geometrisk: Trekantens areal er $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$, og da grundlinjen *g* holdes fast, skal vi forsøge at gøre højden *h* så stor som mulig. Det sker tydeligvis, når vinklen *C* er 90°.

Prøv nu selv kræfter med følgende øvelser!

Øvelse 1

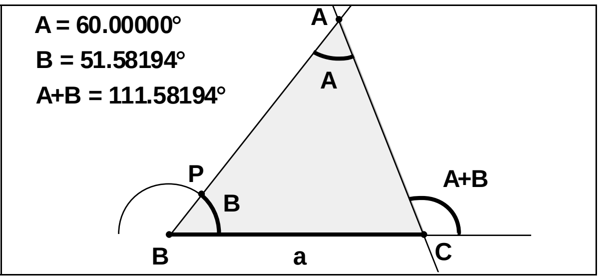
Antag at vi har en fast vinkel og den modstående side, fx *a* og *A*.
Afsæt først vinklen *A* og vælg et frit punkt *B* på det ene vinkelben.
Afsæt dernæst linjestykket *a*. Mål på trekantens vinkler og sider samt arealet.
Varier nu det frie punkt *B*. Hvornår er arealet størst? Hvad er der specielt ved netop denne trekant? Hvorfor?
Beskriv sporet for den afhængige linje *a*. Konstruer sporet af *a* som et geometrisk sted, når det uafhængige punkt *B* varieres.



Øvelse 2

Igen har vi en fast vinkel og den modstående side, fx *a* og *A*. Denne gang afsættes linjestykket *a* som grundlinje. Vælg en fri vinkel i *B* (fx ud fra en cirkel med centrum i *B* og et frit punkt *P* på denne cirkel). Beregn størrelsen af vinkel *C* og konstruer trekanten. Mål trekantens vinkler og sider samt arealet.

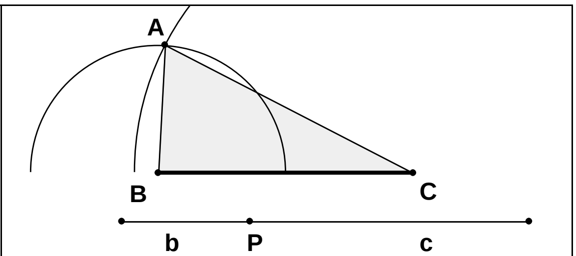
Variér nu på den frie vinkel *B* (dvs. punktet *P*).
Hvornår er arealet størst? Hvad er der specielt ved netop denne trekant? Hvorfor?
Beskriv sporet for det afhængige hjørne *A*.
Konstruér sporet af *A* som et geometrisk sted, når den uafhængige vinkel *B* (dvs. punktet *P*) varieres. Hvad er det for et geometrisk sted?



Øvelse 3

Denne gang er der givet en fast side *a*, samt summen *l* af de to øvrige sider i trekanten, dvs. *l* = *b* + *c*. Man kan fx tænke på den faste side som en mur og de to øvrige sider som et stykke hegn med længden *l*. Afsæt den faste side *a* = *BC*. Afsæt også et linjestykke svarende til længden af hegnet. Afsæt dernæst et frit punkt *P* på dette linjestykke, svarende til opdelingen af hegnet i de to sider *b* og *c*. Konstruer nu trekanten med disse tre sider og udmål længden af trekantens sider og vinkler samt dens areal.

Variér nu på det frie punkt *P*. Hvornår er arealet størst? Hvad er der specielt ved netop denne trekant? Hvorfor?
Beskriv sporet for det afhængige hjørne *A*.
Konstruér sporet af *A* som et geometrisk sted, når det uafhængige punkt *B* varieres. Hvad er det for et geometrisk sted?



ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Teoretisk afrunding
Når man først er blevet fortrolig med enkeltvariabel problemet kan man gå over til at kigge på to-variabel problemer: Her får man altså kun ét stykke oplyst og har to uafhængige stykker tilbage, man kan variere. Det kræver *variabelkontrol*, dvs. at man nøjes med at variere en enkelt variabel ad gangen.

Som et klassisk eksempel kan vi se på en trekant hvor omkredsen $p = a + b + c$ er givet. Hvordan skal man vælge trekanten, så arealet bliver størst muligt?

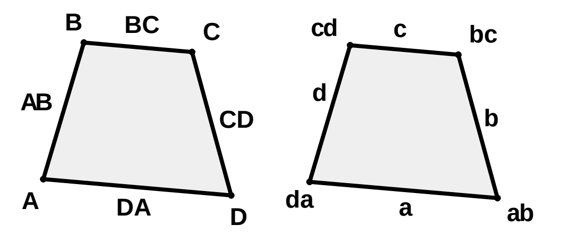
Her kan vi fx starte med at vælge a som en uafhængig variabel, vi holder fast. For en given værdi af a holder vi altså $b + c$ fast. Men så har vi lige set, at den største trekant er den ligebenede trekant. Hvis nu vi tænker os, vi har fundet den optimale trekant må dette gælde uanset hvilken af de tre sider vi holder fast. Dvs. alle tre par sider skal være lige lange og dermed skal trekanten være *ligesidet*.

Men kan godt problematisere om der virkelig findes en optimal trekant, se fx Vagn Lundsgård Hansens tankevækkende bog om Didos problem (*Temaer fra Geometrien*, *Matematiklærerforeningen, 1992*). Her vil vi anbefale en øvelse med mulighed for et bevis:

Øvelse 4: Opstil funktionsudtrykket for arealet af en ligebenet trekant, hvor grundlinjen kan varieres frit, mens omkredsen holdes fast. Bestem herved det optimale areal. Hvis du kan, er det fint også at gennemføre udregningen ved hjælp af differentialregning.

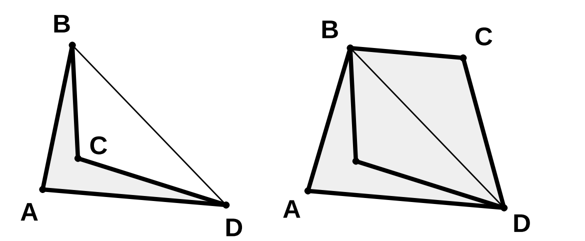
2. Optimering af firkanter

En firkant har fire sider, der opskrives i rækkefølge *a*, *b*, *c* og *d*. Tilsvarende har den fire hjørner *A*, *B*, *C* og *D*. I modsætning til trekanter er der ikke en bestemt måde at knytte hjørner og sider sammen. Går vi ud fra de fire hjørner, betegner vi siderne med *AB*, *BC*, *CD* og *DA*. Går vi ud fra siderne betegner vi hjørnerne (vinklerne) med *ab*, *bc*, *cd* og *da*, se figuren.



I en firkant er vinkelsummen 360°. Med mindre firkanten er et rektangel er mindst én af vinklerne derfor stump.

Ydermere er der plads til en enkelt vinkel over 180°. I så fald falder den tilsvarende diagonal udenfor firkanten – firkanten er *konkav*. Ved at spejle de 'uheldige sider' i diagonalen kan man omdanne en konkav firkant til en *konveks* firkant med *samme sidelængder*. Konkave firkanter er derfor ikke interessante i optimeringsproblemer.



Den næste overraskelse handler om antallet af uafhængige stykker i en firkant. Da en (konveks) firkant består af to trekanter med en fælles diagonal er den fastlagt ved *fem* stykker. Hvis man kun får oplyst de fire sidelængder er den leddeløs og kan deformeres ved fx at trykke den ene diagonal sammen. Vi kan nu spørge efter den optimale (konvekse) firkant med fire opgivne sider. Inden vi kaster os over det generelle problem vil vi se på nogle specielle firkanter.

ISBN 9788770668699

Øvelse 1: *a-a-a-a*. Når alle fire sider er lige lange kaldes firkanten en *rombe*. Hvilken rombe er den største? Hvad skal der gælde om vinklerne? Hvad bliver størrelsen af det maksimale areal?

Øvelse 2: *a-b-a-b*. Hvis modstående sider er lige store kaldes firkanten et *parallelogram*. Hvilket parallelogram er det største? Hvad skal der gælde om vinklerne? Hvad bliver størrelsen af det maksimale areal?

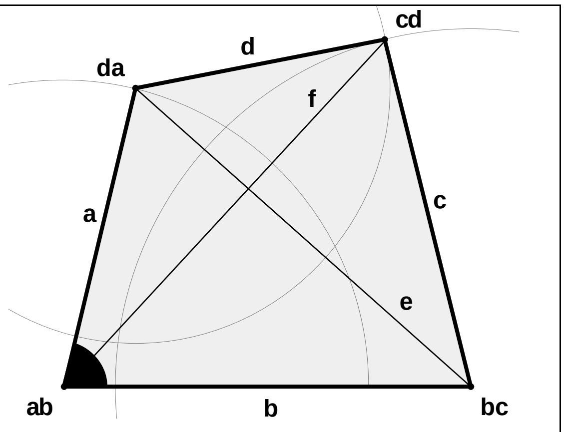
Øvelse 3: *a-a-b-b*. Hvis to par hosliggende sider er lige store kaldes figuren en *dragefirkant*. Hvilken dragefirkant er den største? Hvad skal der gælde om vinklerne? Hvad bliver størrelsen af det maksimale areal?

Øvelse 4: *a-b-b-b*. Denne gang er tre af siderne lige store. Hvordan ser den maksimale firkant ud? Hvad skal der gælde om vinklerne? Hvad bliver størrelsen af det maksimale areal?

Du skulle nu have en fornemmelse for det generelle problem og vi springer ud i det og gennemfører resten af afsnittet som en øvelse:

Øvelse 5: **Hvem er den største?**

Vælg fire tilfældige hele tal *a*, *b*, *c* og *d* mellem 1 og 10. De svarer til sidelængderne i din firkant i *den valgte rækkefølge*. Hvis mere end to af tallene er ens eller hvis der ikke kan konstrueres en firkant vælger du om igen. Som uafhængig variabel vælger du en vinkel, fx *ab*. Du kan nu konstruere grundlinjen *b* og en cirkel med centrum i hjørnet *ab* og radius *a*. På den øvre halvcirkel vælges et frit punkt, hjørnet *da*. For at konstruere det sidste hjørne *cd* afsætter du cirkler med centre i *da* og *bc* og radier henholdsvis *d* og *c* – se figuren.
Du skulle nu gerne have frembragt en dynamisk model af en firkant med sidelængderne *a*, *b*, *c* og *d*.



Ved at variere på vinklen *ab*, dvs. ved at trække i punktet *da*, kan du nu undersøge, hvornår arealet bliver størst muligt. Afsæt også diagonalerne *e* og *f* i firkanten. Udmål alle vinklerne i figuren, dvs. de fire kantvinkler, så vel som vinklen mellem diagonalerne. Udmål også arealet *T,* såvel som længden af de to diagonaler *e* og *f*. Prøve nu at give et bud på følgende:

- Hvad gælder der om kantvinklerne, når firkanten er maksimal?
- Hvad gælder der om diagonalvinklen, når firkanten er maksimal?
- Hvor stort bliver det maksimale areal?

Konstruér graferne for arealet *T*, diagonalvinklen *v* og produktet af diagonalerne *e·f* som funktion af kantvinklen *ab*. Hvad observerer du?

Vi vil nu prøve at stramme op omkring præcisionen ved at gennemføre en egentlig *beregning*. Hertil har vi brug for funktionsudtrykket for arealet *T* som funktion af kantvinklen *ab*.
Diagonalen *e* splitter firkanten i to trekanter og vi kan nemt finde arealet af de to trekanter:

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(ab) + \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(cd)$$

ISBN 9788770668699

Her er kantvinklen *ab* netop den uafhængige variabel *x*. Vi mangler så bare et udtryk for den modstående kantvinkel *cd*. Det finder vi ved hjælp af en elementær trekantberegning: Først udregnes længden af diagonalen *e* ved hjælp af cosinusrelationen, og dernæst udregnes vinklen *cd* ved hjælp af cosinusrelationen:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(ab)$$
$$\cos(cd) = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2 \cdot c \cdot d}$$

Sættes de to udtryk sammen finder vi derfor:

$$\cos(cd) = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(ab)}{2 \cdot c \cdot d}$$

Det giver anledning til det følgende udtryk for arealfunktionen:

$$u(x) := \cos^{-1}\left(\frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(a \cdot b)}{2 \cdot c \cdot d}\right)$$
$$T(x) := \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(x) + \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(u(x))$$

Indskriv disse funktionsudtryk og tegn grafen for arealfunktionen $T(x)$. Bestem at maksimum for arealfunktionens graf. Konstruér på basis af det fundne maksimum, den maksimale firkant.

Eftervis med den størst mulige numeriske præcision de formodninger, som du allerede har opstillet omkring den maksimale firkant. Er der tale om en pæn værdi for arealet T? Hvad med T^2? Er der tale om en pæn værdi for $e \cdot f$?

Supplerende udfordringer:

1) Konstruer midtnormalerne for de fire sider i firkanten. Hvad sker der når firkanten er maksimal?

2) Se på højdernes fodpunkter A', B' og C' på siderne *BC*, *CA* og *AB* fra det fjerde hjørne *D*. Hvad sker der når firkanten er maksimal?

3) Hvad sker der med den maksimale firkant, hvis vi bytter om på rækkefølgen af siderne? Hvad sker der fx med størrelsen af arealet og længden af diagonalerne?

Teoretisk afrunding

Når man først er blevet fortrolig med enkeltvariabel problemet kan man gå over til at kigge på fler-variabel problemer: Her får man fx kun ét stykke oplyst og har fire uafhængige stykker tilbage, man kan variere på. *Som et klassisk eksempel kan vi se på en firkant, hvor omkredsen p = a + b + c + d er givet. Hvordan skal man vælge firkanten, så arealet bliver størst muligt?*

Her kan vi starte med at vælge de hosliggende sider *a*, *b* og den tilhørende diagonal *e* som uafhængige variable, hvis værdier vi kan holde fast. For en given værdi af *a*, *b* og *e* holdes derfor summen $c + d$ fast. Men vi kan stadigvæk variere siden *c* (og lade siden *d* følge med). Men så har vi set, at den største trekant er den ligebenede trekant *ecd*, hvor $c = d$.

Hvis nu vi tænker os, at vi har fundet den optimale firkant må det jo gælde uanset hvilke af de hosliggende sider vi holder fast. Dvs. alle fire par sider skal være lige lange, og dermed skal firkanten være en *rombe*. Det fastlægger længden af de fire sider, men vi kan stadig variere på diagonalen *e*. Hvilken rombe har nu det største areal?

Øvelse 6:

Opstil funktionsudtrykket for arealet af en rombe hvor diagonalen kan varieres frit, mens omkredsen holdes fast. Hvis du kan, er det fint også at gennemføre udregningen ved hjælp af differentialregning og således bestemme det optimale areal.

ISBN 9788770668699

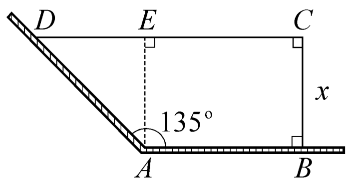
3. En eksamensopgave

Et tilsvarende problemkreds fås ved at holde diverse stykker i en firkant fast, så der kun er få frie variable tilbage. I eksamensopgaver vil der kun være en enkelt uafhængig variabel tilbage, så man kan regne sig igennem opgaven ved at opstille et enkelt funktionsudtryk. Det gælder for eksempel den følgende opgave. Her får man oplyst en vinkel og en sum af to sidelængder (et hegn). Det giver to stykker, hvorfor der må oplyses to stykker mere, fx endnu to rette vinkler (hvorved firkanten bliver til et *retvinklet trapez*) eller at de to modstående sider har samme størrelse (hvorved firkanten bliver til et *parallelogram*).
Ved løsning af den ovenstående opgave er det selvfølgelig spændende at se, om man kan se et mønster i de optimale figurer, og dermed fx blive i stand til at karakterisere løsningerne simpelt ud fra vilkårlige hegnslængder.
Men udfordringen består i at droppe de ekstra betingelser og søge den størst mulige firkantede indhegning, der *alene* opfylder de to oprindelige krav: Vinklen mellem murene skal være 135° og summen af de to sider, hvor der ikke er mur skal være 20 meter (hegnet). Det giver tre resterende uafhængige variable, fx siden *AB*, siden *CB* og diagonalen *DB*. Prøv nu selv om du kan løse opgaven.

Øvelse: Eksamensopgave

To mure danner et hjørne, hvor vinklen mellem murene er 135°. Ved hjælp af et 20 meter langt hegn skal der dannes en trapezformet indhegning *ABCD* (se figur 1). Linjestykket *BC* er vinkelret på de parallelle sider *AB* og *CD*. Længden af siden *BC* betegnes *x*.

Gør rede for, at længden af *DE* er *x*.



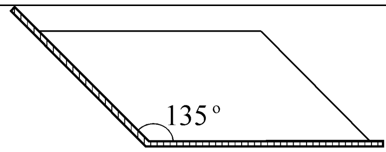
Figur 1: Trapezformet indhegning

Bestem den trapezformede indhegnings areal *T* som funktion af *x*, og gør rede for, at *T* kan skrives som

$$T(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + 20x\,.$$

Bestem det størst mulige areal T_{max} af den trapezformede indhegning.

Ved at give indhegningen form som et parallelogram (se figur 2) kan der med samme hegn på 20 m dannes en indhegning med et større areal end T_{max}. Bestem det størst mulige areal P_{max} af den parallelogramformede indhegning.



Figur 2: Parallelogramformet indhegning

ISBN 9788770668699

4. Teori I: Firkantstrigonometri

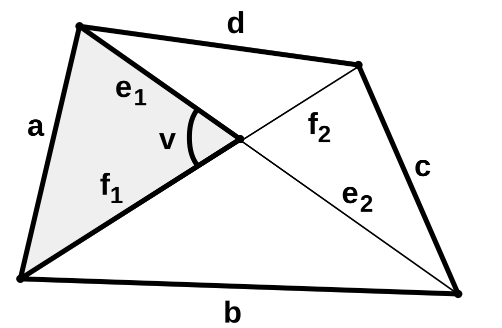
Sætning 1 (Cosinusrelationen for firkanter)
For en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* gælder:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 - 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos(v)$$

Bevis: Diagonalerne *e* og *f* deler hinanden i stykkerne e_1, e_2, f_1 og f_2. Diagonalvinklen overfor siden *a* kaldes *v*. De øvrige diagonalvinkler er da 180° – *v*, *v* og 180° – *v*.

Ved at anvende cosinusrelationerne på de fire trekanter udspændt af diagonalstykkerne og udnytte at $\cos(180° - v) = -\cos(v)$ fås da:

$$\begin{aligned}
a^2 &= e_1^{\,2} + f_1^{\,2} - 2 \cdot e_1 \cdot f_1 \cdot \cos(v) \\
b^2 &= f_1^{\,2} + e_2^{\,2} + 2 \cdot f_1 \cdot e_2 \cdot \cos(v) \\
c^2 &= e_2^{\,2} + f_2^{\,2} - 2 \cdot e_2 \cdot f_2 \cdot \cos(v) \\
d^2 &= f_2^{\,2} + e_1^{\,2} + 2 \cdot f_2 \cdot e_1 \cdot \cos(v)
\end{aligned}$$



Lægger vi ligningerne for a^2 og c^2 sammen og tilsvarende for b^2 og d^2 sammen fås:

$$\begin{aligned}
a^2 + c^2 &= e_1^{\,2} + e_2^{\,2} + f_1^{\,2} + f_2^{\,2} - 2 \cdot \left(e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2\right) \cdot \cos(v) \\
b^2 + d^2 &= e_1^{\,2} + e_2^{\,2} + f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + 2 \cdot \left(e_2 \cdot f_1 + e_1 \cdot f_2\right) \cdot \cos(v)
\end{aligned}$$

Trækker vi dem dernæst fra hinanden fås endelig den fundamentale sammenhæng:

$$\begin{aligned}
\left(b^2 + d^2\right) - \left(a^2 + c^2\right) &= 2 \cdot \left(e_1 \cdot f_1 + e_2 \cdot f_2 + e_1 \cdot f_2 + e_2 \cdot f_1\right) \cdot \cos(v) \\
&= 2 \cdot \left(e_1 + e_2\right) \cdot \left(f_1 + f_2\right) \cdot \cos(v) \\
&= 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos(v)
\end{aligned}$$

Heraf følger påstanden ved at rykke om på leddene.

Øvelse 1: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

Bemærkning: Vi kan specielt se på tilfældet, hvor diagonalvinklen *v* er ret. I så fald gælder cos(*v*) = 0 og dermed fås: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
Men hvis der på den anden side gælder, at $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, så må også cos(*v*) = 0. Vi har derfor vist:

Sætning 2 (Pythagoras for firkanter)
Diagonalerne i en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* står vinkelret på hinanden, netop når summen af kvadraterne på modstående sider er ens:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

Bemærkning: Denne sætning viser bl.a. at enten er diagonalvinklen i en firkant med fire opgivne sider *a*, *b*, *c* og *d* *altid* ret eller også bliver den det *aldrig*!

Øvelse 2: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

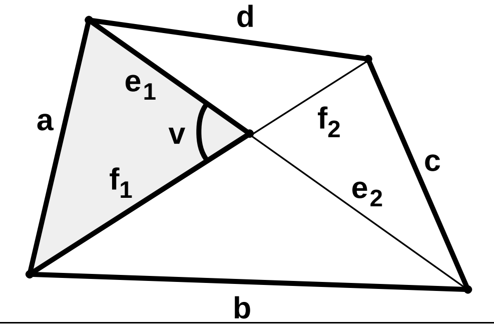
Sætning 3 (Arealformlen for firkanter)
For en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* gælder:
$T = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin(v)$.

L&R Uddannelse
EGMONT

Bevis:
Som før deler diagonalerne *e* og *f* hinanden i stykkerne e_1, e_2, f_1 og f_2. Diagonalvinklerne er *v*, 180° – *v*, *v* og 180° – *v*.

Ved at anvende arealformlen for trekanter på de fire trekanter frembragt af diagonalerne og udnytte at $\sin(180° - v) = \sin(v)$ fås da:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\cdot e_1 \cdot f_1 \cdot \sin(v), \quad T_2 = \tfrac{1}{2}\cdot e_2 \cdot f_1 \cdot \sin(v)$$
$$T_3 = \tfrac{1}{2}\cdot e_2 \cdot f_2 \cdot \sin(v), \quad T_4 = \tfrac{1}{2}\cdot e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(v)$$



Lægger vi de fire arealer sammen fås netop:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left(e_1\cdot f_1 + e_2 \cdot f_1 + e_2\cdot f_2 + e_1 \cdot f_2\right)\cdot\sin(v) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left(e_1 + e_2\right)\cdot\left(f_1 + f_2\right)\cdot\sin(v) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin(v) \end{aligned}$$

Øvelse 3: Hvad sker der, hvis siden *c* klapper sammen, dvs. vi sætter *c* = 0? Hvilken sætning svarer det til?

Denne arealformel er den simpleste for en firkant, men den findes også i to andre varianter. Vi kan nemlig dels eliminere diagonalerne *e* og *f*, dels eliminere diagonalvinklen *v*.

Sætning 4 (Alternative arealformler)
Arealet *T* for en konveks firkant med siderne *a*, *b*, *c* og *d* samt diagonalerne *e* og *f* og diagonalvinklen *v* opfylder de følgende to sammenhænge:

1) $T = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)\cdot\tan(v)$

(hvor det forudsættes at diagonalvinklen *v* ikke er ret! Hvis vinklen er ret er tangens ikke defineret).

2) $T^2 = \tfrac{1}{4}\cdot e^2\cdot f^2 - \left(\dfrac{\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)}{4}\right)^2$

Bevis:
Udgangspunktet er arealformlen og cosinusrelationen, der omskrives på formen:

$$4T = 2\cdot e\cdot f\cdot\sin(v)$$
$$\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right) = 2\cdot e\cdot f\cdot\cos(v)$$

a) Ved division af de to ligninger med hinanden går diagonalerne *e* og *f* ud og vi finder:

$$\frac{4T}{\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \tan(v) \quad \Rightarrow$$
$$T = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)\cdot\tan(v)$$

b) Ved at kvadrere de to ligninger og lægge dem sammen går *v* ud i kraft af trigonometriens Pythagoras:

$$\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1.$$

Først kvadreres de to ligninger:

$$16\cdot T^2 = 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\sin^2(v)$$
$$\left(\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+c^2\right)\right)^2 = 4\cdot e^2\cdot f^2\cdot\cos^2(v)$$

ISBN 9788770668699

Dernæst lægges de to ligninger sammen:

$$16 \cdot T^2 + \left((b^2 + d^2) - (a^2 + c^2) \right)^2 = 4 \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot \sin^2(v) + 4 \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot \cos^2(v)$$
$$= 4 \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot \left(\sin^2(v) + \cos^2(v) \right) = 4 \cdot e^2 \cdot f^2$$

Isoleres T^2 fra denne ligning fås netop den ønskede formel.

For en firkant med *faste* sidelængder *a*, *b*, *c* og *d* er forskellen på kvadratsummerne for de modstående sider, dvs. $(b^2 + d^2) - (a^2 + c^2)$, nu en konstant. De to nye arealformler viser derfor at arealet af en konveks firkant med givne sidelængder afhænger på simpel vis af dels diagonalvinklen *v* (hvis denne *ikke* er ret), dels af diagonalernes produkt $e \cdot f$.

Den første formel viser, at arealet af firkanten *T* er proportionalt med tangens til den spidse diagonalvinkel *v*, dvs. tan(*v*). Når vi deformerer en firkant – hvor diagonalvinklen *v* ikke er ret – finder vi derfor det størst mulige areal, netop når den spidse diagonalvinkel er størst mulig (idet tangensfunktionen er voksende for spidse vinkler).

Den anden formel viser tilsvarende, at forskellen mellem kvadratet på arealet *T* og kvadratet på det halve diagonalprodukt $\frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ er konstant. Men det viser at kvadratet på arealet dvs. T^2, er størst mulig, netop når kvadratet på diagonalproduktet, dvs. $(e \cdot f)^2$, er størst muligt. Men dermed gælder også, at arealet *T* er størst muligt, netop når diagonalproduktet *e·f* er størst muligt (idet kvadratfunktionen er voksende for positive tal).

Sætning 5
For en konveks firkant med faste sidelængder *a*, *b*, *c* og *d* topper de følgende tre størrelser derfor samtidigt:

1. Firkantens areal *T*.
2. Firkantens spidse diagonalvinkel *v*.
3. Firkantens diagonalprodukt *e ·f*.

Dermed har vi på elementær vis gjort rede for de fleste af de observationer vi (forhåbentligt) har gjort i vores eksperimentelle undersøgelse af firkantens areal.

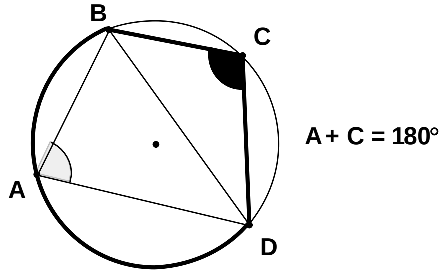
Vi mangler nu kun at gøre nærmere rede for de præcise omstændigheder, hvorunder firkantens areal er maksimalt.

ISBN 9788770668699

5. Teori II: Cykliske firkanter

Vi vil nu se nærmere på firkanter, der har en omskrevet cirkel – såkaldte *cykliske firkanter*.

Vinklerne i en cyklisk firkant er supplementvinkler. Det skyldes at en periferivinkel er halvt så stor som den bue, den spænder over. To modstående vinkler, fx A og C, i en cyklisk firkant spænder over hele cirklens omkreds, dvs. 360°, hvorfor de to vinkler tilsammen spænder over det halve gradtal, dvs. $A + C = 180°$.
Det omvendte gælder også, som det fremgår af den følgende sætning.



Sætning 6
En firkant er cyklisk, netop når modstående vinkler er supplementvinkler.

Men ikke blot er der en simpel forbindelse mellem de fire vinkler i en cyklisk firkant. Der er også en simpel forbindelse mellem de fire sider AB, BC, CD og DA samt diagonalerne AC og BD i en cyklisk firkant:

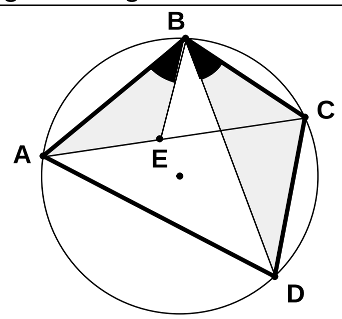
Sætning 7 (Ptolemaios sætning)
Produktet af diagonalerne i en cyklisk firkant er lig med summen af produkterne af de modstående sider:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Bevis: Vi afsætter punktet E på diagonalen AC, så vinklerne ved B, dvs. ABE og DBC er lige store:

Men vinklerne ved A og D er også lige store, da de spænder over samme bue. De to trekanter AEB og DCB er altså ensvinklede og dermed ligedannede, hvorfor vi slutter:

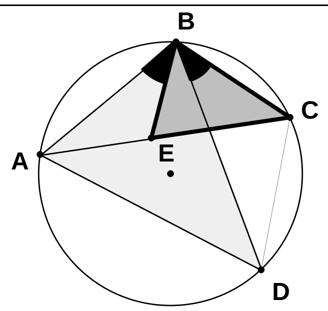
$$\frac{AE}{CD} = \frac{AB}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad AE \cdot BD = AB \cdot CD$$



På samme måde er trekanterne ADB og ECB ensvinklede, fordi vinklerne ved B per konstruktion er lige store, mens vinklerne ved C og D spænder over samme bue.

Denne gang slutter vi derfor at der gælder:

$$\frac{EC}{DA} = \frac{BC}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad EC \cdot BD = BC \cdot DA$$



Lægger vi de fundne ligninger sammen fås:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AE \cdot BD + EC \cdot BD$$
$$= (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$$

Hermed er sætningen vist. Denne vigtige sammenhæng går tilbage til den store græske astronom Ptolemaios fra det andet århundrede, der gjorde den til en hjørnesten i den græske trigonometri.

Øvelse 1
Hvad svarer Ptolemaios sætning til for et rektangel?

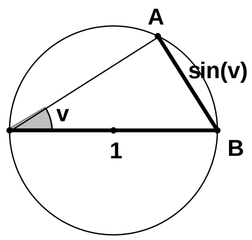
L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 2

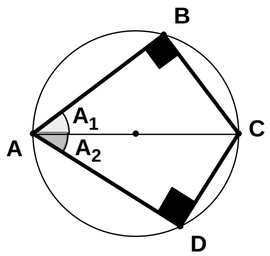
1) I en cirkel med diameteren 1 spænder periferivinklen *v* over korden *AB*. Vis at *AB* = sin(*v*) (se figur a).

2) Gøre rede for, at hvis én af diagonalerne i en cyklisk firkant *ABCD* er en diameter, vil firkanten være dobbelt retvinklet med diagonalen som fælles hypotenuse. Antag at diameteren er 1. Vis at Ptolemaios sætning netop svarer til additionsformlen for sinus, dvs. (se figur b);

$$\sin(A_1 + A_2) = \sin(A_1)\cdot\cos(A_2) + \sin(A_2)\cdot\cos(A_1)$$



Figur a.



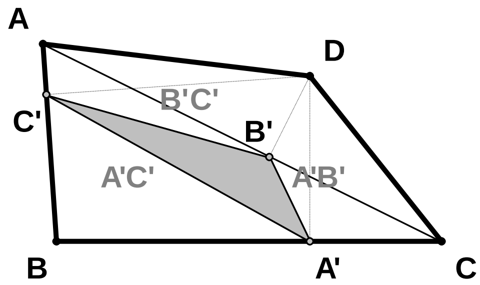
Figur b

6. Teori III: Geometrien bag den størst mulige firkant

Den klassiske geometriske karakterisering af den største konvekse firkant viser sig at handle om diagonalernes produkt.

Vi tager udgangspunkt i den sidste del af eksperimentet i øvelse 5 side 5-6, hvor vi (forhåbentligt) opdagede at højdernes fodpunkter A', B' og C' fra det fjerde punkt *D* netop lå på ret linje når firkantens areal var maksimalt. Det viser sig at være en nøgleobservation: De tre fodpunkter A', B' og C' udspænder nemlig en trekant, der må opfylde trekant uligheden:

$$A'C' \leq A'B' + B'C'$$



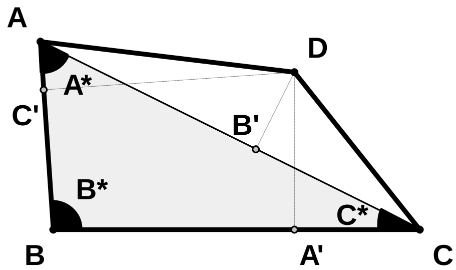
hvor lighedstegnet kun er gyldigt, når de tre punkter ligger på en ret linje (med B' liggende mellem A' og C'). Men de tre trekantsider i fodpunktstrekanten kan knyttes på simpel vis til siderne og diagonalerne i den oprindelige firkant, idet der viser sig at gælde:

$$k \cdot A'B' = AB \cdot CD$$
$$k \cdot B'C' = BC \cdot AD$$
$$k \cdot A'C' = AC \cdot BD$$

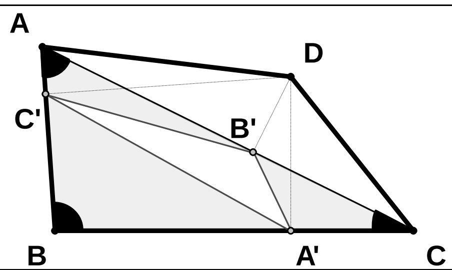
hvor *k* er en *fælles konstant*, som vi introducerer via sinusrelationen.
Først opskriver vi sinusrelationerne for trekanten *ABC*:

$$\frac{AB}{\sin(C^*)} = \frac{BC}{\sin(A^*)} = \frac{CA}{\sin(B^*)} = k \quad (1)$$

Her er *A**, *B** og *C** den del af vinklen, der ligger inde i trekanten og *k* er den fælles værdi af de tre brøker.



Dernæst ser vi på de tre trekanter $A'B'C$, $B'C'A$ og $C'A'B$, der hver for sig har en vinkel fælles med den store trekant *ABC*.
Vi kører argumentet igennem for trekanten $A'B'C$, men det er det samme argument i alle tre tilfælde.



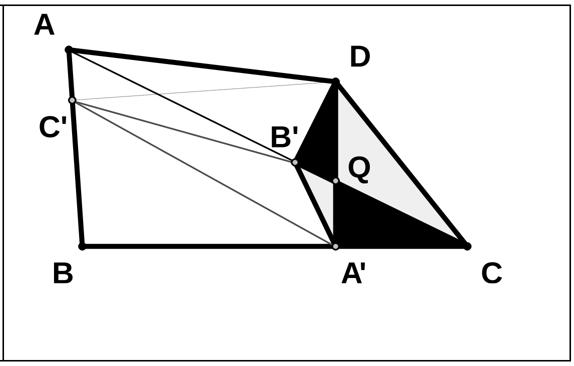
ISBN 9788770668699

Firkanten $A'B'CD$ er en speciel firkant eftersom den er delt i to par ensvinklede trekanter, ligesom modstående vinkler i firkanten er supplementvinkler:

Beviset er et lille argument som involverer ligedannede trekanter. Vi starter med at bemærke at de sorte trekanter $QB'D$ og $QA'C$ er ensvinklede.

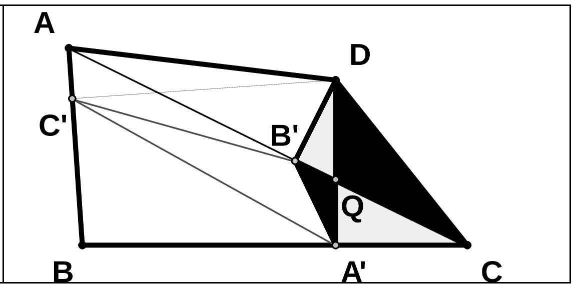
Det er de fordi begge vinklerne A' og B' er rette og fordi topvinklerne ved *Q* er lige store. Heraf følger at de følgende to ydre forhold er lige store:

$$\frac{QB'}{QA'} = \frac{QD}{QC} (= \text{forstørrelsesfaktoren})$$



Men de optræder også som indre forhold i de sorte trekanter $A'QB'$ og *CQD* nedenunder:

Da ydermere topvinklerne ved *Q* igen er lige store er det tilstrækkeligt til at sikre at også trekanterne *A*'*QB*' og *CQD* er ligedannede og dermed ensvinklede.

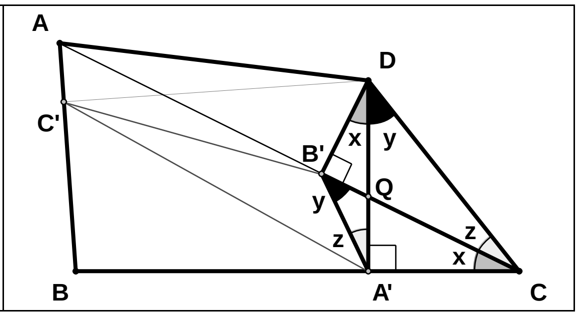


Vi har altså masser af vinkler, der går igen overalt i firkanten.
For den samlede vinkelsum i firkanten fås da:

$$\begin{aligned} 360° &= A' + B' + C + D \\ &= 2x + 2y + 2z + 2 \cdot 90° \end{aligned}$$

Altså gælder der sammenhængen:

$$x + y + z = 90°$$



Det viser netop som påstået at *A*' og *D* er supplementvinkler:

$$A' + D = 90° + z + x + y = 90° + 90° = 180°$$

Disse to vinkler har derfor den samme sinusværdi: $\sin(A') = \sin(D)$. En snedig anvendelse af sinusrelationerne (hvor vi undervejs skifter fra den nedre deltrekant $A'B'C$ til den øvre deltrekant $DB'C$) giver derfor:

$$\frac{A'B'}{\sin(C^*)} = \frac{B'C}{\sin(A')} = \frac{B'C'}{\sin(D)} = \frac{DC}{\sin(90°)} = DC \quad (2)$$

Kombinerer vi sinusrelationen (1) for den store trekant *ABC* og sinusrelationen (2) for firkanten *A*'*B*'*CD* fås derfor:

$$\sin(C^*) = \frac{AB}{k} = \frac{A'B'}{CD} \quad \Rightarrow \quad k \cdot A'B' = AB \cdot CD$$

På samme måde viser vi at der gælder:

$$k \cdot B'C' = BC \cdot AD$$
$$k \cdot A'C' = AC \cdot BD$$

Ganger vi trekantuligheden med den *positive* konstant *k* fås derfor:

$$k \cdot A'C' \leq k \cdot A'B' + k \cdot B'C' \quad \Leftrightarrow$$

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

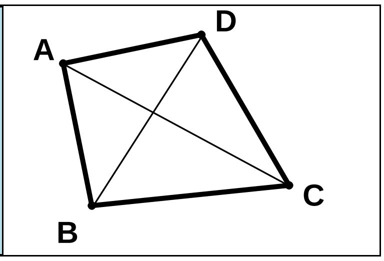
ISBN 9788770668699

Dette er netop *firkantuligheden* for fire punkter *A*, *B*, *C* og *D* i planen:

Sætning 8 (Firkantuligheden)
For afstandene mellem fire punkter *A*, *B*, *C* og *D* gælder uligheden

$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$,

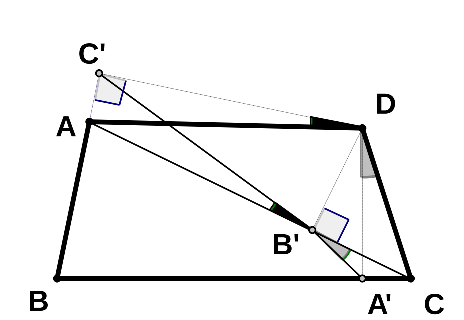
dvs. produktet af diagonalerne er altid mindre end eller lig med summen af de modstående siders produkter. Lighedstegnet gælder kun, når højdernes fodpunkter fra det fjerde punkt *D* ligger på ret linje.



Men det viser samtidigt at produktet af diagonalerne *e*·*f* i en konveks firkant er opadtil begrænset af summen af de modstående siders produkter *a*·*c* + *b*·*d*.
Det viser også, at maksimum netop nås når højdernes fodpunkter fra D ligger på ret linje.

Spørgsmålet er så blot hvornår de tre fodpunkter ligger på ret linje.

Vi kigger da igen på figuren og koncentrerer os om det tilfælde, hvor de to fodpunkter A' og C' ligger på hver sin side af diagonalen *AC*, og der derfor er en reel chance for at de ligger på samme rette linje som diagonalpunktet B'.
Det er altså de to linjestykker $B'C'$ og $B'A'$ som vi ønsker, skal ligge i forlængelse af hinanden. Men de to vinkler ved B', dvs. $AB'C'$ og $A'B'C$ skal da være lige store (topvinkler).
Nu har vi lige set, at vinklen $A'B'C$ genfindes i $A'DC$, ligesom vinklen $AB'C'$ genfindes i vinklen ADC'.



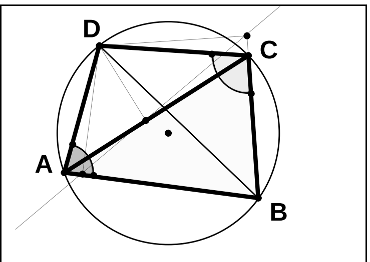
Vi skal altså sikre os at de to vinkler ved *D* er lige store.
Men trekanterne $A'CD$ og $C'AD$ er begge retvinklede (da A' og C' er fodpunkter for højder fra *D*).
Vi finder derfor:

$$\begin{aligned} \angle ADC' &= 90° - \angle C'AD \\ &= 90° - (180° - A) = A - 90° \\ \angle A'DC &= 90° - C \end{aligned}$$

Altså skal der gælde: $A - 90° = 90° - C \quad \Leftrightarrow \quad A + C = 180°$

Fodpunkterne ligger derfor på ret linje, netop når *A* og *C* er supplementvinkler. Men det samme må da også gælde vinklerne *B* og *D*.

Sætning 9
Fodpunkterne for højderne fra *D* i en konveks firkant *ABCD* ligger på ret linje, netop når modstående vinkler er supplementvinkler, dvs. når *D* ligger på den omskrevne cirkel for trekanten *ABC*.



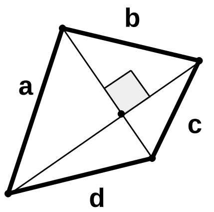
Konklusion vedr den størst mulige firkant
Firkanten *ABCD* har et *maksimalt diagonalprodukt*, netop når den er cyklisk. Og dette maksimale diagonalprodukt er netop summen af de modstående siders produkter: $(AC \cdot BD)_{maks} = AB \cdot BC + CD \cdot DA$ På samme måde har en cyklisk firkant *ABCD* derfor et maksimalt areal og (med mindre diagonalvinklen er ret) en maksimal spids diagonalvinkel *v*.

ISBN 9788770668699

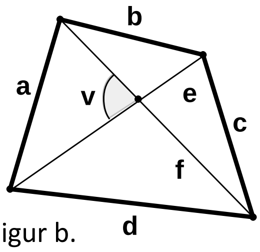
Bilag. Formler i almene konvekse firkanter

Vinklerne: Vinkelsummen er 360°:
A + *B* + *C* + *D* = 360°

Pythagoras: Diagonalvinklen *v* er ret, netop når summen af kvadraterne på de modstående sider er lige store (se figur a):
$a^2+c^2=b^2+d^2$.



Figur a.



Figur b.

Cosinusrelationen for diagonalvinklen:
(se figur b)

$$a^2+c^2=b^2+d^2-2\cdot e\cdot f\cdot\cos(v)$$

Arealformlerne:

$$T=\tfrac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin(v)$$

$$T=\tfrac{1}{4}\cdot\left((b^2+d^2)-(a^2+c^2)\right)\cdot\tan(v)$$

$$T^2=\tfrac{1}{4}\cdot e^2\cdot f^2-\left(\frac{(b^2+d^2)-(a^2+c^2)}{4}\right)^2$$

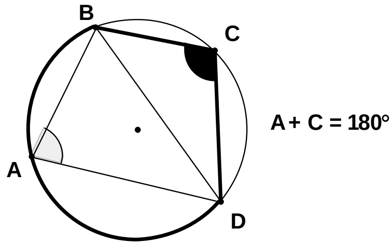
Firkantuligheden:

$$e\cdot f\ \le\ a\cdot c+b\cdot d$$

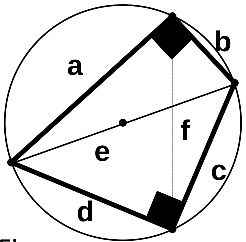
Her gælder der kun lighedstegn, hvis firkanten *abcd* er cyklisk.

ISBN 9788770668699

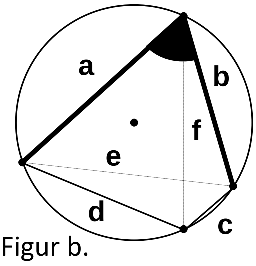
Vinklerne: Modstående vinkler i en cyklisk firkant er supplementvinkler:



Pythagoras: En cyklisk firkant er dobbelt retvinklet, netop når $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Den fælles værdi er e^2 og diagonalen *e* er diameter for den omskrevne cirkel (se figur a):



Figur a.



Figur b.

Cosinusrelationen: (se figur b)

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot\left(a\cdot b + c\cdot d\right)\cdot\cos(ab)$$

Arealformlen: (Brahmaguptas sætning)

$$T = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

med $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Ptolemaios sætning:

$$e\cdot f = a\cdot c + b\cdot d$$