ISBN 9788770668699

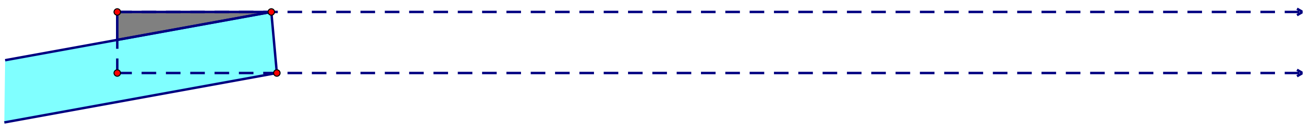
L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 0.1 Den magiske fold

Introduktion: Foldning af en strimmel papir

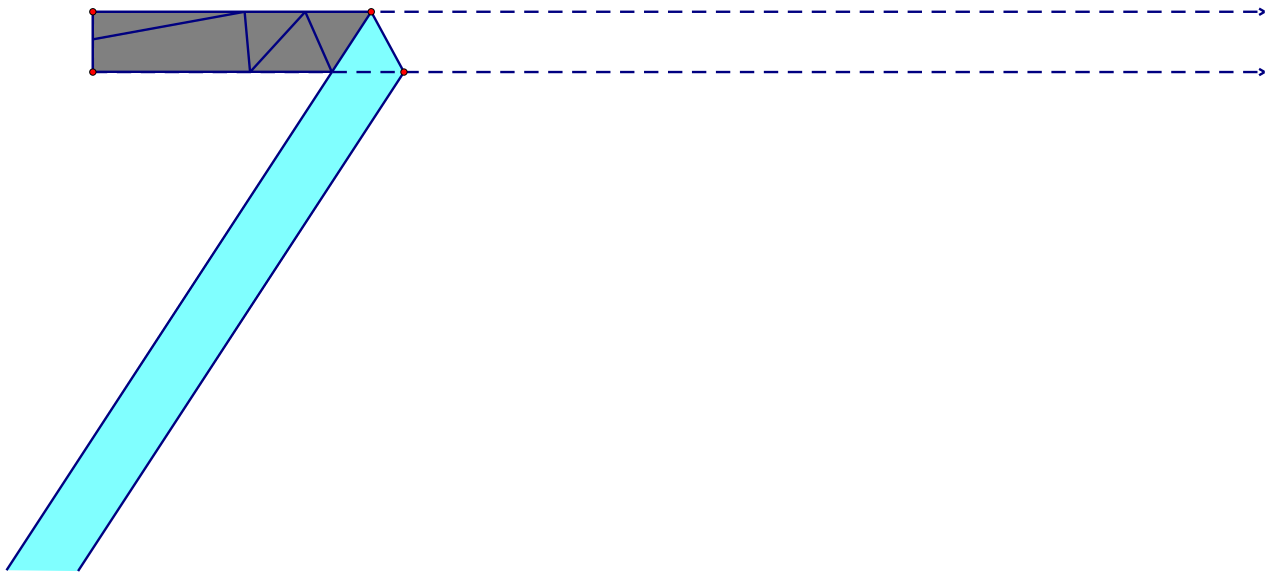
Hvad sker der hvis man folder en strimmel papir og gentager foldningen rigtigt mange gange. Det vil vi undersøge i dette projekt! Den første fold **vælges helt vilkårligt**:

Men nu foldes strimlen **langs den første fold**:



Derved opstår en ny fold! Strimlen foldes nu **langs den nye fold**:

Sådan fortsætter du med at folde hen langs strimlen:



a) Hvad observerer du?

b) Konstruér nu foldningen i dit dynamiske geometriprogram. Det vil bl.a. give dig mulighed for at udføre præcise målinger på figuren! Bekræfter konstruktionen din formodning?

c) Vi skal nu have indført nogle passende vinkelvariable vi kan lege med:

Gennemfør målinger af en sådan serie af vinkler i dit dynamiske geometriprogram. Hvilken sammenhæng er der mellem disse vinkler? Hvis fx v_0 er 20° hvad bliver så v_1? v_2? Beskriv sammenhængen i ord og også gerne med en formel.

d) Vi skal nu have oprettet en *tabel*, som vi kan lege med. Gå derfor ind i dit dynamiske regneark og opret en søjle for vinklerne. Den første vinkel sætter du til det mål du har valgt for v_0 på din geometriske figur. Dernæst bruger du en celleformel til at udregne v_1 ud fra værdien af v_0. Denne celleformel trækkes nu ned gennem søjlen, hvorved du kan få udregnet de første 100 vinkler i din magiske foldning. Kontroller først og fremmest at regnearket stemmer overens med de vinkelmål du faldt i dit dynamiske geometriprogram. Bekræfter regnearket din formodning?

e) Vi skal nu have oprettet en *graf*, som vi kan lege med. Opret endnu en søjle i dit dynamiske regneark som rummer **de forskudte vinkler**, dvs. den første celle rummer denne gang v_1, den anden v_2 osv. Opret nu punktplottet med vinklerne fra den første søjle som *x*-koordinat og de forskudte vinkler fra den anden søjle som *y*-koordinat. Punkterne ser ud til at ligge på en ret linje! Hvad bliver ligningen for denne rette linje? Tilføje også linjen med ligningen $y = x$ til dit grafrum. Hvor skærer den den foregående rette linje afsat ud fra vinklerne og de forskudte vinkler? Hvad har det med din formodning at gøre?

f) Vi prøver nu om der er den forbindelse mellem de afsatte punkter og de to linjer i dit grafrum: Tænk på linjen $y = x$ som en skæv x-akse!
Træk en vandret linje fra det første grafpunkt (v_0,v_1) hen til diagonalen $y = x$. Hvad bliver koordinaterne til dette første diagonalpunkt?
Træk en lodret linje fra diagonalpunktet til den skrå linje. Hvor skærer denne lodrette linje den skrå linje?
Træk en vandret linje fra det andet grafpunkt (v_1,v_2) hen til diagonalen $y = x$. Hvad bliver koordinaterne til dette andet diagonalpunkt?
Træk en lodret linje fra det andet diagonalpunkt til den skrå linje. Hvor skærer denne lodrette linje den skrå linje?
Fortsæt sådan et passende stykke tid. Du kan med fordel skjule linjerne og erstatte dem med vandrette og lodrette linjestykker, der forbinder punkterne i spindelvævet.
Hvad viser denne graf om opførslen af vinklerne? Hvad har det med din formodning at gøre?

ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse
EGMONT

Teori: Kan vi forstå sammenhængen?

Vi prøver nu om vi kan bevise den fundne formodning! Beviset kan enten føres grafisk eller symbolsk. Først et grafisk bevis:

g) Gå tilbage til din spindelvævsgraf: Hvad var hældningen for den skrå linje? Hvilken sammenhæng må der så være mellem længderne af de vandrette linjestykker og længderne af de lodrette linjestykker. Hvad viser det om længderne af disse linjestykker, når vi fortsætter foldningen i det uendelige? Hvilket punkt snærer spindelvævet sig så sammen om? Hvilken grænsevinkel er de enkelte vinkler så nødt til at nærme sig?

Dernæst et symbolsk bevis:

h) Hvilken sammenhæng gjaldt der mellem v_0 og v_1 (det skal skrives som en ligning!)?
Hvilken sammenhæng gjaldt der mellem v_1 og v_2? Indsæt udtrykket for v_1 i denne sammenhæng og find derved sammenhængen mellem v_0 og v_2.
Hvilken sammenhæng gjaldt der mellem v_2 og v_3? Indsæt udtrykket for v_2 i denne sammenhæng og find derved sammenhængen mellem v_0 og v_3.
Sådan fortsætter du indtil du kan se et mønster, der viser hvordan den n'te vinkel v_n afhænger af startvinklen v_0!

i) Hvad har den fundne sammenhæng at gøre med formlen $\sum_{k=0}^{k=\infty} b \cdot a^k = \frac{b}{1-a}$? Hvilken værdi har b? Hvilken værdi har a?
Hvilken værdi får så grænsevinklen v_∞ når vi fortsætter den magiske foldning i det uendelige?

I det foregående har vi fokuseret på vinklerne. Man kan også fokusere på trekanterne, der fremkommer ved foldningen? Hvad gælder der om disse trekanter? Hvorfor er det en fordel at fokusere på vinklerne fremfor siderne i trekanterne?