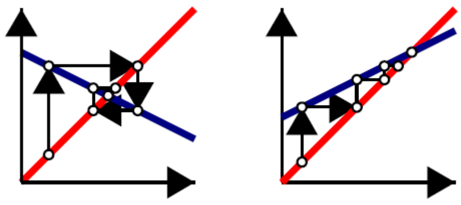
Hvad er matematik? 2
ISBN 9788770668699

website: link fra kapitel 0, Hvad er matematik?

Supertiltrækkende cykler

1. Supertiltrækkende fikspunkter

I afsnittet om lineære iterationer har vi set på *tiltrækkende* og *frastødende* fikspunkter. Vi viste da sætning 2, ifølge hvilken et fikspunkt er tiltrækkende, hvis hældningen a for den lineære iteration $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ lå mellem -1 og 1:



a negativ: $-1 < a < 0$ a positiv: $0 < a < 1$

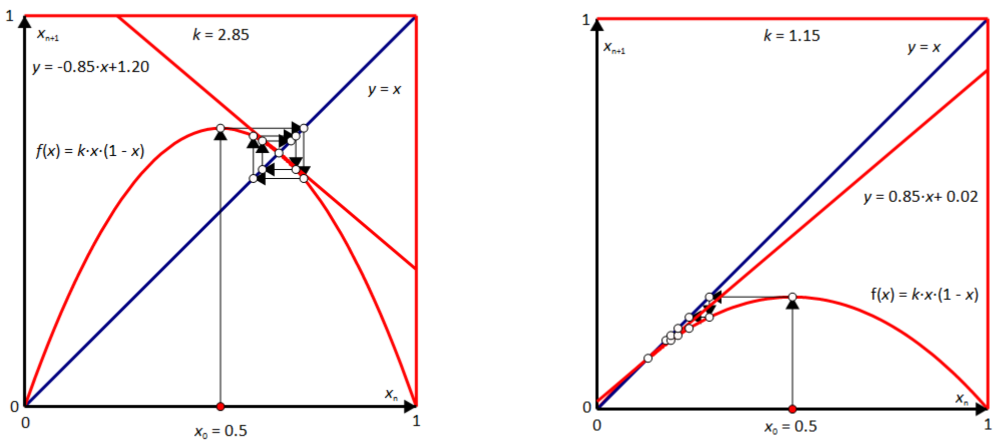
I beviset så vi at afstanden til fikspunktet x_* formindskedes med faktoren $|a|$ (den numeriske værdi af a) i hvert trin af iterationen. Afstanden aftager altså eksponentielt med grundtallet $|a|$:

$$|x_n - x_*| = |a|^n \cdot |x_0 - x_*|$$

Jo mindre $|a|$ er jo hurtigere nærmer x_n sig derfor fikspunktet x_*. Hvis iterationen skal nærme sig så hurtigt som overhovedet muligt skal den numeriske værdi af hældningen a derfor være 0, dvs. hældningen skal selv være 0. *I så fald siges fikspunktet at være supertiltrækkende*.

For en lineær iteration betyder det altså at iterationsfunktionen er konstant $x_{n+1} = b$, hvorfor iterationen allerede efter den første iteration havner i fikspunktet b.

For en ikke-lineær iterationsfunktion, fx en kvadratisk $f(x) = k \cdot x \cdot (1 - x)$, gælder noget tilsvarende, idet vi blot ser på den *lokale hældning* i fikspunktet i stedet for:

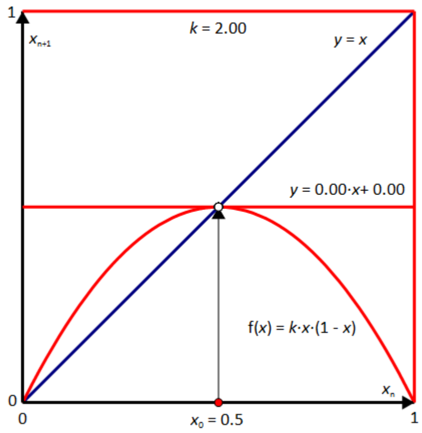


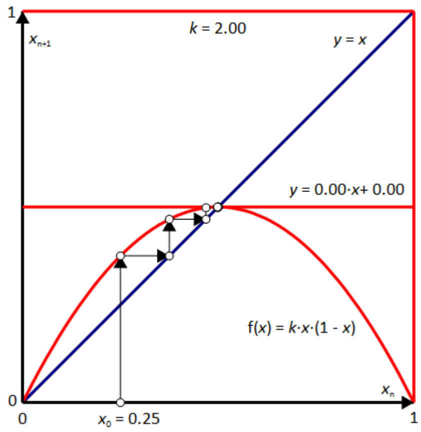
Tæt på fikspunktet ligner parablen en ret linje og iterationen opfører derfor stort set som om den var lineær. Hvis specielt den lokale hældning er numerisk mindre end 1 vil den derfor nærme sig fikspunktet, idet afstanden stor set vil aftage med en faktor, der netop er den numeriske værdi af den lokale hældning. I kapitel 4 om differentialregning præciserer vi hvad der menes med lokalt lineær og hvordan man udregner den lokale hældning. Her ser vi blot grafisk på det. Men far den lineære iteration lærer vi da at iterationen konvergerer hurtigst muligt, når den lokale hældning er numerisk mindst mulig, dvs. nul. Den hurtigste konvergens kommer altså når fikspunktet er et ekstremumspunkt, dvs. i dette tilfælde et toppunkt for parablen, dvs. når $x_* = \frac{1}{2}$. *Også i det ikke-lineære tilfælde kaldes et sådant fikspunkt for supertiltrækkende*.

ISBN 9788770668699

website: link fra kapitel 0, Hvad er matematik?

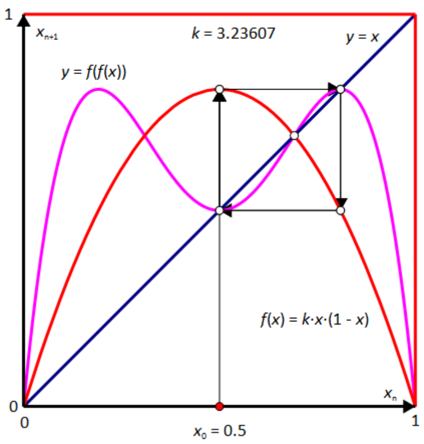
Hvis vi lader startværdien være ½ rammer vi ligesom i det lineære tilfælde direkte ind i fikspunktet. Ellers vil vi konvergere hurtigst muligt ind mod det supertiltrækkende fikspunkt:





Supertiltrækkende cykler

Vi kigger derefter på to-cykler: $x_1 \to x_2 = f(x_1) \to x_1 = f(f(x_1))$. Vi ser derfor at $\{x_1, x_2\}$ er en to-cykel, præcis når x_1 (eller x_2) er fikspunkt for den dobbelt sammensatte iterationsfunktion $f(f(x))$. Men det betyder jo så at to-cyklen $\{x_1, x_2\}$ er en supertiltrækkende to-cykel for iterationsfunktionen $f(x)$, præcis når x_1 (eller x_2) er et supertiltrækkende fikspunkt for den dobbelt sammensatte iterationsfunktion $f(f(x))$. Vi skal altså blot finde ekstremumspunkterne for $f(f(x))$. Men maksimumspunkterne for $f(f(x))$ må netop indtræffe, når $f(x) = \frac{1}{2}$, da $f(\frac{1}{2})$ er den største funktionsværdi. Minimumspunktet indtræffer tilsvarende for $x = \frac{1}{2}$ (der altid er et ekstremumspunkt , idet der er vandret tangent på grund af symmetrien):



Altså er to-cykel $\{x_1, x_2\}$ en supertiltrækkende to-cykel, hvis enten x_1 (eller $x_2 = f(x_1)$) har værdien ½. En to-cykel er altså tiltrækkende, netop når den indeholder toppunktets x-værdi ½. På figuren ovenfor har vi illustreret den supertiltrækkende to-cykel.

Dette resultat udstrækkes til vilkårlige cykler. Du kan læse mere om dette i projektet om supertiltrækkende cykler og Feigenbaums konstant.