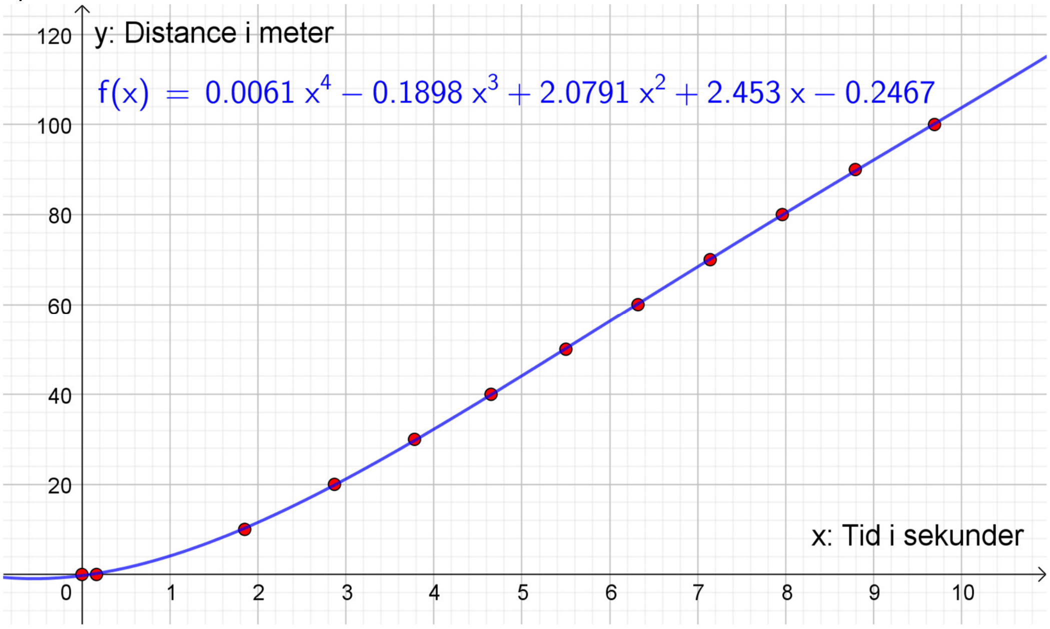
# Løsninger til øvelser i kapitel 8

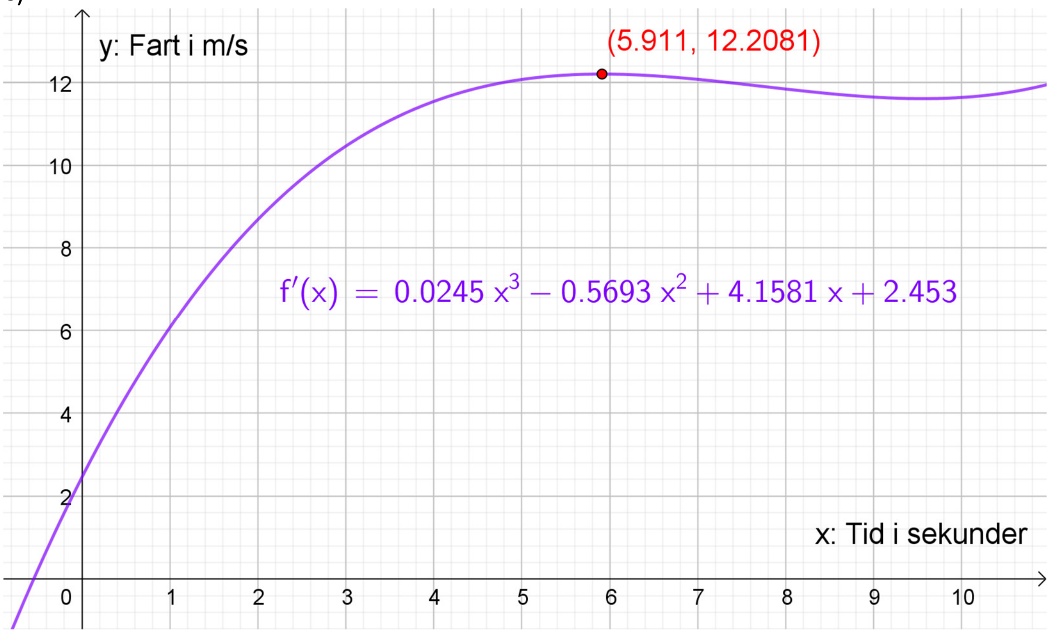
**Øvelse 8.1**

a)




b) $f'(x) = 0{,}0245x^3 - 0{,}5693x^2 + 4{,}1581x + 2{,}453$.

c)



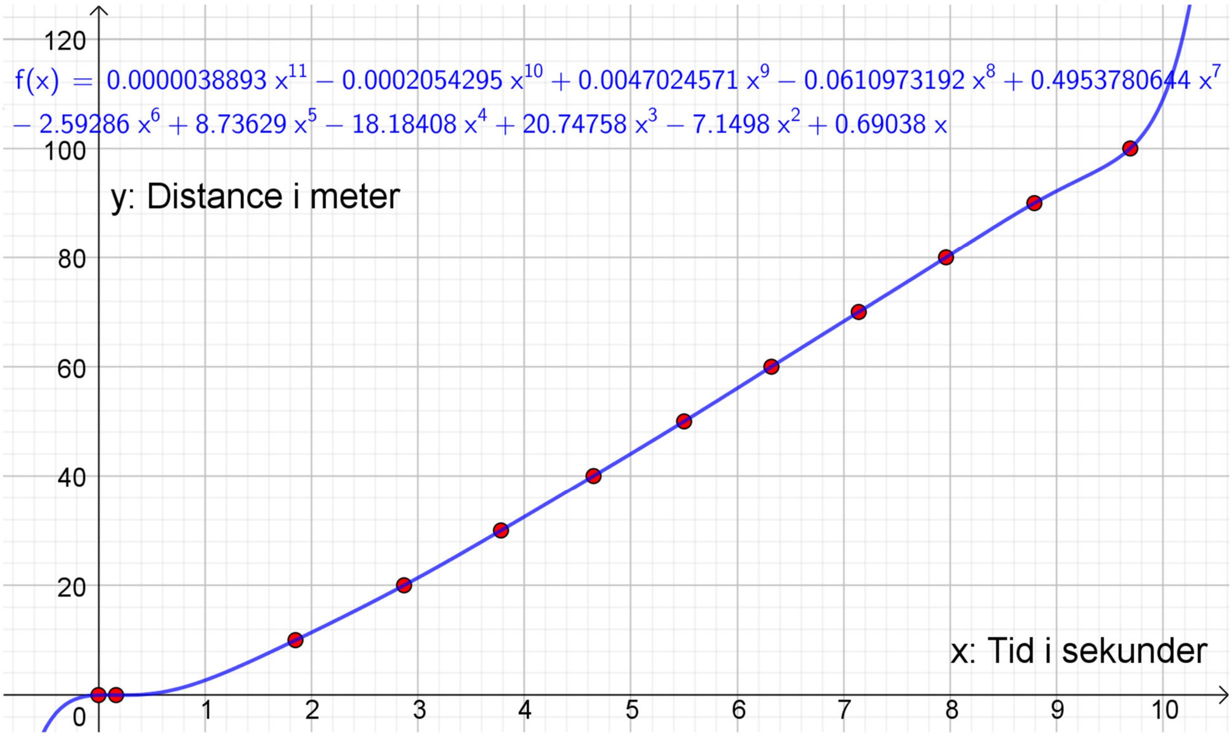

Hastigheden er maksimal efter 5,9 sekunder.

d) Graden er hverken for stor eller for lille, men lige tilpas, ligesom i historien om Guldlok og de tre bjørne.

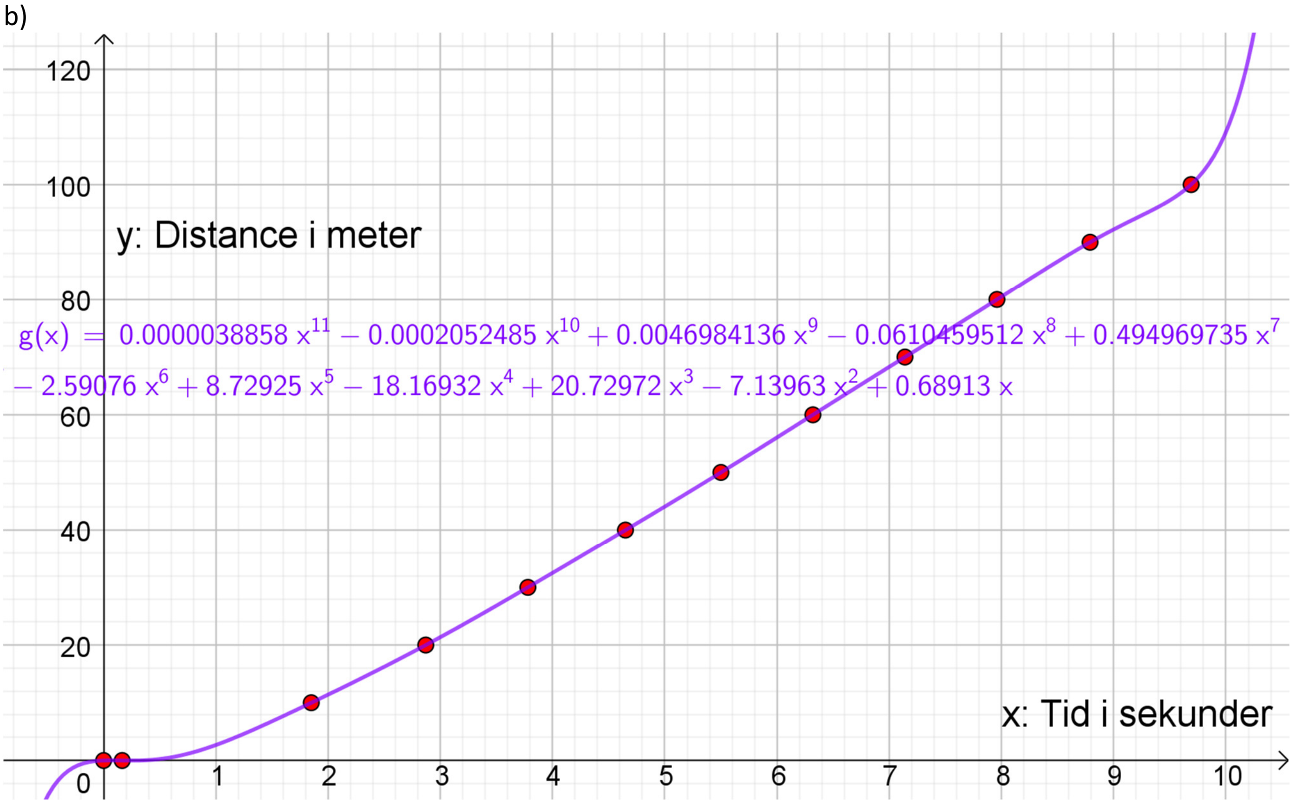
**Øvelse 8.3**

a)

**ISBN 9788770668699**

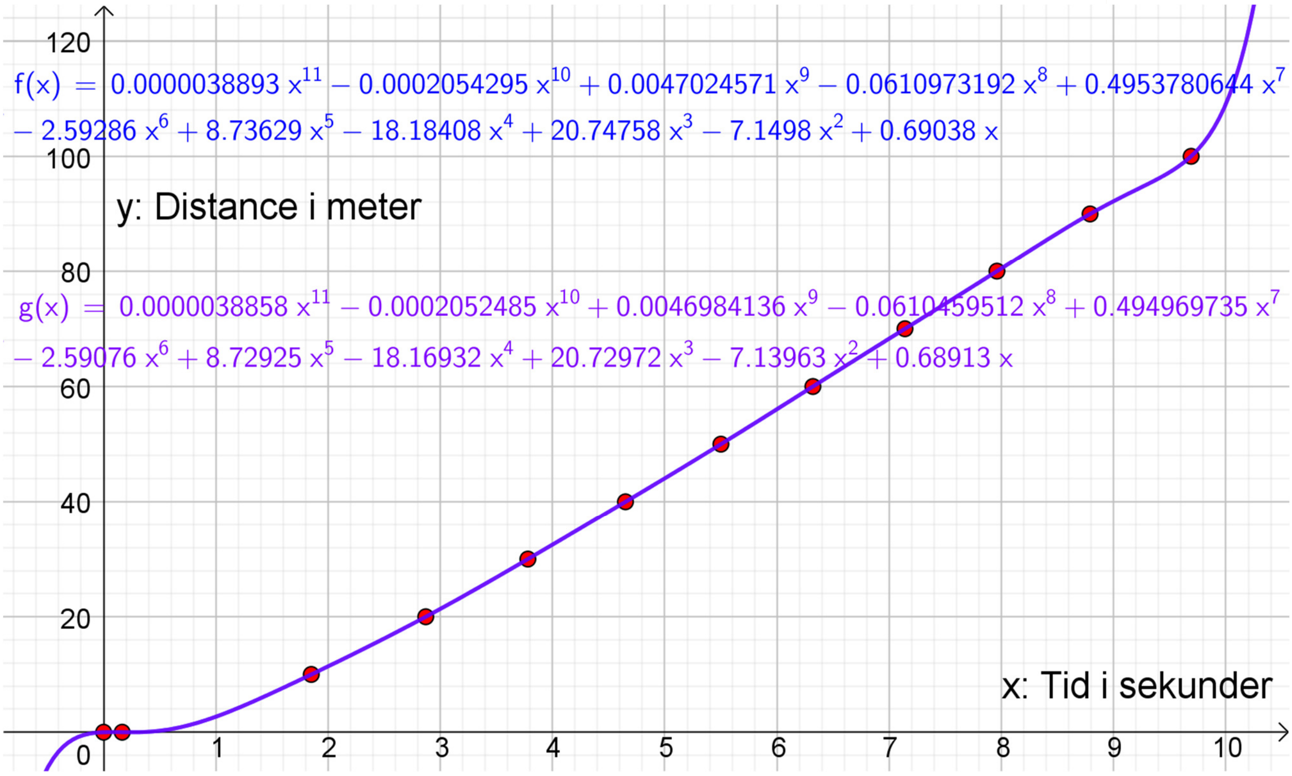

b)




c)

**ISBN 9788770668699**

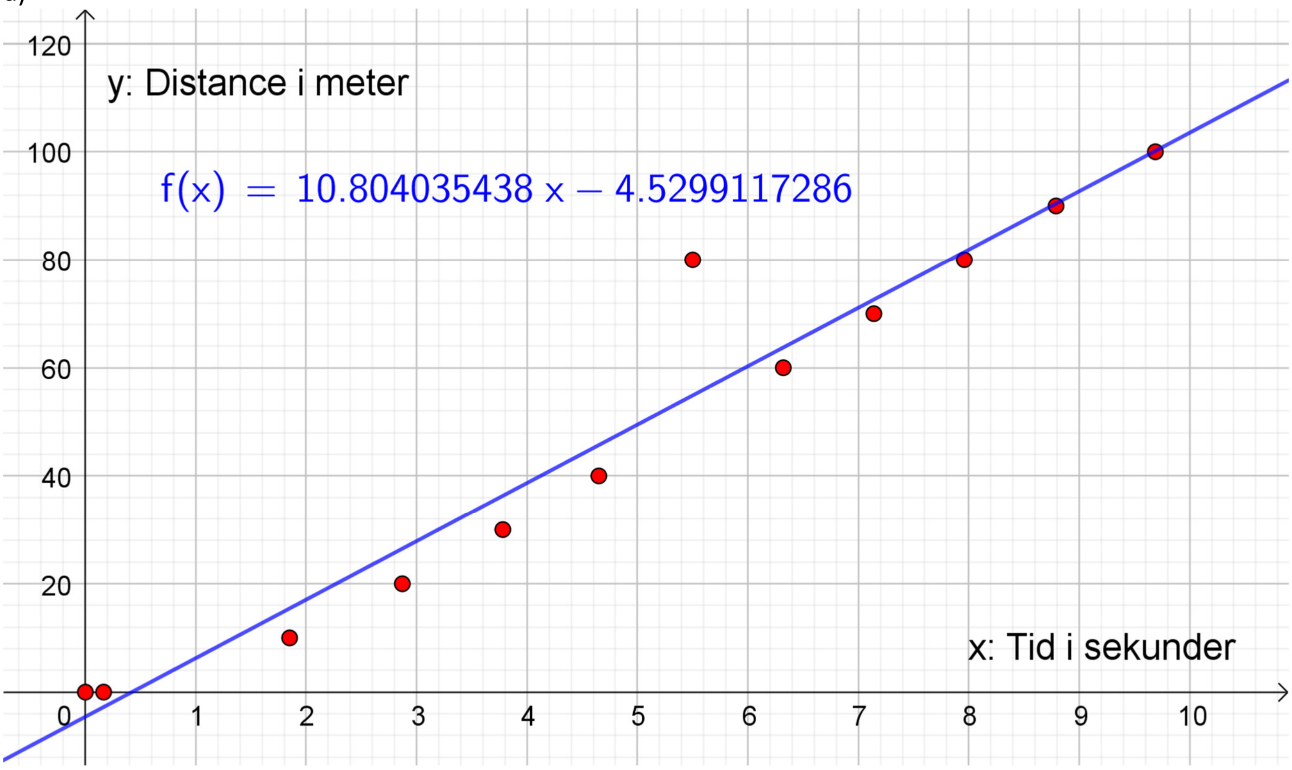





Selvom der er en lille forskel i værdierne af koefficienterne, kan man ikke skelne de to grafer.

**Øvelse 8.4**

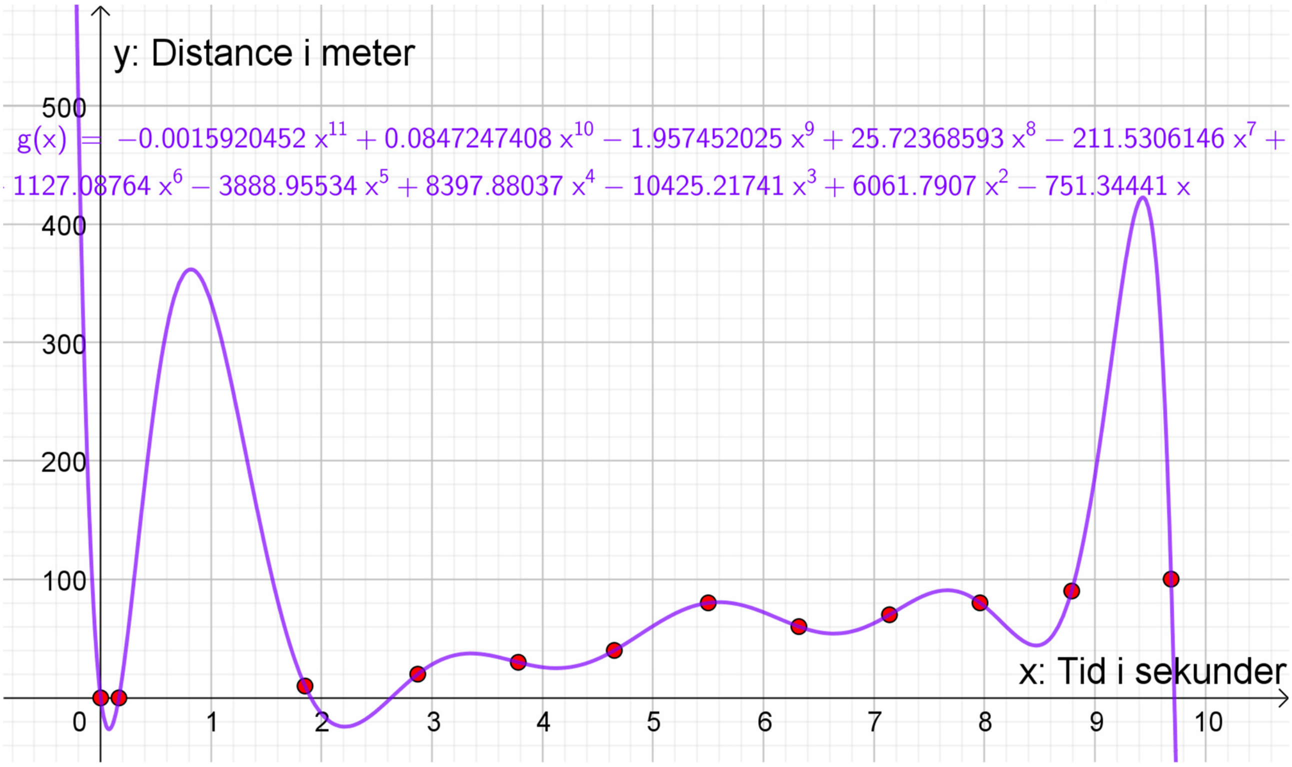
a)



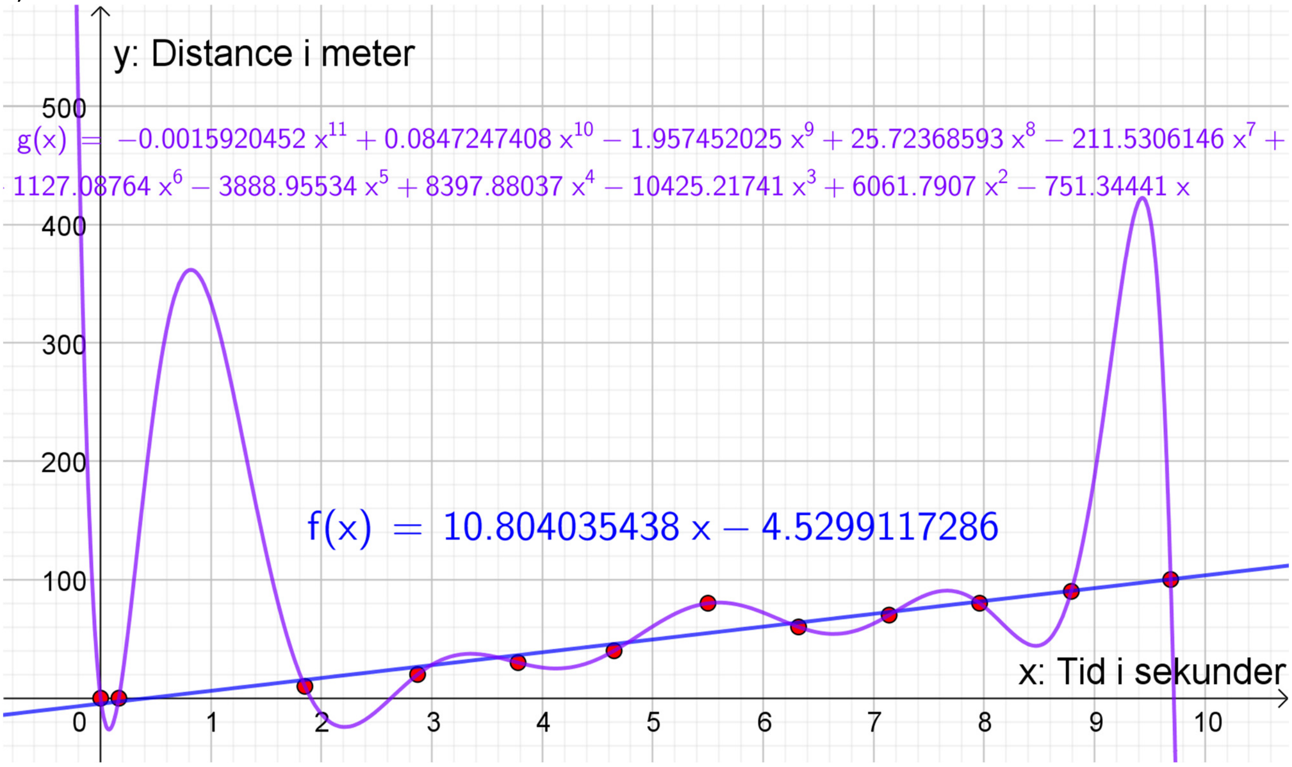

b)

**ISBN 9788770668699**






c)

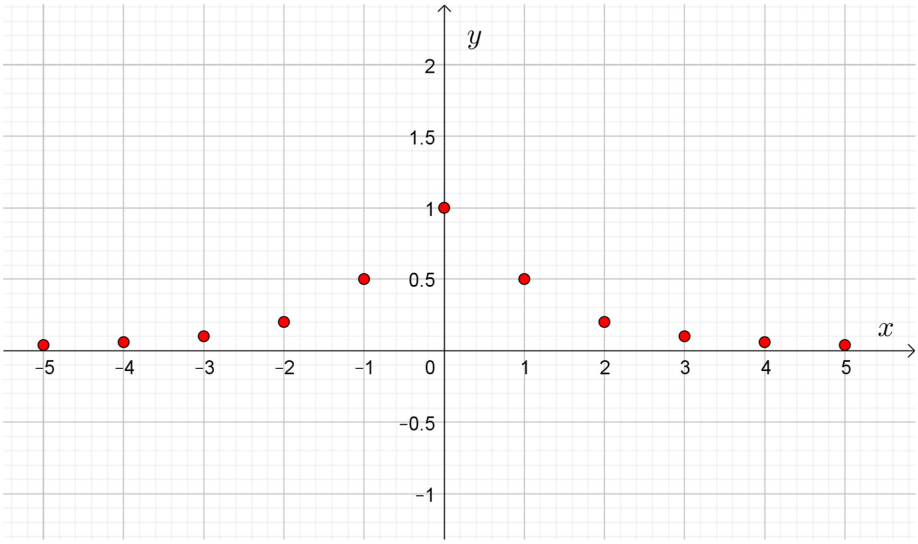



**Øvelse 8.5**

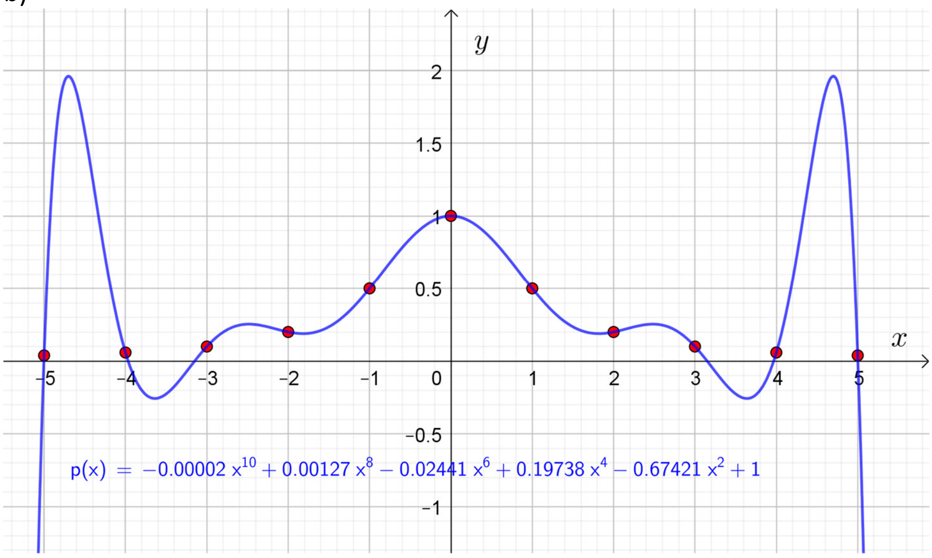
a) (*Bemærk: Som det også ses af graferne er der en fejl i tabellen: Minus skal fjernes foran de første 5 tal*)

Punktplot af de 11 datavøærdier:

**ISBN 9788770668699**


b)




## Øvelse 8.6

a) $f_2(x)=\dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)}$.

$f_3(x)=\dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)}$.

$f_4(x)=\dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)}$.

c) Vi har tilsvarende

$f_2(x_2)=1$ og $f_2(x_1)=f_2(x_3)=f_2(x_4)=0$.

$f_3(x_3)=1$ og $f_3(x_1)=f_3(x_2)=f_3(x_4)=0$.

$f_4(x_4)=1$ og $f_4(x_1)=f_4(x_2)=f_4(x_3)=0$.

d) $f_1(x)=-\dfrac{1}{6}\cdot\left(x^3-3x^2+2x\right)$.

$f_2(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(x^3-2x^2-x+2\right)$.

$f_3(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(x^3-x^2-2x\right)$.

$f_4(x)=\dfrac{1}{6}\cdot\left(x^3-x\right)$.

**ISBN 9788770668699**



## Øvelse 8.7

a) $l_2(x) = y_2 \cdot f_2(x) = y_2 \cdot \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)}$.

$l_3(x) = y_3 \cdot f_3(x) = y_3 \cdot \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)}$.

$l_4(x) = y_4 \cdot f_4(x) = y_4 \cdot \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)}$.

c) $l_1(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(x^3-3x^2+2x\right)$.

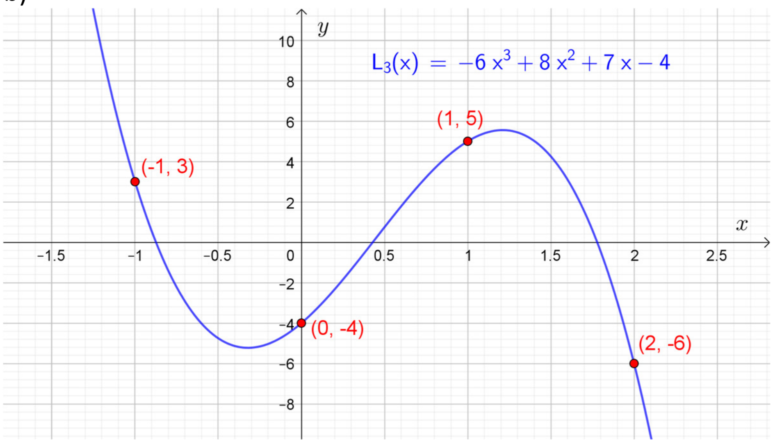
$l_2(x) = -2\cdot\left(x^3-2x^2-x+2\right)$.

$l_3(x) = -\dfrac{5}{2}\cdot\left(x^3-x^2-2x\right)$.

$l_4(x) = -\left(x^3-x\right)$.

## Øvelse 8.8

b)



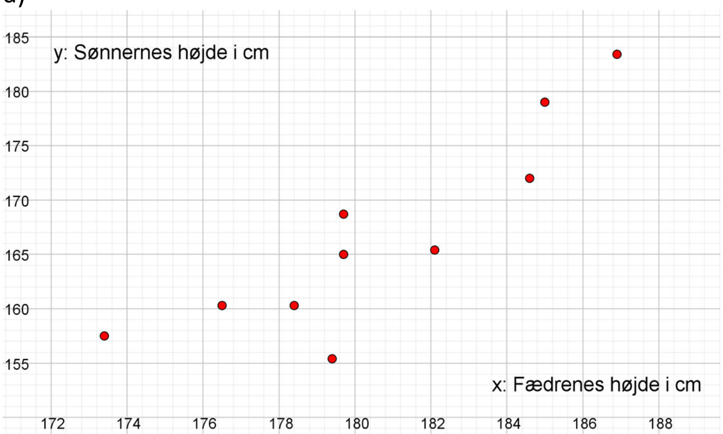

c) Vi har $L_3(-1)=3$, $L_3(0)=-4$, $L_3(1)=5$ og $L_3(2)=-6$.

## Øvelse 8.10

En mulig forklaring er, at linjen har en hældning, der er mindre end 1. Så sønnernes højde stiger ikke lige så hurtigt som fædrenes højde. Tilsvarende falder sønnernes højde ikke lige så hurtigt som fædrenes.

## Øvelse 8.11

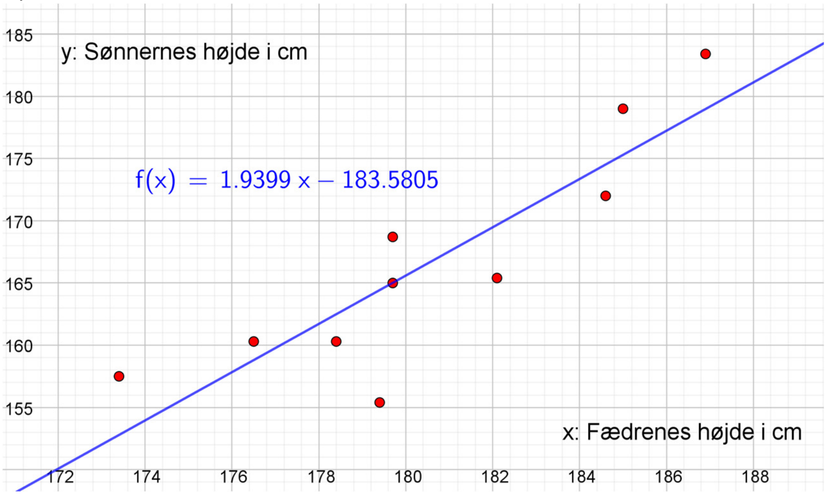
a)



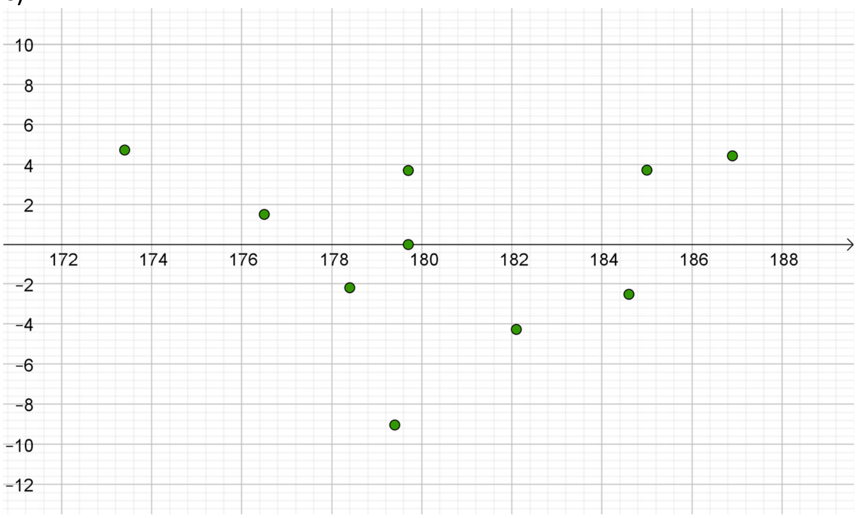

Der ses tydeligt en tendens til, at høje fædre får høje sønner og vice versa. Hvorvidt sammenhængen er lineær, kan man ikke umiddelbart afgøre, men det er dog den simpleste model at anvende, så medmindre der er gode grunde til at vælge noget andet, er det mest oplagt at bruge en lineær model. Men det er også tydeligt, at man ikke kan nøjes med en enkelt forklarende variabel.

**ISBN 9788770668699**


b)




c)



Punkterne i residualplottet er ganske tilfældigt fordelt, så på baggrund af dette, kan vi godt benytte en lineær model.

**Øvelse 8.12**

$\overline{x} = 180{,}57$ og $\overline{y} = 166{,}7$.

$$\hat{a} = \frac{298{,}43}{153{,}841} = 1{,}93986.$$

$\hat{b} = 166{,}7 - 1{,}93986 \cdot 180{,}57 = -183{,}58$.

Det giver den samme formel som i øvelse 8.11.

**Øvelse 8.13**

a)

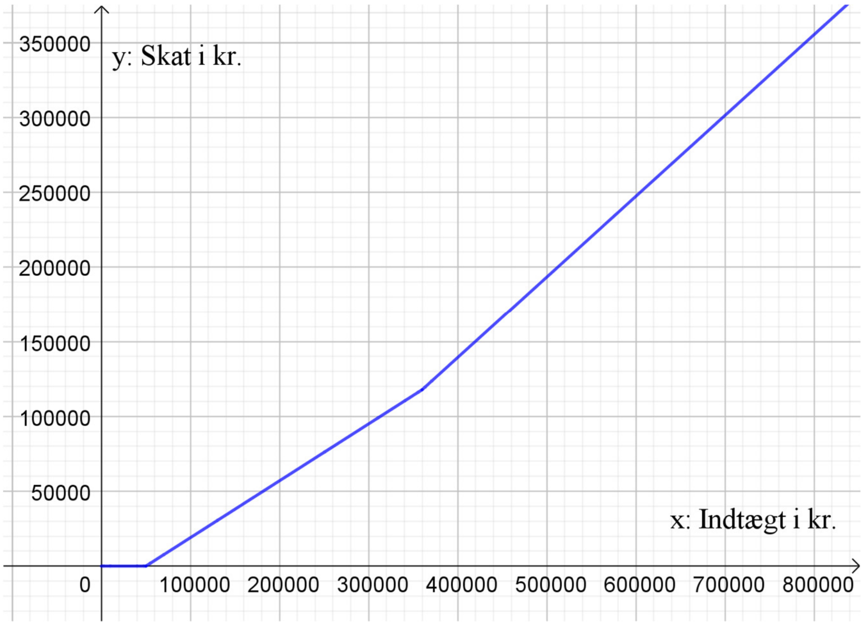
| $x$ | Residual |
|---|---|
| 186,9 | 4,42 |
| 184,6 | -2,52 |
| 185,0 | 3,71 |
| 182,1 | -4,27 |
| 179,4 | -9,03 |
| 178,4 | -2,19 |
| 179,7 | -0,012 |
| 179,7 | 3,69 |
| 176,5 | 1,50 |
| 173,4 | 4,71 |

b) Svaret gives i opgaven

**Øvelse 8.15**
Svaret gives i opgaven

**Øvelse 8.16**
a) Vi lader $x$ betegne indkomsten i kroner, før skat. Videre lader vi $f(x)$ betegne hvor meget man betaler i skat. Indtægten efter skat kan så beregnes ved funktionen $g(x) = x - f(x)$.
Vi opstiller et funktionsudtryk for $f(x)$. Når $x \le 50000$ er $f(x) = 0$.
I intervallet $50000 \le x \le 360000$ skal vi betale 38% af det, der overstiger de 50.000 kr., altså $0{,}38 \cdot (x - 50000)$.
For $x > 360000$ skal vi betale 0% af de første 50.000 kr., 38% af de næste 310.000 kr. og 54% af resten, altså $0{,}38 \cdot 310000 + 0{,}54 \cdot (x - 360000)$.

Dette giver forskriften $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 50000 \\ 0{,}38 \cdot (x - 50000) & 50000 < x \le 360000 \\ 117800 + 0{,}54 \cdot (x - 360000) & x > 360000 \end{cases}$




b) Vi beregner $f(510000) = 117800 + 0{,}54 \cdot (510000 - 360000) = 198800$, altså skal man betale 198.000 kr. i skat, hvis man tjener 510.000 kr. før skat.
c) Vi skal løse ligningen $0{,}45x = f(x)$. Vi får løsningen $x = 851111$, altså skal man betale 45% af sin indkomst i skat, hvis man tjener 851.111 kr.

**Øvelse 8.18**
a) Den grafiske fremstilling kan ses i grundbogen. Vi nøjes med at opstille et funktionsudtryk for de første tre timer:

$$f(t) = \begin{cases} 10 \cdot 0{,}88^{t} & 0 \le t < 1 \\ 18{,}8 \cdot 0{,}88^{t-1} & 1 \le t < 2 \\ 14{,}56 \cdot 0{,}88^{t-2} & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

Hvor $t$ er tiden i timer og $f(t)$ medicinmængden i mg.
b) Medicinindholdet ser ud til at stabilisere sig på et bestemt niveau.
c) Efter $n$ timer, hvor $n$ er et helt tal, har vi lige tilført 10 mg. For en time siden tilførte vi også 10 mg, hvoraf der nu er $10 \cdot 0{,}88$ mg tilbage. For to timer siden tilførte vi også 10 mg, hvoraf der nu er $10 \cdot 0{,}88^2$ mg tilbage. Den samlede mængde medicin i kroppen er derfor $10 + 10 \cdot 0{,}88 + 10 \cdot 0{,}88^2 + \cdots + 10 \cdot 0{,}88^n$ mg.

**Øvelse 8.19**

**ISBN 9788770668699**


$15° = \frac{\pi}{12} = 0{,}2618$.

$30° = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$.

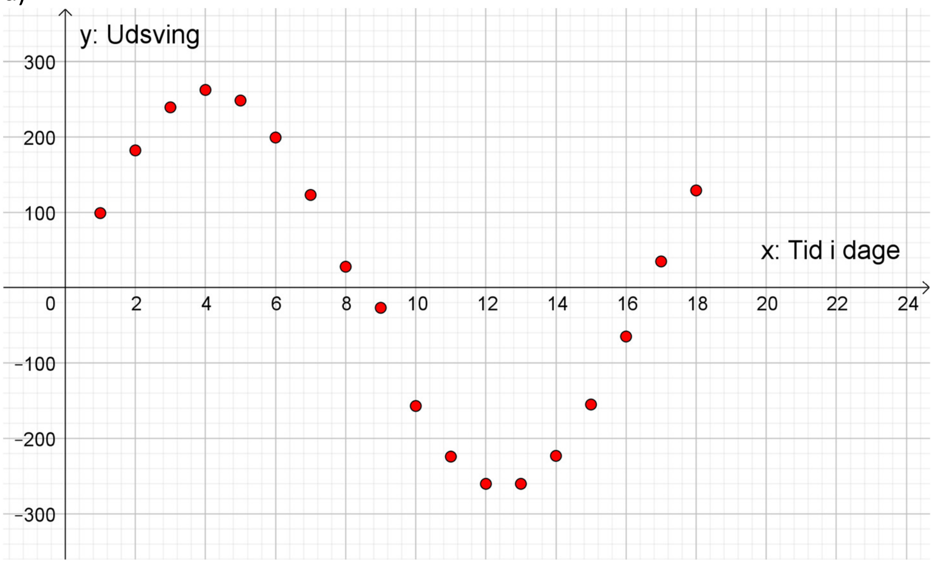
$45° = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$.

$60° = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$.

$90° = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$.

**Øvelse 8.20**

a)

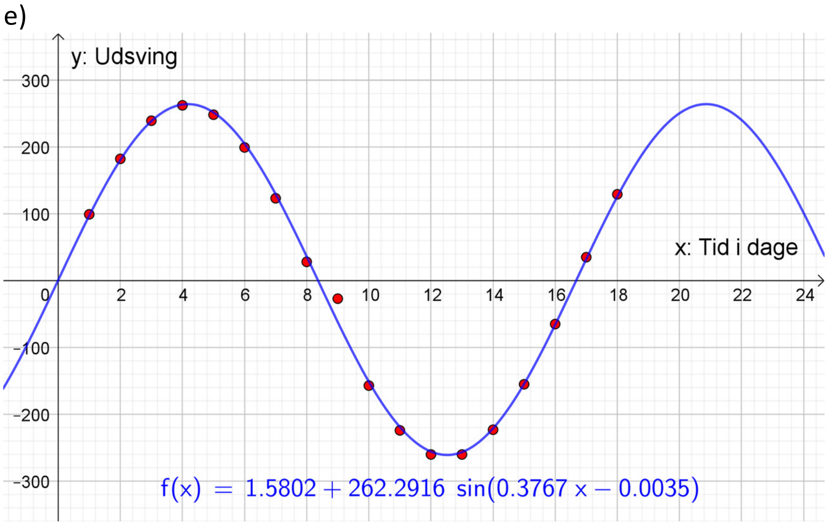



b) Det maksimale og minimale udsving er ca. $\pm 265$.

c) En periode ser ud til at være lidt over 16 dage.

d) Omløbstiden er ifølge Wikipedia på 16 dage og 16,5 timer.

e)




f) Tallet 262 er amplituden, altså størrelsen af udsvinget i hver retning. Tallet 1,58 betyder, at grafen er forskudt op med 1,58 i forhold til en almindelig sinussvingning, som vil være symmetrisk omkring $x$-aksen.

**Øvelse 8.21**

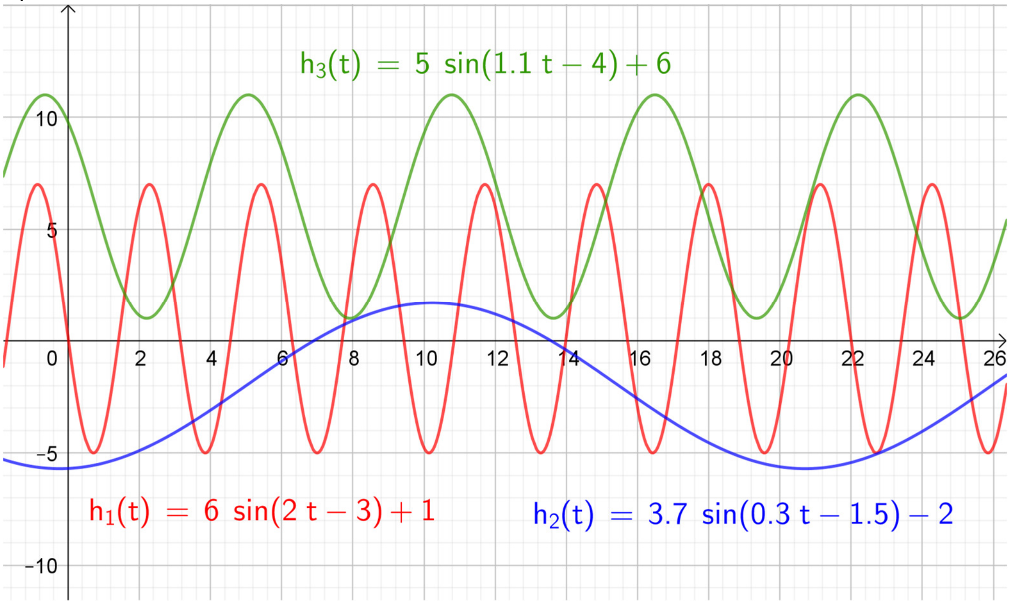
a) $h_1$: $A = 6$, $\omega = 2$, $\varphi = -3$ og $B = 1$.

$h_2$: $A = 3{,}7$, $\omega = 0{,}3$, $\varphi = -1{,}5$ og $B = -2$.

$h_3$: $A = 5$, $\omega = 1{,}1$, $\varphi = -4$ og $B = 6$.

**ISBN 9788770668699**


b)




$h_1$ har perioden 3,1416 dvs. $\pi$.

$h_2$ har perioden 20,944 .

$h_3$ har perioden 5,712 .

**Øvelse 8.22**

b)

Den mindst mulige værdi for sinus er $-1$ og den størst mulige værdi er $1$. Maksimum fås derfor ved at sætte sinus til $1$, altså $h_{\max} = A + B$. Minimum fås ved at sætte sinus til $-1$, altså $h_{\min} = -A + B$.

c) Ud fra formlerne fra b) kan vi beregne

$$h_{\max} + h_{\min} = A + B - A + B = 2B$$

og

$$h_{\max} - h_{\min} = A + B + A - B = 2A$$

hvoraf vi får

$$B = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2}$$

og

$$A = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2}.$$

d) Jo større vinkelhastighed, jo mindre periode, og vice versa.

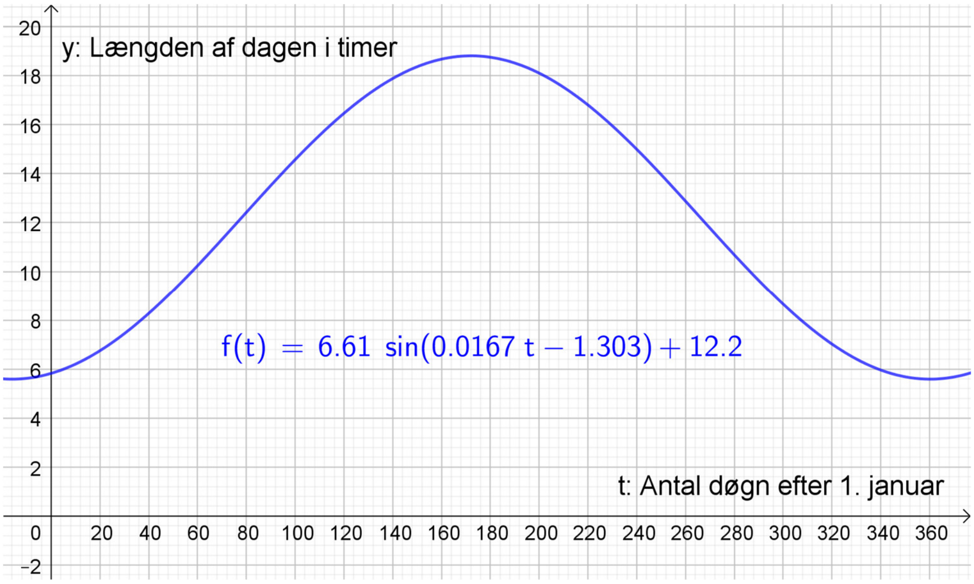
**Øvelse 8.23**

$T$ isoleres, så vi har en omløbstid på $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}3767} = 16{,}68$ dage.

**Øvelse 8.24**

a)

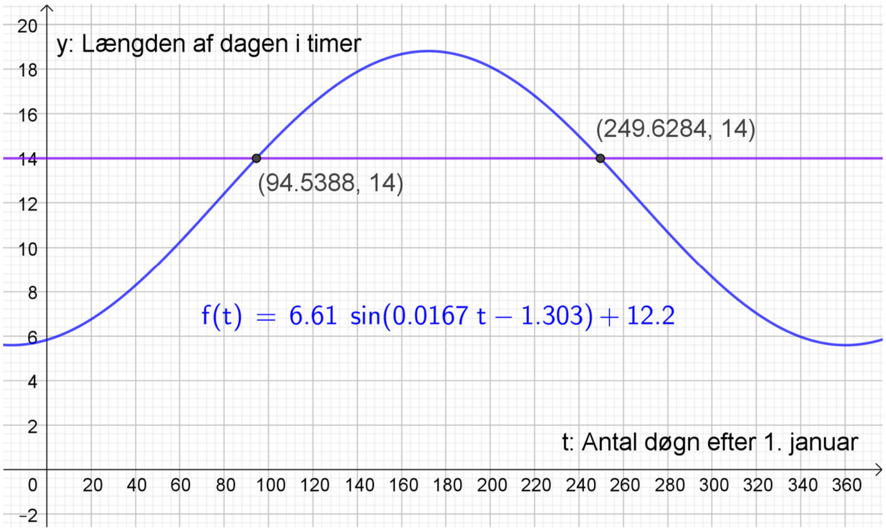
**ISBN 9788770668699**


Intervallet går til 365, da der er 365 dage på et år.

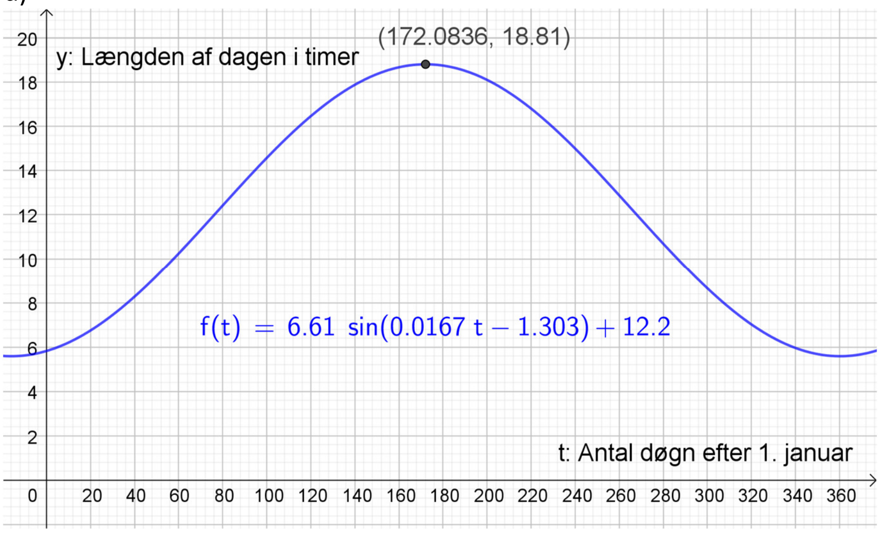
b) $f(100) = 14{,}57$ så dagen har en længde på 14,57 timer.

c) Vi finder skæringspunkterne med linjen $y = 14$.




Vi får løsningerne $t = 94{,}54$ og $t = 249{,}63$. Dvs. 95 og 250 dage efter 1. januar vil dagslængden være 14 timer.

d)




Vi har grafisk fundet maksimaet til at være 18,81, og det sker ved $t = 172$, dvs. 172 dage efter 1. januar er dagens længde maksimal.

**Øvelse 8.25**

**ISBN 9788770668699**


4. trin: Da $f(1{,}25)$ er negativ udregner vi

$$m_3 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375 \text{ og } f(m_3) = f(1{,}375) = -0{,}109 .$$

5. trin: Da $f(1{,}375)$ er negativ udregner vi

$$m_4 = \frac{1{,}375+1{,}5}{2} = 1{,}4375 \text{ og } f(m_4) = f(1{,}4375) = 0{,}0664 .$$

b)

6. trin: Da $f(1{,}4375)$ er positiv udregner vi

$$m_5 = \frac{1{,}375+1{,}4375}{2} = 1{,}40625 \text{ og } f(m_5) = f(1{,}40625) = -0{,}0225 .$$

7. trin: Da $f(1{,}40625)$ er negativ udregner vi

$$m_6 = \frac{1{,}40625+1{,}4375}{2} = 1{,}421875 \text{ og } f(m_6) = f(1{,}421875) = 0{,}0217 .$$

8. trin: Da $f(1{,}421875)$ er positiv udregner vi

$$m_7 = \frac{1{,}40625+1{,}421875}{2} = 1{,}4140625 \text{ og } f(m_7) = f(1{,}4140625) = -0{,}000427 .$$

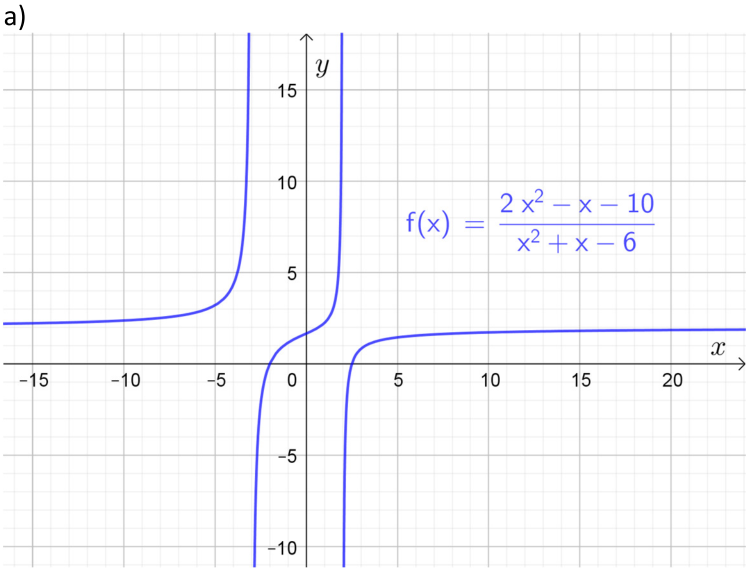
9. trin: Da $f(1{,}4140625)$ er negativ udregner vi

$$m_3 = \frac{1{,}4140625+1{,}421875}{2} = 1{,}41796875 \text{ og } f(m_8) = f(1{,}41796875) = 0{,}0106 .$$

Vores sidste bud på kvadratroden af 2 er således 1,418, dog kan vi se, at vi allerede i trin 8 havde en bedre tilnærmelse.

**Øvelse 8.27**

a)




b) Definitionsmængden for $f$ består af alle reelle tal bortset fra $2$ og $-3$ hvor andengradspolynomiet i nævneren har rødder. Grafisk betyder det, at grafen for $f$ har lodrette asymptoter ved $x=2$ og $x=-3$.

c) Så nærmer grafen sig den vandrette linje $y=2$, som altså er en vandret asymptote for grafen.

d) Divisionen går ikke op. Computeren svarer $\frac{2x^2-x-10}{x^2+x-6} = \frac{2x^2}{x^2+x-6} - \frac{x}{x^2+x-6} - \frac{10}{x^2+x-6}$. Når $x$ er numerisk stor, går de to sidste led mod 0, mens første led går mod 2, hvilket forklarer den vandrette asymptote.