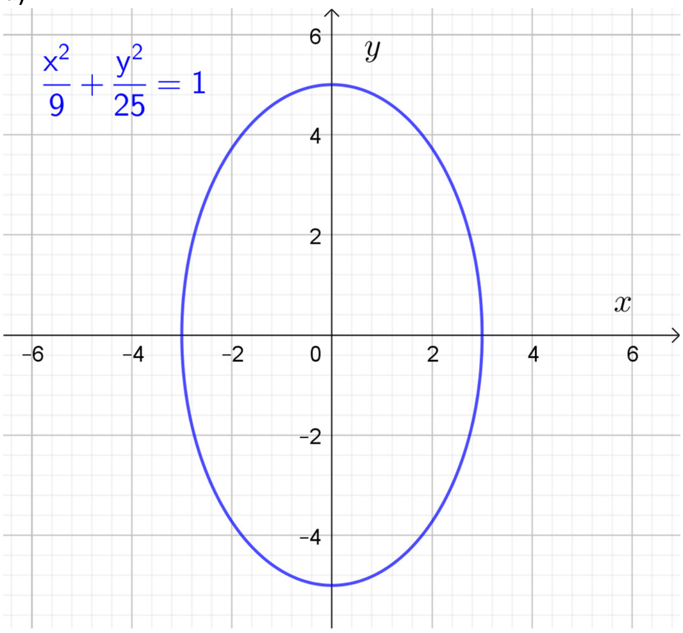
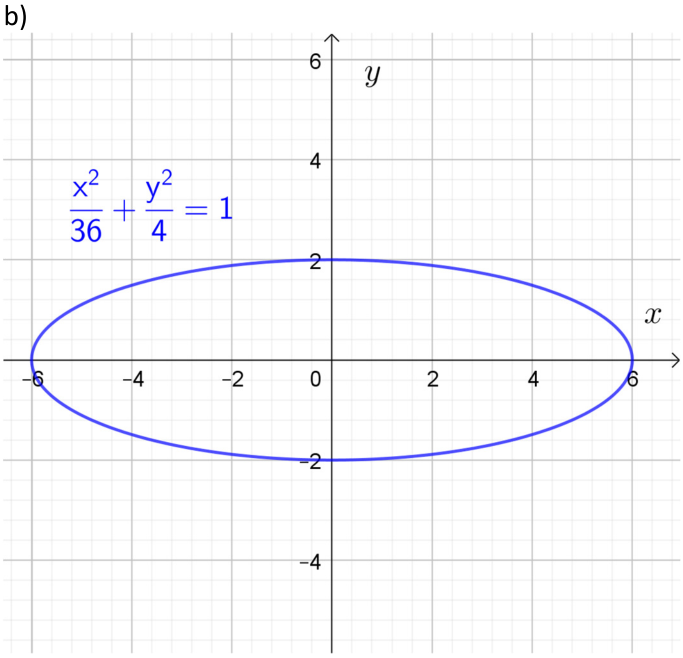
Løsninger til øvelser i kapitel 7

Øvelse 7.1
Sæt hver ende af snoren fast i et brændpunkt, f.eks. med en tegnestift. Stram snoren vha. din blyant og lad blyanten køre på papiret, mens snoren holdes stram. Eller se her: https://youtu.be/7UD8hOs-vaI

Øvelse 7.4
a)



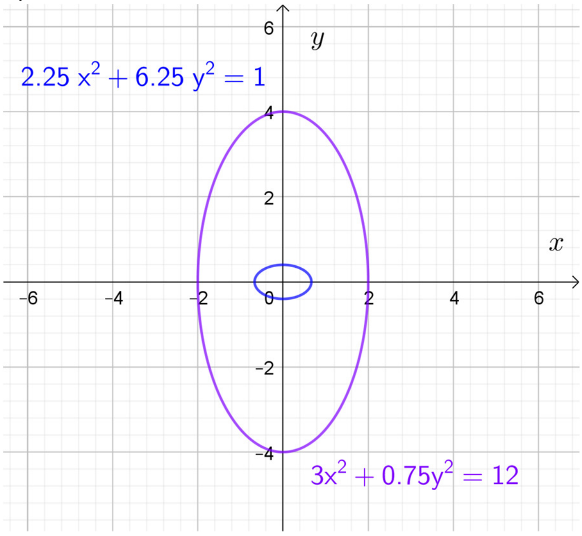
b)



ISBN 9788770668699

Øvelse 7.5

a)



b) Ellipse 1 har en storakse på $\frac{4}{3}$. Ellipse 2 har en storakse på 8.

Øvelse 7.6

a) Vi har $e = \frac{CF_1}{a}$ og $a > CF_1$, dvs. e er et tal mellem 0 og 1.

b) Hvis $e = 0$ er der tale om en cirkel. Jo tættere e er på 1, jo mere fladtrykt er ellipsen.

c) Vi har $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

I 1) er $a = 5$ og $b = 3$. Det giver $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

I 2) er $a = 6$ og $b = 2$. Det giver $e = \frac{\sqrt{8}}{3} = 0{,}94$.

d)

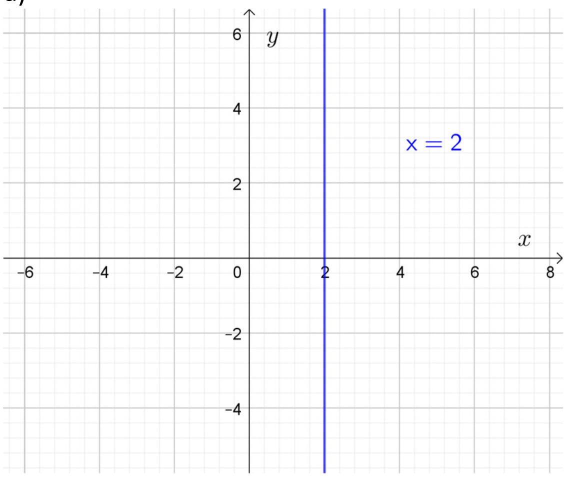
For Jorden: $a = 1$ AE og $CF_1 = 0{,}0167$ AE og $e = 0{,}0167$.

For Mars: $a = 1{,}5235$ AE og $CF_1 = 0{,}1425$ AE og $e = 0{,}0935$.

For Pluto: $a = 39{,}4815$ AE og $CF_1 = 9{,}8235$ AE og $e = 0{,}249$.

Øvelse 7.7

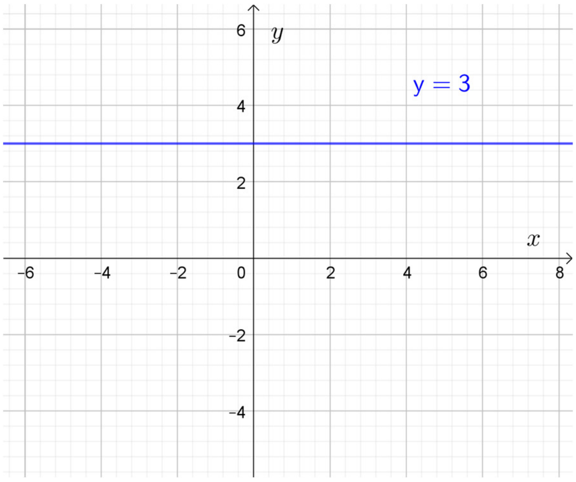
a)



En lodret linje. Kan ikke optræde som grafen for en funktion.

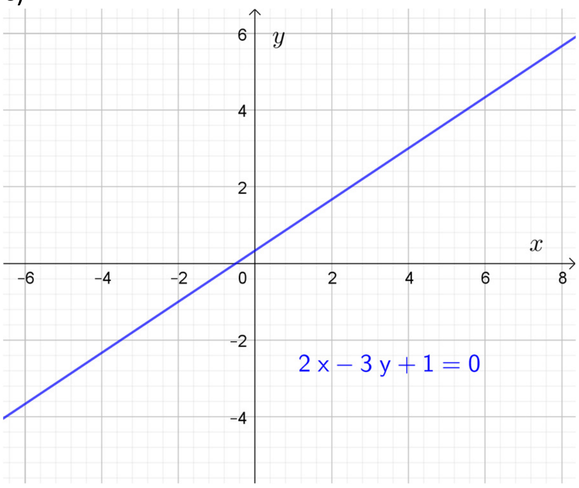
b)

ISBN 9788770668699



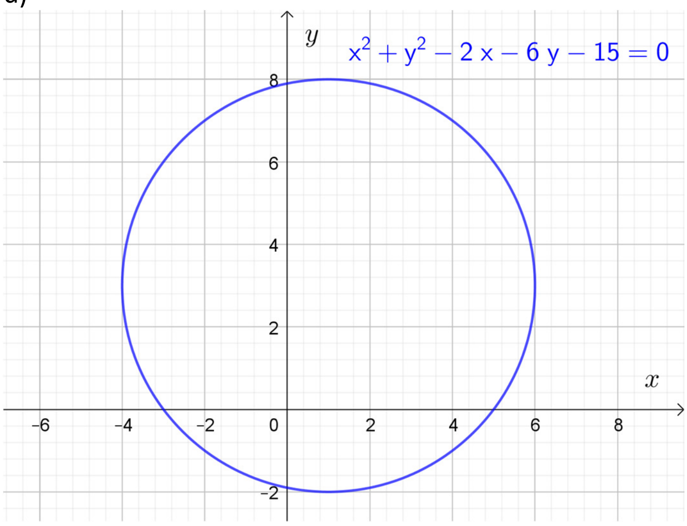
En vandret linje. Kan godt optræde som grafen for en funktion, nemlig funktionen $f(x)=3$.

c)



En skrå ret linje. Kan godt optræde som grafen for en funktion, nemlig funktionen $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

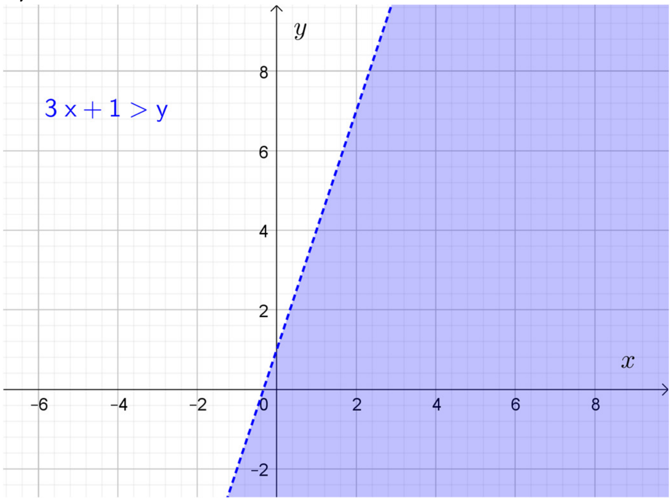
d)



En cirkel med centrum $(1,3)$ og radius 5. Kan ikke optræde som grafen for en funktion.

ISBN 9788770668699

e)



Halvplan bestående af alle punkter, der ligger under linjen med ligningen $y=3x+1$. Kan ikke optræde som grafen for en funktion.

Øvelse 7.8

Se http://www.lr-web.dk/Lru/microsites/hvadermatematik/hem2download/kap7_QR9_oevelse_7_8_KBH_Politigaard.pdf

Øvelse 7.10

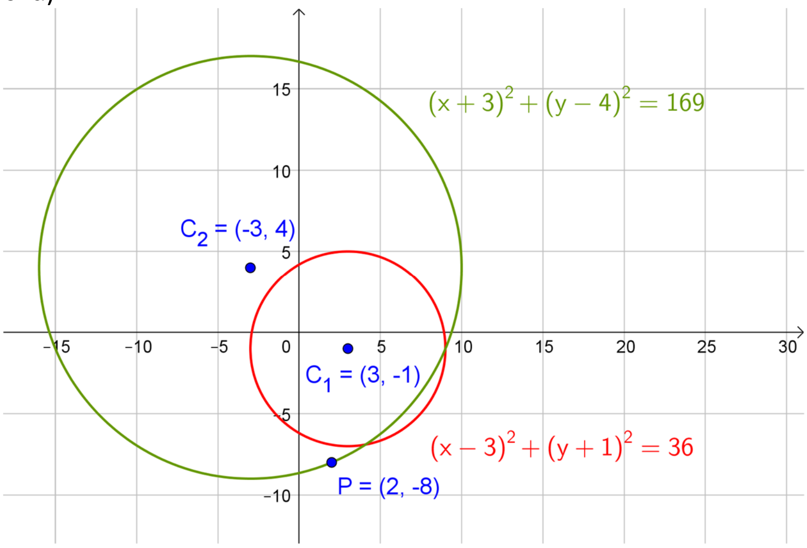
a) $(x-3)^2+(y+1)^2=36$.

b) $\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -8-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

$\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$.

$(x+3)^2+(y-4)^2=169$.

c+d)



Øvelse 7.11

$(x-51)^2+(y-46)^2=578$.

Øvelse 7.13

a) Ligningen kan omskrives til $(x-1)^2+(y-4)^2=-8$. Der er ingen punkter, der tilfredsstiller denne ligning.

b) Ligningen kan omskrives til $(x-6)^2+(y+2)^2=7$. Ligningen beskriver en cirkel med centrum i $(6,-2)$ og radius $\sqrt{7}$.

c) Ligningen kan omskrives til $(x+3)^2+(y-1)^2=0$. Det er kun punktet $(-3,1)$, der tilfredsstiller denne ligning.

L&R Uddannelse EGMONT

Øvelse 7.14

a) Ligningen kan omskrives til $(x-6)^2+(y+4)^2=49$. Ligningen beskriver en cirkel med centrum i $(6,-4)$ og radius 7.

b) Ligningen kan omskrives til $(x-1)^2+(y+2)^2=0$. Det er kun punktet $(1,-2)$, der tilfredsstiller denne ligning.

c) Ligningen kan omskrives til $(x-1)^2+(y+3)^2=-34$. Der er ingen punkter, der tilfredsstiller denne ligning.

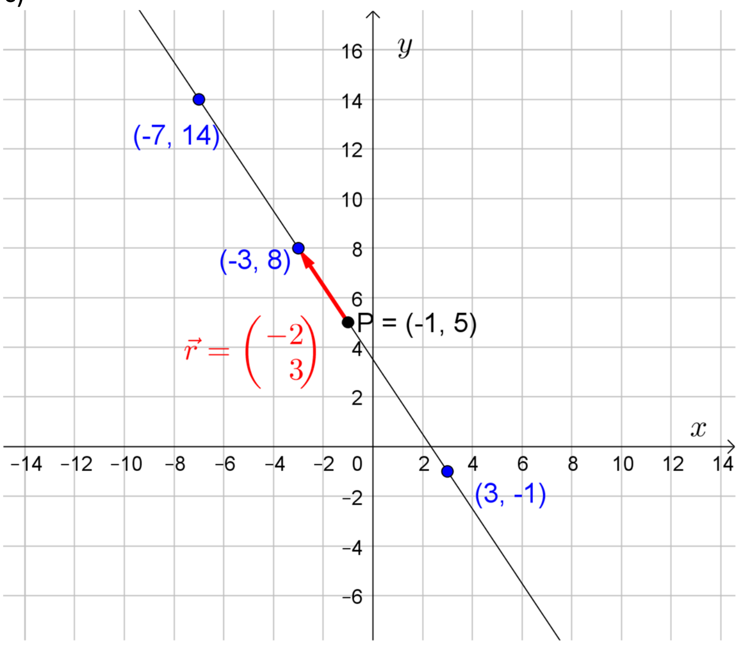
d) Ligningen kan omskrives til $(x+4)^2+(y-3)^2=-75$. Der er ingen punkter, der tilfredsstiller denne ligning.

Øvelse 7.16

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hvor $t\in\mathbb{R}$.

b) $t=-2$ giver $(3,-1)$.
$t=1$ giver $(-3,8)$.
$t=3$ giver $(-7,14)$.

c)



d) $t=0$.

Øvelse 7.18

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

En parameterfremstilling for m er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ hvor $t\in\mathbb{R}$.

Tilføjes betingelsen $0\leq t\leq 1$, er det en parameterfremstilling for linjestykket AB.

Øvelse 7.19

$l_{AD}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 125 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 21 \\ -117 \end{pmatrix}$ hvor $t\in\mathbb{R}$.

$m_{BC}:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 65 \\ 0 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 68 \\ 121 \end{pmatrix}$ hvor $t\in\mathbb{R}$.

Øvelse 7.20

a) $l:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 \\ 21 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 53 \\ -21 \end{pmatrix}$ hvor $t\in\mathbb{R}$.

b) $BD: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 21 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -21 \end{pmatrix}$ hvor $t \in [0;1]$.

c) $\overrightarrow{AB}$ har længden $\sqrt{1117}$, så hvis vi dividerer $\overrightarrow{AB}$ med denne længde, får vi en enhedsvektor med samme retning som $\overrightarrow{AB}$. Vi får altså $\overrightarrow{r_m} = \begin{pmatrix} \frac{26}{\sqrt{1117}} \\ \frac{21}{\sqrt{1117}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0{,}77796 \\ 0{,}62833 \end{pmatrix}$.

d) $AB: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{26}{\sqrt{1117}} \\ \frac{21}{\sqrt{1117}} \end{pmatrix}$ hvor $t \in [0;\sqrt{1117}]$.

Øvelse 7.21

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hvor $t \in \mathbb{R}$.

b) $y = \frac{1}{7}x + \frac{37}{7}$.

Øvelse 7.22

Hvis $a_l \cdot a_m = -1$ gælder det om retningsvektorerne $\begin{pmatrix} 1 \\ a_l \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ a_m \end{pmatrix}$ for de to linjer, at skalarproduktet er 0. Dermed er retningsvektorerne ortogonale. Det følger, at linjerne også er ortogonale.

Øvelse 7.24

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hvor $t \in \mathbb{R}$.

b) Hældningskoefficienten er $-\frac{1}{4} = -0{,}25$.

c) Ja, de to linjer er ortogonale, da produktet af deres hældningskoefficienter er -1.

Øvelse 7.25

$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vi kan så bruge tværvektoren $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ som retningsvektor for linjen.

En parameterfremstilling for tangenten er derfor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ hvor $t \in \mathbb{R}$.

Øvelse 7.27

a) En normalvektor til linjen er $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Et punkt på linjen er $(3,-1)$.

b) Sættes $x = 0$ i linjens ligning fås $2 \cdot (0-3) + 5 \cdot (y+1) = 0$.
Ligningen løses for y.
$-6 + 5y + 5 = 0$
$5y - 1 = 0$

ISBN 9788770668699

$5y = 1$

$y = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Andenkoordinaten til det punkt på linjen, hvor førstekoordinaten er 0, er 0,2.

c) Vi sætter $y = 0$ i linjens ligning og løser for x.

$2\cdot(x-3)+5\cdot(0+1)=0$

$2\cdot x-6+5=0$

$2\cdot x-1=0$

$2\cdot x=1$

$x=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Linjen skærer x-aksen i punktet med koordinaterne $(0{,}5;0)$.

Øvelse 7.29

$l_{AD}: 117x+21y-2625=0$.

$m_{BC}: -121x+68y+7865=0$.

Øvelse 7.30

a) På normalform: $5(x-2)+3(y+1)=0$.

På udvidet form: $5x+3y-7=0$.

Øvelse 7.31

a) En normalvektor til linjen er $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. Et punkt på linjen er $(-1,-1)$.

b) En normalvektor til linjen er $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Et punkt på linjen er $(-4,0)$.

c) En normalvektor til linjen er $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Et punkt på linjen er $(-3,0)$.

Øvelse 7.32

P og R ligger på linjen. Q ligger ikke på linjen.

Øvelse 7.33

a) Ingen af punkterne ligger på linjen.

b) Vektoren $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ er normalvektor til l, og derfor også normalvektor til enhver linje, der er parallel med l. På normalform får vi derfor ligningen $3(x-1)+(y-2)=0$. På udvidet form får vi $3x+y-5=0$.

Øvelse 7.34

a) Der gælder $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$. Vektor $\overrightarrow{PQ}$ følger linjen og er derfor parallel med linjen.

b) Tværvektoren er ortogonal med $\overrightarrow{PQ}$. Da $\overrightarrow{PQ}$ er parallel med linjen, er tværvektoren også ortogonal med linjen. Altså er tværvektoren en normalvektor til linjen.

c) En ligning for m kan opskrives ved at benytte tværvektoren $\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ til $\overrightarrow{PQ}$ som normalvektor. Faktisk kan vi benytte enhver vektor parallel med denne, f.eks. vektoren $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Som fast punkt kan vi benytte enten P eller Q. Lad os bruge $P(2,-1)$. Dette giver os ligningen $-(x-2)+y+1=0$ eller $-x+y+3=0$.

Øvelse 7.35

Linjen: Vi sætter først $x=0$. Det giver ligningen $-6y-18=y$. Løsningen hertil er $y=-3$. Dvs. linjen skærer y-aksen i punktet med koordinaterne $(0,-3)$.
Vi sætter dernæst $y=0$. Det giver ligningen $3x-18=y$. Løsningen hertil er $x=6$. Dvs. linjen skærer x-aksen i punktet med koordinaterne $(6,0)$.
Cirklen: Vi sætter først $x=0$. Det giver ligningen $(-2)^2+(y+1)^2=81$. Vi isolerer y heri:

$(y+1)^2=77$

$y+1=\pm\sqrt{77}$

$y=\pm\sqrt{77}-1$

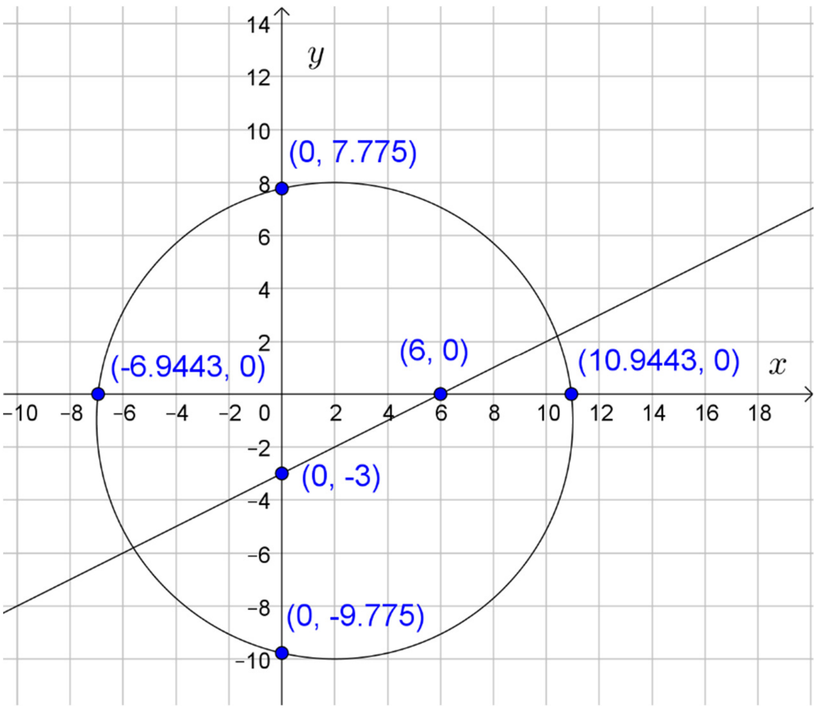
Dvs. cirklen skærer y-aksen i punkterne $(0,\sqrt{77}-1)$ og $(0,-\sqrt{77}-1)$.
Vi sætter dernæst $y=0$. Det giver ligningen $(x-2)^2+1=81$. Vi isolerer x heri:

$(x-2)^2=80$

$x-2=\pm\sqrt{80}$

$y=\pm\sqrt{80}+2$

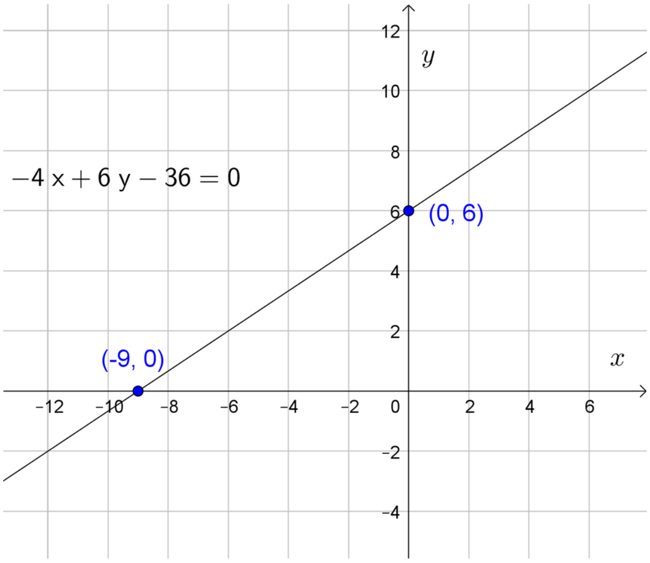
Dvs. cirklen skærer x-aksen i punkterne $(\sqrt{80}+2,0)$ og $(-\sqrt{80}+2,0)$.
Skæringspunkterne er vist på figuren nedenfor.



Øvelse 7.36

To punkter på linjen er $(-9,0)$ og $(0,6)$.

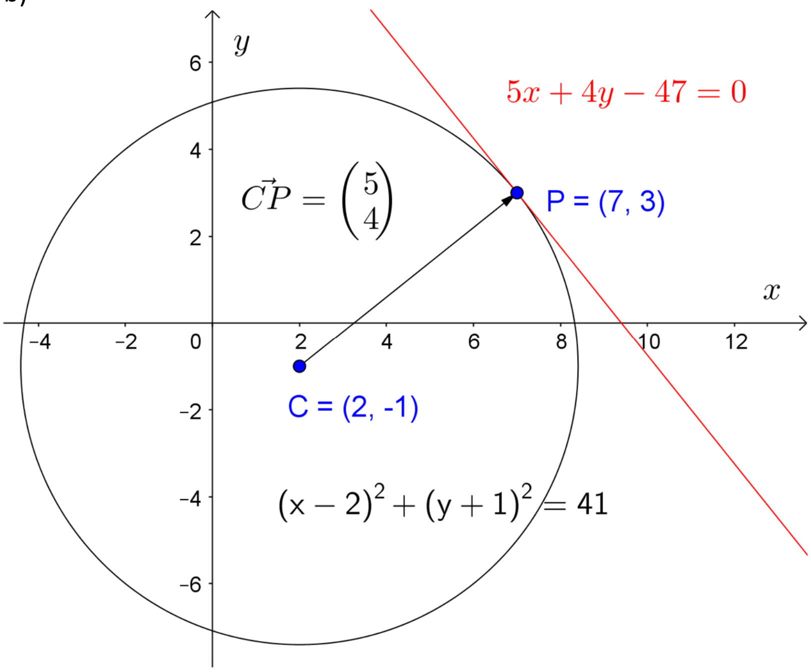
ISBN 9788770668699



Øvelse 7.38

a) Cirklen har centrum i punktet $C(2,-1)$. Vektoren $\overrightarrow{CP}$ er givet ved $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Denne vektor er en normalvektor til tangenten. Vi indsætter derfor i normalformen for linjens ligning og får ligningen $5(x-7)+4(y-3)=0$ som ligning for tangenten i P. På udvidet form bliver det $5x+4y-47=0$.

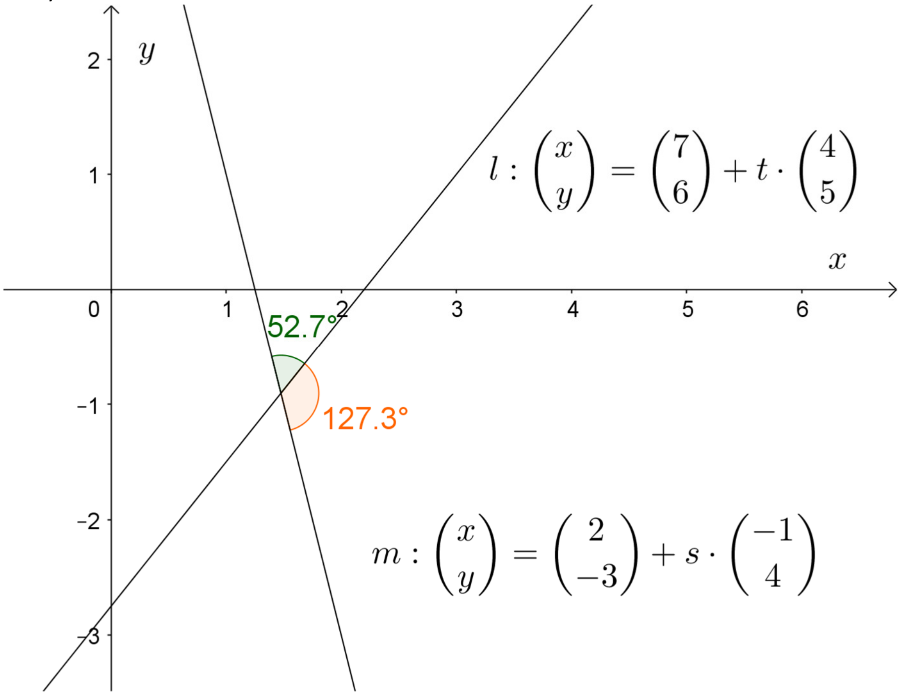
b)



ISBN 9788770668699

Øvelse 7.39

a+b)



Den spidse vinkel er $52{,}7°$ og den stumpe vinkel er $127{,}3°$.

Øvelse 7.40

De to normalvektorer er begge drejet 90 grader i forhold til linjerne. Der er derfor den samme vinkel mellem normalvektorerne som mellem linjerne. Afhængig af valget af normalvektorer, får man enten den spidse eller den stumpe vinkel mellem linjerne, når man bestemmer vinklen mellem normalvektorerne.

Øvelse 7.42

a) Den spidse vinkel er $62{,}1°$ og den stumpe vinkel er $117{,}9°$.

b) Den spidse vinkel er $82{,}23°$ og den stumpe vinkel er $97{,}77°$.

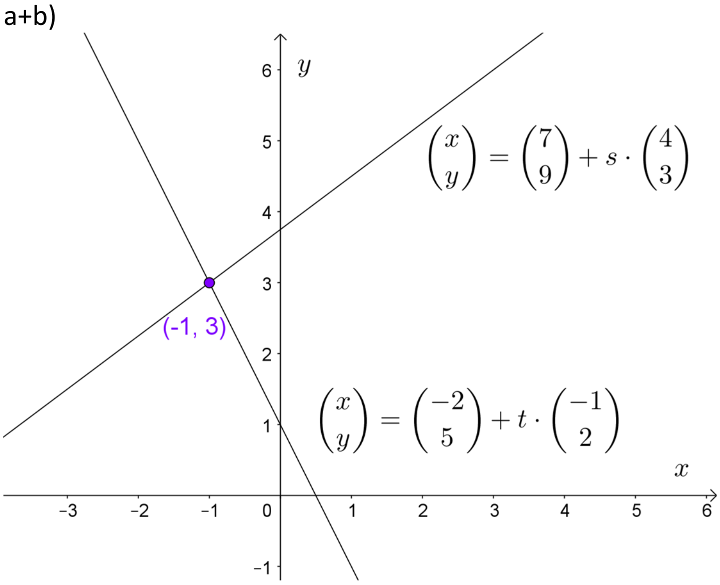
c) Den spidse vinkel er $53{,}33°$ og den stumpe vinkel er $126{,}67°$.

Øvelse 7.43

Den spidse vinkel er $39{,}51°$ og den stumpe vinkel er $140{,}49°$.

Øvelse 7.44

a+b)



e) $t=-1$ og $s=-2$.

ISBN 9788770668699

Øvelse 7.45

a) $m:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

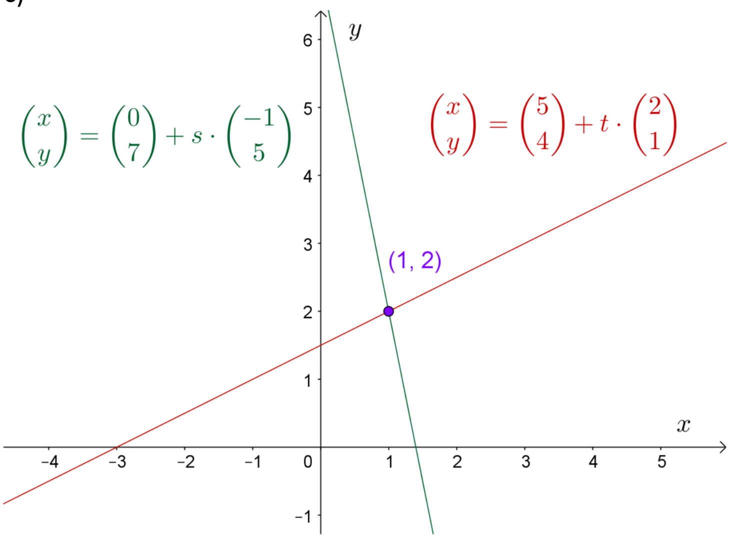
b) Vi får ligningssystemet

$5+2t=-s$

$4+t=7+5s$

Løsningen til dette ligningssystem er $t=-2$ og $s=-1$. Indsættes disse parameterværdier i de respektive parameterfremstillinger, får man i begge tilfælde punktet $(1,2)$, som altså er skæringspunktet for linjerne.

c)



Øvelse 7.46

Skæringspunktet er $\left(-\dfrac{14}{3},-\dfrac{16}{3}\right)$. Eller med koordinaterne som decimaltal, $(-4{,}67;-5{,}33)$.

Øvelse 7.47

a) Linjen l har vektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ som normalvektor. Denne vektor er derfor retningsvektor for den stiplede linje vinkelret på l. Den vinkelrette linje har derfor parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Indsættes koordinatfunktionerne $x=12-4t$ og $y=23+9t$ i ligningen for l, får vi ligningen

$-4(12-4t)+9(23+9t)+5=0$

$-48+16t+207+81t+5=0$

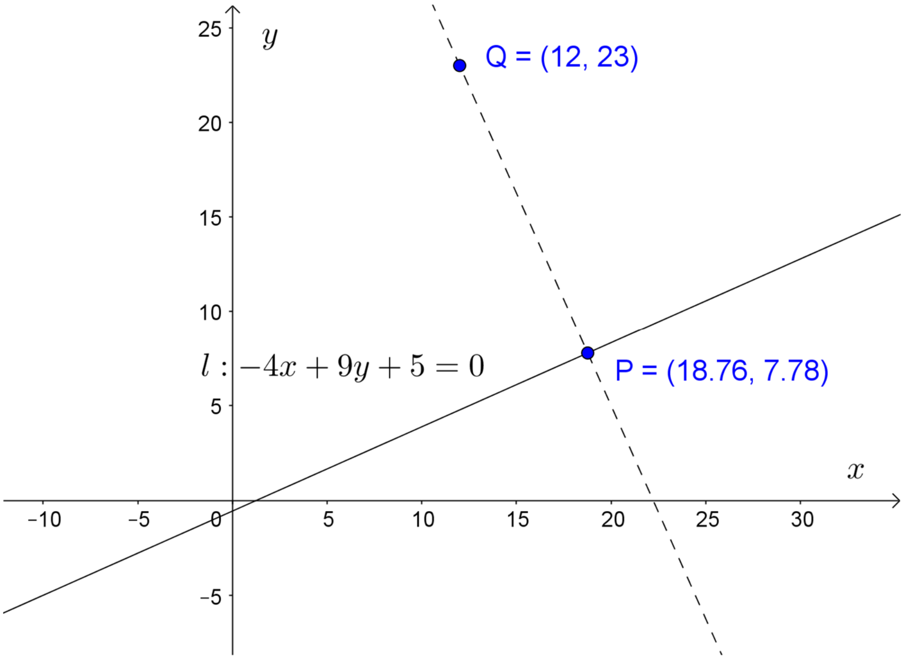
$97t+164=0$

$t=-\dfrac{164}{97}=-1{,}6907$

Indsættes denne parameterværdi i parameterfremstillingen, får vi skæringspunktet $(18{,}76;7{,}78)$.

b)

ISBN 9788770668699



Øvelse 7.48

$S = (32{,}739; -57{,}405)$.

Øvelse 7.50

Vi indsætter koordinatfunktionerne fra parameterfremstillingen i cirklens ligning og får ligningen

$(1+3t-2)^2 + (6+3t-3)^2 = 16$

$(3t-1)^2 + (3t+3)^2 = 16$

Vi bruger kvadratsætningerne

$9t^2 - 6t + 1 + 9t^2 + 18t + 9 = 16$

$18t^2 + 12t - 6 = 0$

Vi dividerer med 6,

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

Andengradsligningen har løsningerne $t = -1$ og $t = \frac{1}{3}$. Indsættes disse parameterværdier i parameterfremstillingen, får vi punkterne $(-2,3)$ og $(2,7)$.

Øvelse 7.51

Vi sætter $x = 0$ for at finde skæringspunkterne med y-aksen.

$(0-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

$9 + (y-1)^2 = 25$

$(y-1)^2 = 16$

$y - 1 = \pm\sqrt{16}$

$y = \pm 4 + 1$

$y = 5$ eller $y = -3$

Dvs. cirklen skærer y-aksen i punkterne med koordinaterne $(0,5)$ og $(0,-3)$.

Vi sætter $y = 0$ for at finde skæringspunkterne med x-aksen.

$(x-3)^2 + (0-1)^2 = 25$

$(x-3)^2 + 1 = 25$

$(x-3)^2 = 24$

$x - 3 = \pm\sqrt{24}$

ISBN 9788770668699

$x = \pm\sqrt{24} + 3$

$x = 7{,}9$ eller $x = -1{,}9$

Dvs. cirklen skærer x-aksen i punkterne med koordinaterne $(7{,}9;0)$ og $(-1{,}9;0)$.

Øvelse 7.53

(*Bemærk: Cirklens centrum, der her betegnes C er i øvelse 7.8 betegnet Q, med koordinater* $(51{,}56)$)

Afstanden fra Q til l_{AD} er $36{,}24$.

Afstanden fra Q til m_{BC} er $34{,}74$.

Øvelse 7.54

a) Afstanden fra punktet til linjen er $\frac{|2\cdot(-4)+6\cdot 5+3|}{\sqrt{2^2+6^2}} = \frac{25}{\sqrt{40}} = 3{,}95$.

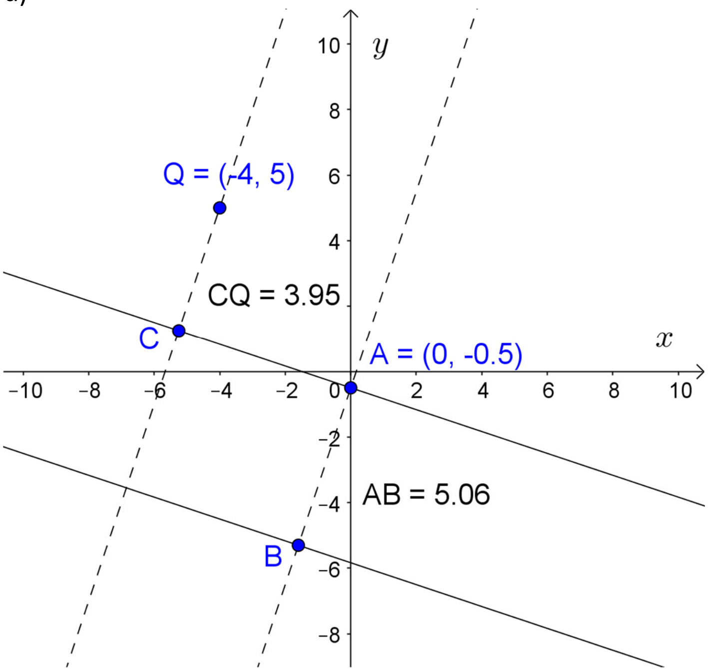
b) Hvis linjerne er parallelle, er deres normalvektorer også parallelle. Vi kan derfor beregne determinanten af de to vektorer, og vise, at den giver 0.

$$\det\left(\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}\right) = 2\cdot(-12)-(-4)\cdot 6 = -24+24 = 0.$$

c) Vi benytter punktet $(0;-0{,}5)$ som ligger på m, og beregner afstanden til l som

$$\frac{|-4\cdot 0-12\cdot(-0{,}5)-70|}{\sqrt{(-4)^2+(-12)^2}} = \frac{|6-70|}{\sqrt{16+144}} = \frac{|-64|}{\sqrt{160}} = \frac{64}{\sqrt{160}} = 5{,}06.$$

d)



Øvelse 7.55

a) Cirklens centrum er $(2,1)$. Afstanden herfra til linjen beregnes ved

$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot 1-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

Da cirklens radius er 5, og afstanden fra centrum til linjen er mindre end 5, vil linjen skære cirklen i to punkter.

b)

ISBN 9788770668699