ISBN 9788770668699

Løsninger til øvelser i kapitel 6

Øvelse 6.1

a) Når $x=\frac{b}{a}$ har vi fordoblet begyndelsesværdien b.

Når $x=\frac{3b}{a}$ har vi en y-værdi på $4b$, og vi har foretaget to fordoblinger. Fra $x=\frac{b}{a}$ til $x=\frac{3b}{a}$ er der $\frac{2b}{a}$, som er så lang 'tid' det tager at fordoble $2b$. Den næste fordoblingstid bliver så $\frac{4b}{a}$. Dvs. fordoblingstiden vokser hele tiden, og afhænger altså af, hvilken værdi vi starter i.

b) For hver fordobling ganges begyndelsesværdien med 2. Så ved 10 fordoblinger ganges begyndelsesværdien med 2^{10}. Ved 20 fordoblinger ganges begyndelsesværdien med 2^{20}. Ved 30 fordoblinger ganges begyndelsesværdien med 2^{30}. Ved n fordoblinger ganges begyndelsesværdien med 2^{n}.

c) I en aritmetisk progression, lægges en fast størrelse til hele tiden, og væksten bliver derfor lineær. I en geometrisk progression ganges (skaleres) med den samme faktor hele tiden, og væksten bliver derfor eksponentiel.

Øvelse 6.2

I år 2018 er der gået 188 år siden 1830. Befolkningstallet skulle derfor ifølge Mathus' model være på $4\cdot 1{,}025^{188}=415$ mio. mennesker.

Til sammenligning er befolkningstallet i Belgien i år 2018 ifølge eurostat på 11,4 mio. mennesker. Der er altså en meget stor forskel mellem modellen og virkeligheden.

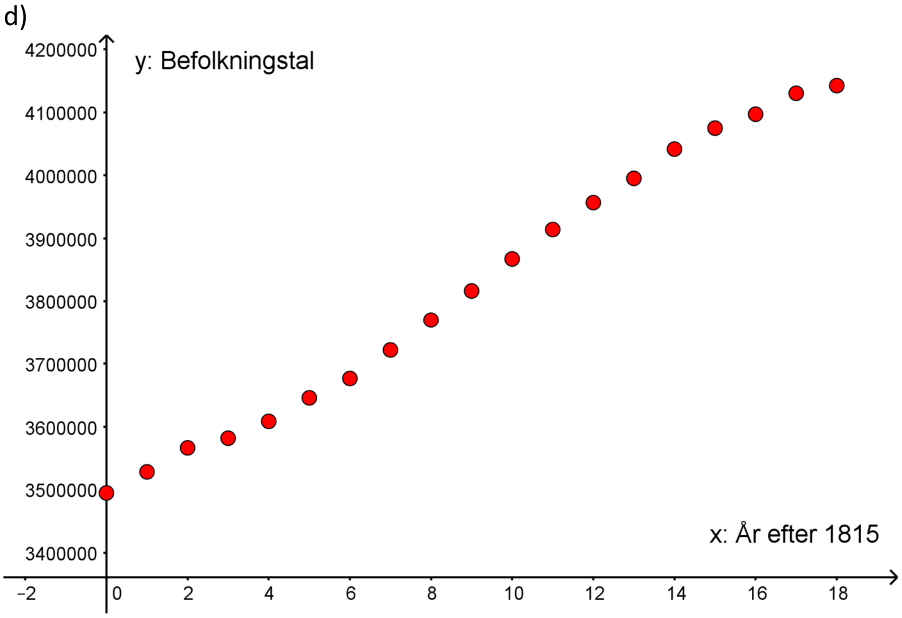
Øvelse 6.3

a) I første kolonne er årstallet. I anden kolonne er befolkningstallet i Belgien, og nedenunder stigningen i befolkningstallet det pågældende år. I tredje kolonne modellens bud på befolkningstallet, samt stigningen i befolkningstallet. I fjerde kolonne er den relative afvigelse af modellens bud fra det faktiske befolkningstal, skrevet som decimaltal.

b) I første kolonne er årstallet. I anden kolonne er antallet af fødsler. I tredje kolonne er antallet af dødsfald. I fjerde kolonne er befolkningstilvæksten, beregnet som differensen mellem antallet af fødsler og antallet af dødsfald.

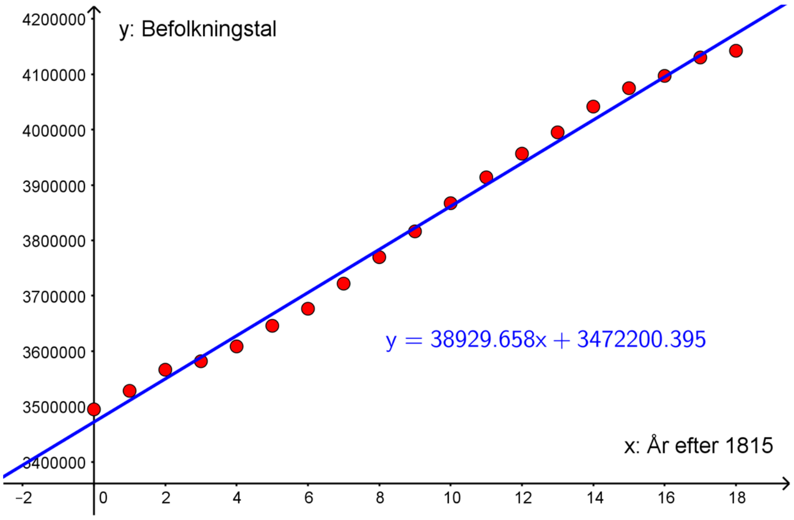
c) Nogle år, f.eks. 1817, 1818, 1830 og 1832, er befolkningstilvæksten meget lav. Det kan f.eks. skyldes krig, sygdomsepidemier eller hungersnød.

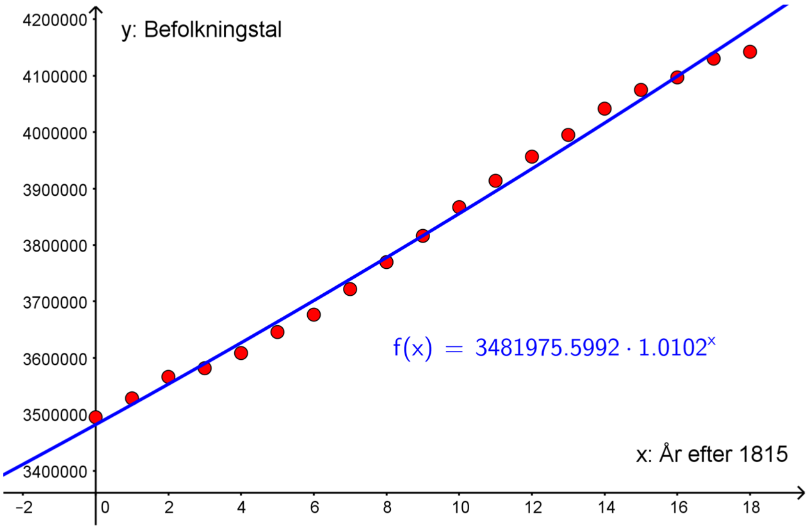
d)



e)

ISBN 9788770668699





Både den eksponentielle og den lineære regressionsgraf beskriver punkterne nogenlunde, om end de ikke opfanger den bugtende opførsel af punkterne. Hvis vi tror på, at befolkningstallet efterhånden stagnerer, vil begge modeller dog komme til kort, eftersom de begge vokser ubegrænset.

Øvelse 6.4

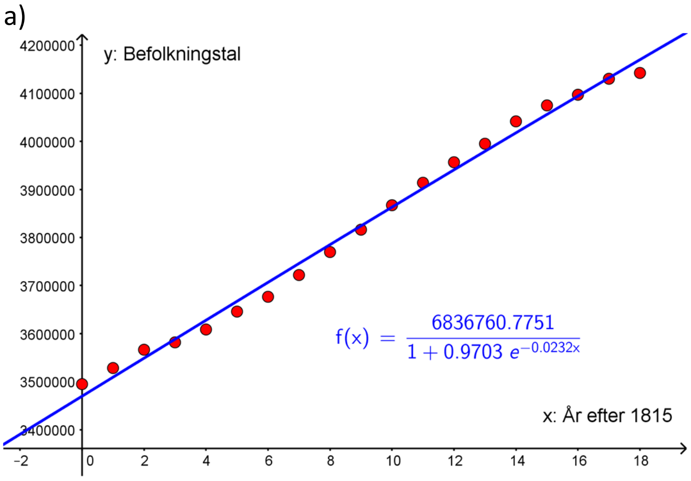
a) Der er tale om eksponentialfunktioner med fast vækstrate (og dermed fremskrivningsfaktor) og variabel begyndelsesværdi c (svarende til grafens skæring med andenaksen).

b) $y' = c \cdot r \cdot e^{r \cdot t}$.

c) $c \cdot r \cdot e^{r \cdot t} = r \cdot c \cdot e^{r \cdot t}$. Da ligningen er sand, er funktionen en løsning til differentialligningen.

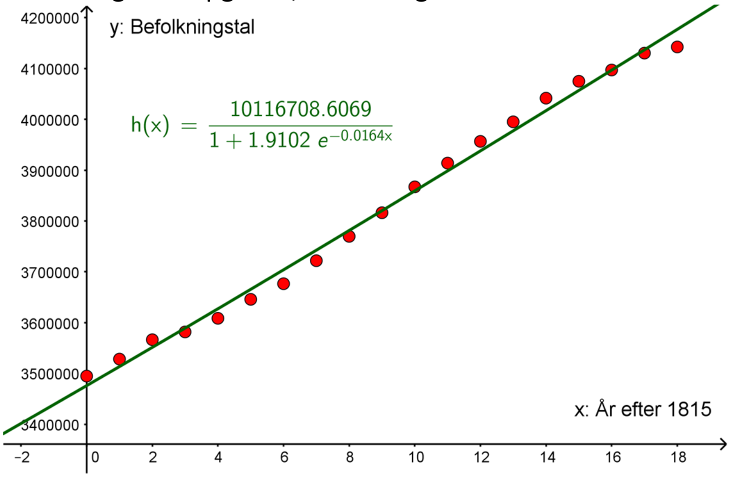
Øvelse 6.5

a)



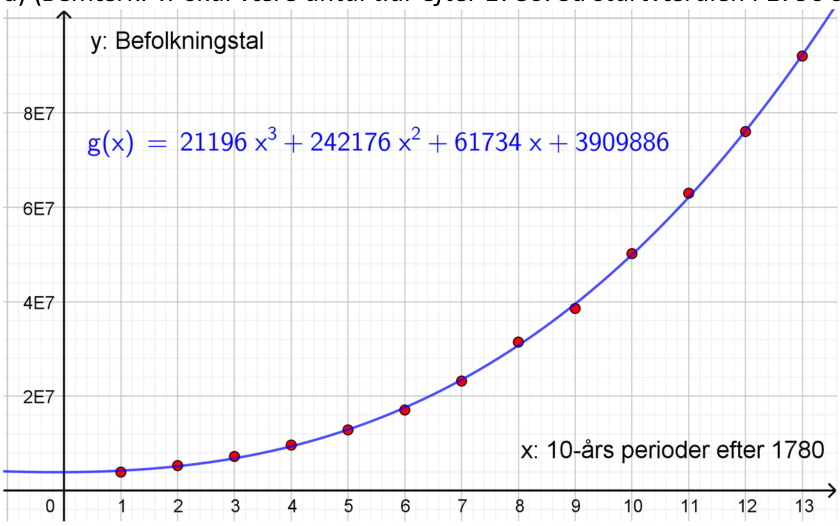
ISBN 9788770668699

Bemærk at t er erstattet af x i forskriften og det grafiske billede.
Værktøjsprogrammer har det ofte svært med logistisk regression. GeoGebra giver umiddelbart en anden funktionsforskrift, end den der er oplyst i opgaven. Hvis man giver GeoGebra nogle parameterværdier tæt på dem, der er angivet i opgaven, kan man godt få den samme forskrift:

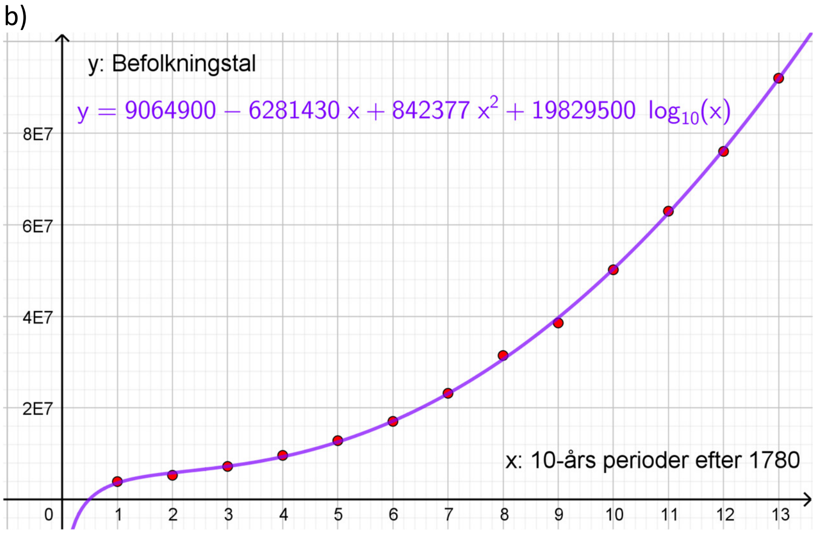


b) Udtrykket $1{,}91 \cdot e^{-0{,}0164t}$ er en aftagende eksponentialfunktion, og vil derfor nærme sig 0, når t bliver meget stor. Nævneren i udtrykket for den logistiske funktion vil derfor nærme sig 1, og hele den logistiske funktion vil derfor nærme sig $M = 10{,}12$, når t bliver meget stor.
c) Fjerner man de tre først punkter, giver GeoGebra $M = 5{,}14$. Fjerner man de to sidste punkter, kan man få stort set hvad som helst som bæreevne, afhængig af hvilke begyndelsesværdier for parametrene man angiver.

Øvelse 6.7
a) (*Bemærk: x skal være antal tiår efter 1780. Så startværdien i 1790 skal være 1.*)

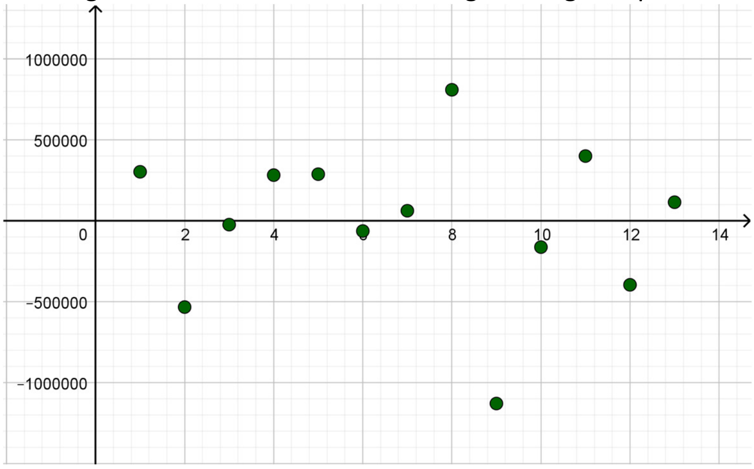


b)



ISBN 9788770668699

Der er god overensstemmelse mellem grafen og datapunkterne. Det fremgår bl.a. af nedenstående residualplot.



c) Når x bliver stor vil y (befolkningstallet) vokse ud over alle grænser i begge modeller. Dog vil det vokse hurtigst ved anvendelse af tredjegradspolynomiet.

Øvelse 6.8

a)

1. Når x går mod uendelig, vil grafen nærme sig den vandrette linje med ligningen $y=k$.
2. Når x går mod minus uendelig, vil grafen nærme sig den vandrette linje med ligningen $y=0$.
3. Grafen har et vendepunkt i punktet med koordinaterne (α,β).
4. Grafen er konveks (krummer opad) til venstre for vendepunktet. Grafen er konkav (krummer nedad) til højre for vendepunktet.
5. Grafen har ingen vandrette tangenter.
6. Funktionsværdien vokser kontinuert fra 0 til k når x gennemløber de reelle tal.

b)

Brøken forlænges med $\mathrm{e}^{-a\cdot x}$ og vi bruger at $\mathrm{e}^{-a\cdot x}\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x}=\mathrm{e}^{-a\cdot x+a\cdot x}=\mathrm{e}^{0}=1$. Dette giver

$$y=\frac{b\cdot\mathrm{e}^{-a\cdot x}\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x}}{\mathrm{e}^{-a\cdot x}+c\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x}\cdot\mathrm{e}^{-a\cdot x}}=\frac{b}{\mathrm{e}^{-a\cdot x}+c}=\frac{b}{c+\mathrm{e}^{-a\cdot x}}.$$

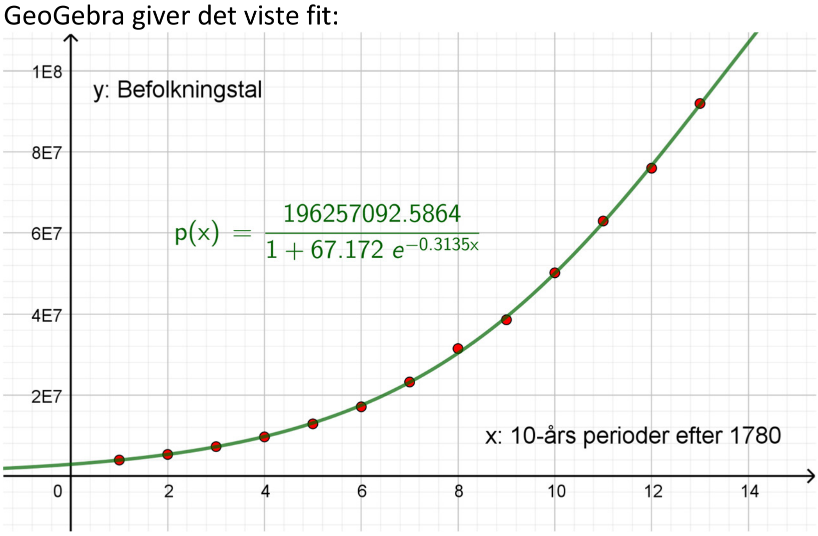
Da a er positiv går udtrykket mod b/c når x går mod uendelig, og mod 0 når x går mod minus uendelig. Tegnes grafen, ses den let at opfylde de fire øvrige kriterier.

c) Der divideres igennem med c i tæller og nævner, og vi indfører konstanterne $M=b/c$ og $c_1=1/c$.

d) 1) og 3) opfylder alle kriterierne. 2) gør næsten, men funktionen går ikke mod 0 når x går mod minus uendelig. Vi kan rette op på dette ved at ændre 2-tallet i funktionen til $\pi/2$, da vi ved, at arctan går mod $-\pi/2$ når x går mod minus uendelig.

Øvelse 6.9

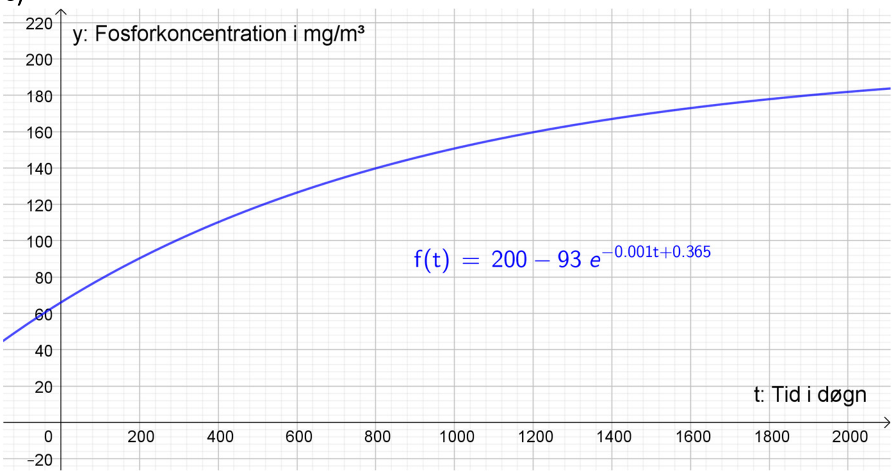
GeoGebra giver det viste fit:



År 2019 er 139 år efter år 1780, så vi skal sætte $x=13{,}9$ i forskriften. Dette giver 105,5 millioner. Befolkningstallet i USA er i starten af 2019 på 328 millioner mennesker. Befolkningstallet er derfor mere end tre gange så stort som det, den logistiske model forudsiger, og større end dens øvre grænse på 196 millioner mennesker.

Øvelse 6.10
Vi har de tre punkter $(1{,}3929214)$, $(7{,}23191876)$ og $(13{,}91972266)$ som indsat i forskriften giver et ligningssystem med tre ligninger og tre ubekendte. Løses det på computeren får vi $a=0{,}3134$, $b=2930499$ og $c=0{,}01485$. Den øvre grænse er $b/c=197{,}2$ millioner. Funktionen med disse parameterværdier beskriver datapunkterne rigtig fint, og er på det nærmeste uskelnelig fra fittet til alle datapunkterne.

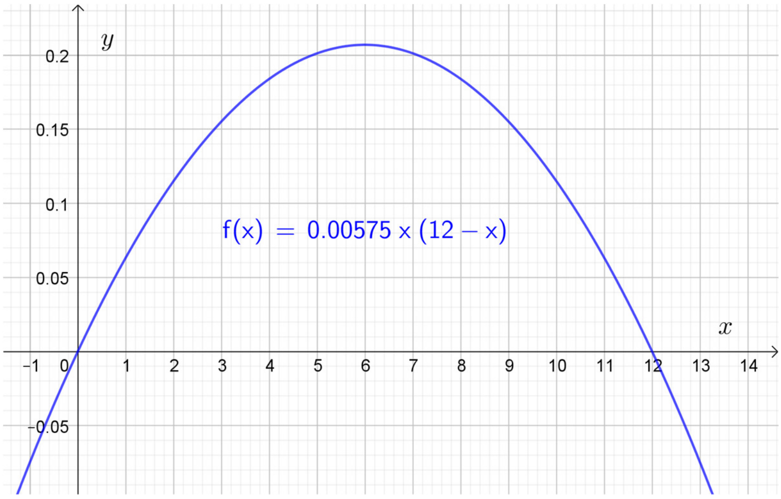
Øvelse 6.14
a) Vi har $\frac{dv}{dt}=-20e^{-20t}$ på venstresiden. På højresiden har vi
$10\cdot(1-2\cdot(e^{-20t}+0{,}5))=10\cdot(1-2e^{-20t}-1)=-20e^{-20t}$.
Da det giver det samme på begge sider af lighedstegnet, er funktionen $v(t)$ en løsning til differentialligningen.
b) Vi har $p'(x)=2x+3$ på venstresiden, og på højresiden
$$\frac{2(x^2+3x-2)+4}{x}=\frac{2x^2+6x-4+4}{x}=\frac{2x^2+6x}{x}=2x+6$$
Da vi ikke får det samme på begge sider, er funktionen $p(x)$ ikke en løsning til differentialligningen.

Øvelse 6.15
a) Hvis y er fosforkoncentrationen målt i mg/m^3 og t er tiden målt i døgn, har vi differentialligningen $y'=0{,}2-0{,}001y$.
b) Vi får løsningen $f(t)=200-93\cdot e^{-0{,}001t+0{,}365}$.
c)


d) Fosforkoncentrationen efter 1000 døgn er på 151 mg/m^3.

Øvelse 6.16
a) Vi sætter $S=4$ og beregner.
$$\frac{dS}{dt}=0{,}00575\cdot4\cdot(12-4)=0{,}184\,.$$
Så når haletudserne har en længde på 4 cm, er deres væksthastighed 0,184 cm pr. tidsenhed.
b) $f(x)=0{,}00575\cdot x\cdot(12-x)$.
c) Et andengradspolynomium.

ISBN 9788770668699



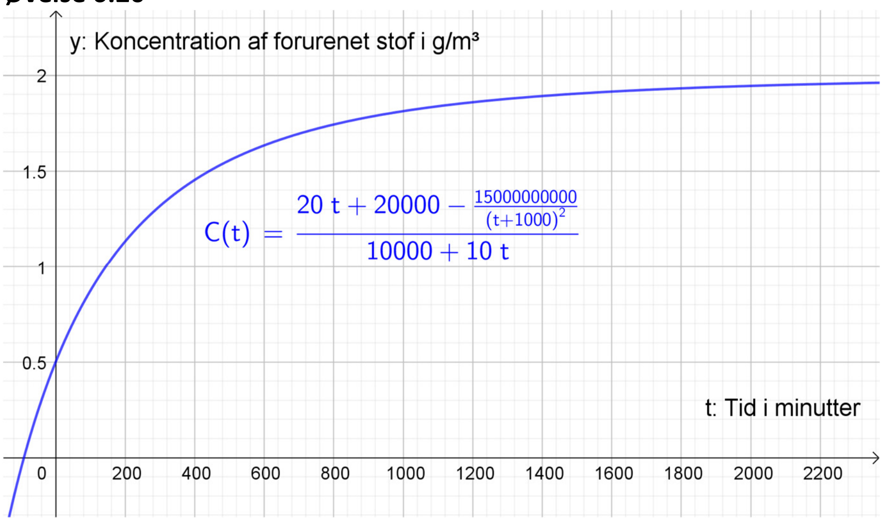
d) Når $x=6$ har f sit maksimum. f er altså voksende for $x \leq 6$ og aftagende for $x \geq 6$.
For haletudserne betyder det, at haletudserne vokser hurtigere og hurtigere, indtil de når deres maksimale væksthastighed ved en længde på 6 cm. Herefter vokser de langsommere og langsommere, mens de nærmer sig deres maksimale længde på 12 cm.

Øvelse 6.17
a) Differentialligningen er $V'(t)=5$ med begyndelsesbetingelsen $V(0)=0{,}5$. Løst på computeren giver det løsningsfunktionen $V(t)=5t+0{,}5$.
b) Vi får differentialligningen $V'(t)=-6$ og begyndelsesbetingelsen $V(0)=180$ med de samme betegnelser som før. Løsningen er her $V(t)=180-6t$.
c) $V'(t)=5-0{,}001\cdot V(t)$.

Øvelse 6.18
a) t er antal timer og $B(t)$ er antallet af bakterier til tiden t.
b) Differentialligningen er $B'(t)=0{,}25\cdot B(t)$ med begyndelsesbetingelsen $B(0)=50$. Løsningen er $B(t)=50\cdot e^{0{,}25t}$.
c) Efter 4 minutter er der $B(4)=136$ bakterier.
d) Efter 39,6 timer er antallet af bakterier oppe på 1 million.

Øvelse 6.19
Der strømmer 20 m^3 vand ud pr. minut, så vi har $k(t)=\dfrac{20}{V(t)}=\dfrac{20}{10000+10t}$.

Øvelse 6.20



Koncentrationen af forurenet stof nærmer sig 2 g/m^3.

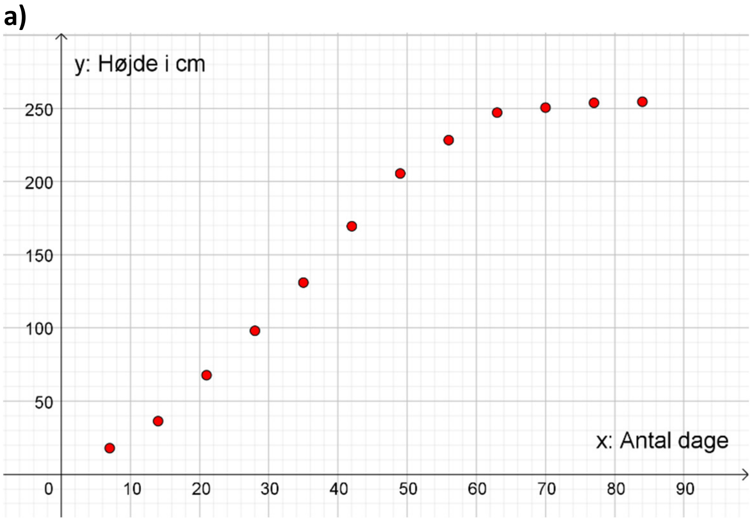
Øvelse 6.22
a) Vi indfører følgende størrelser:

ISBN 9788770668699

y : Antallet af kulstof 14-atomer i kroppen af en person.
t : Tiden målt i år.
p : Antal kulstof 14-atomer personen indoptager pr. år.
k : Andelen af kulstof 14-atomer der henfalder pr. år.
Dette giver differentialligningen $y' = p - k \cdot y$.
Vi kan beregne k ud fra halveringstiden på 5730 år, idet mængden aftager eksponentielt med en vækstrate på $r = \sqrt[5730]{0,5} - 1 = -0,000121$, altså er $k = 0,000121$.
b) Når personen er død er $p = 0$, så med betegnelserne fra forrige spørgsmål får vi $y' = -k \cdot y$ eller $y' = -0,000121 \cdot y$.
c) Differentialligningen i b) har løsningen $y = 100 \cdot e^{-0,000121 \cdot t}$ hvor nu y betegner procentdelen af tilbageværende kulstof 14-atomer. Sættes $y = 31$ får vi $t = 9682$, altså er træet 9682 år gammelt.

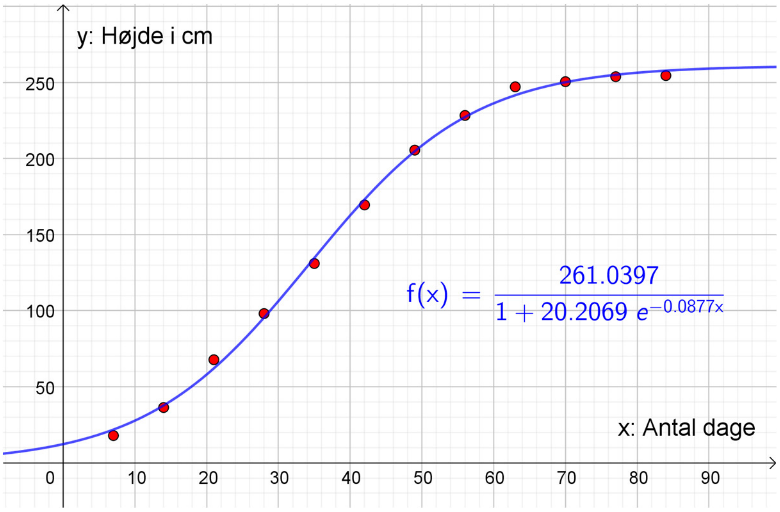
Øvelse 6.23
Lad T betegne temperaturen af metallet målt i °C og t betegne tiden målt i sekunder. Kalder vi proportionalitetskonstanten for k har vi differentialligningen
$T'(t) = k \cdot (T(t) - 20)$
Benyttes begyndelsesbetingelsen $T(0) = 100$ får vi løsningen $T(t) = 20 + 80 \cdot e^{k \cdot t}$.
Vi benytter, at $T(30) = 95$ og bestemmer derved k til $-0,00215$.
Vi kan nu løse ligningen $T(t) = 40$ og får, at det tager 644 sekunder, før temperaturen er på 40 °C.

Øvelse 6.24
(*Bemærk: Øvelsen, der henvises til er 6.18, ikke 6.26*).
a) Bakteriekulturen voksede i øvelse 6.18 eksponentielt ud over alle grænser, hvor den her holder sig under en øvre grænse på 2000.
b) De er vandrette linjer.

Øvelse 6.25
a)


b)

ISBN 9788770668699



c) Den øvre grænse (bæreevnen) er på 261 cm, dvs. det er den teoretisk maksimale højde for solsikkerne. Ved halvdelen af bæreevnen vil væksthastigheden være maksimal, dvs. ved en højde på 130,5 cm. Denne højde opnås efter ca. 34 dage.

Øvelse 6.26

a) Vi får forskriften $M(t) = \dfrac{160}{1+19\cdot e^{-0{,}08\cdot t}}$.

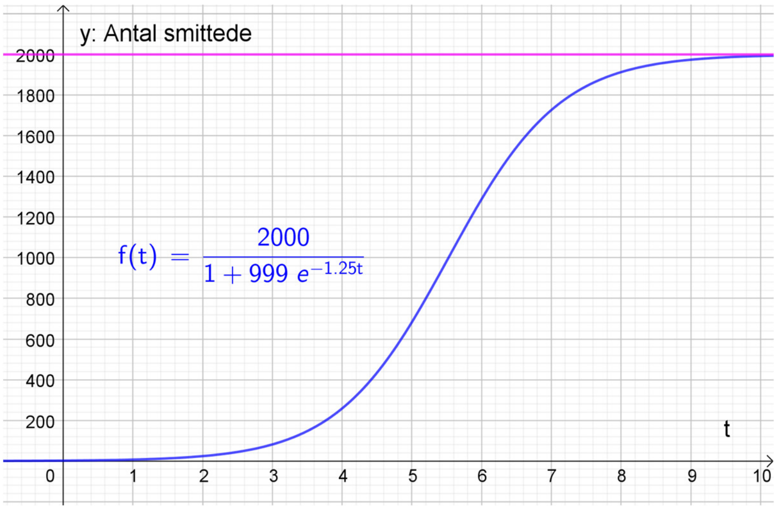
b) $M'(0) = 0{,}608$. Det betyder, at i modellens startår forøges olieudvindingen med en øjeblikkelig hastighed på 0,608 mio. ton pr. år.

c) Den øvre grænse for, hvor meget olie der kan udvindes af feltet, er ifølge modellen på 160 mio. ton.

d) Ligningen $M(t) = 80$ har løsningen $t = 36{,}8$. Så efter 37 år er der udvundet 80 mio. ton olie ifølge modellen.

Øvelse 6.27

Hvis y er antallet af smittede, har vi differentialligningen $y' = 0{,}000625\cdot y\cdot(2000-y)$ idet $2000-y$ er antallet af raske (ikke-smittede). Med begyndelsesbetingelsen $y(0) = 2$ får vi løsningen $y = \dfrac{2000}{1+999\cdot e^{-1{,}25\cdot t}}$.



Øvelse 6.28

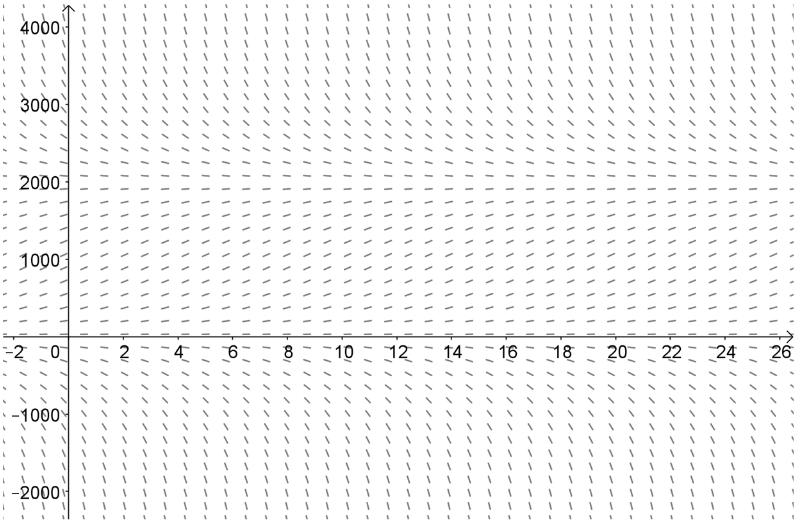
$y' = 0{,}0014\cdot y\cdot(500-y)$.

Indsættes $y = 125$ får vi $y' = 65{,}625$. Dvs. y vokser med en hastighed på ca. 66 personer pr. døgn.

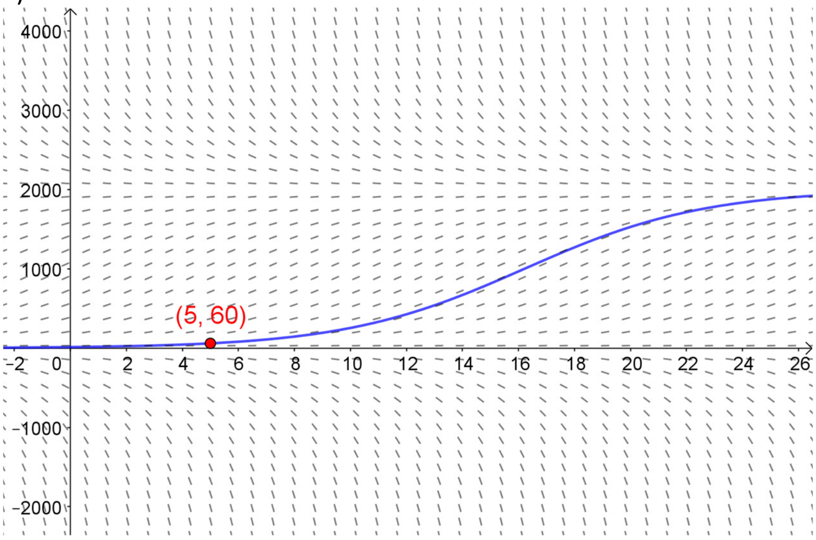
Øvelse 6.30

b)

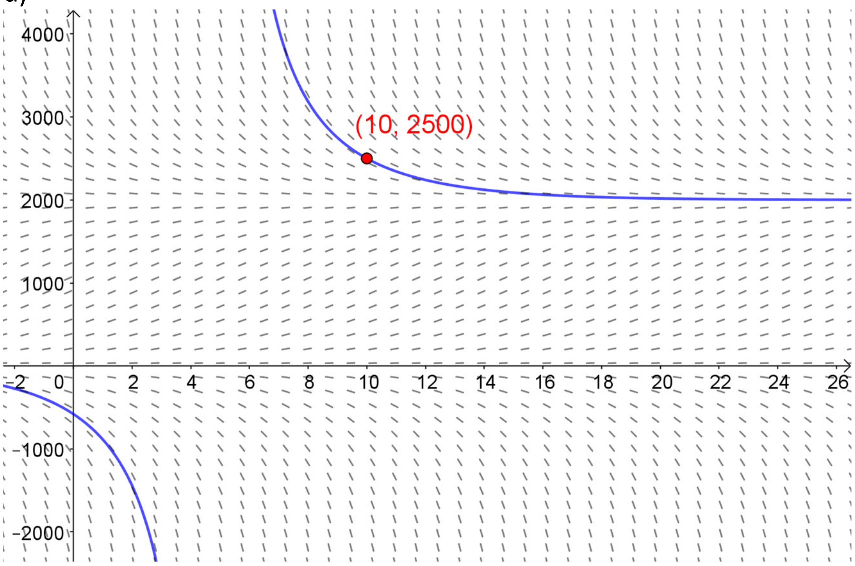
ISBN 9788770668699



c)



d)



Grafen består af to adskilte nedadgående grene. Den øverste gren flader ud og nærmer sig den vandrette linje med ligningen $y = 2000$ for positive x-værdier. Den nederste gren nærmer sig den vandrette linje med ligningen $y = 0$, når vi går mod store negative x-værdier. Grafen har en lodret asymptote et sted i omegnen af $x = 5$.