ISBN 9788770668699

L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 5B

Øvelse 5.59A

b) $x=-\frac{1}{2}$ giver identiteten $2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$

$x=-\frac{1}{10}$ giver identiteten $\frac{10}{9}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\cdots=1{,}1111...$

$x=\frac{1}{2}$ giver identiteten $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$

c) Kun for $|x|<1$.

Øvelse 5.59B

a) Koefficienten foran x^n er $(-1)^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

b) Vi ganger ud:

$$
\begin{aligned}
&(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\cdots)\cdot(1+2x+x^2)=\\
&\qquad 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+\cdots\\
&\qquad\qquad +2x-4x^2+6x^3-8x^4+10x^5-12x^6+\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad +x^2-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6-6x^7+\cdots
\end{aligned}
$$

hvoraf det ses, at alle led på nær 1 går ud på højresiden.

Øvelse 5.61A

a) $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}$

$\frac{1}{(1+x)^3}=(1+x)^{-3}$

Øvelse 5.61B

a) $$(1-x^2)^{1/2}=1+\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2}(-x^2)^2+\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)}{6}(-x^2)^3+\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdot(1/2-3)}{24}(-x^2)^4+...$$

Som kan reduceres til

$$(1-x^2)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-...$$

b) Det næste led bliver $\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdot(1/2-3)\cdot(1/2-4)}{120}(-x^2)^5=-\frac{7}{256}x^{10}$.

Øvelse 5.62

Hvis α er et positivt helt tal, vil alle led i formlen være 0 fra et vist trin. F.eks. hvis $\alpha=3$ er $\alpha-3=0$ og denne faktor optræder i koefficienten til x^4 og alle efterfølgende koefficienter. Altså får vi et tredjegradspolynomium når $\alpha=3$.

Øvelse 5.63

Vi har $x=0{,}1$ og indsætter i formlen,

$$\sqrt{1{,}1}=(1+0{,}1)^{1/2}\approx1+\frac{1}{2}\cdot0{,}1+\frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2}\cdot0{,}1^2+\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)}{6}\cdot0{,}1^3$$

$$=1+0{,}05-\frac{1}{8}\cdot0{,}01+\frac{1}{16}\cdot0{,}001=1+0{,}05-0{,}00125+0{,}0000625=1{,}0488125.$$

ISBN 9788770668699

Vi tager derpå $x=-0{,}1$ og indsætter i formlen,

$$\sqrt{0{,}9}=(1-0{,}1)^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}1+\frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2}\cdot 0{,}1^2-\frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)}{6}\cdot 0{,}1^3$$

$$=1-0{,}05-\frac{1}{8}\cdot 0{,}01-\frac{1}{16}\cdot 0{,}001=1-0{,}05-0{,}00125-0{,}0000625=0{,}9486875\,.$$

Øvelse 5.64

$N'(10)=0{,}82-0{,}88\cdot N(10)=0{,}82-0{,}88\cdot 266=-233{,}26$

Væksthastigheden til $t=10$ er altså -233,26, og betyder, at antallet af kræftceller efter 10 dage aftager med en hastighed på 233,26 millioner celler i døgnet.

Øvelse 5.65

$\frac{dy}{dt}=0{,}00526\cdot 100\cdot(209-100)=57{,}334$

Da der var 100 smittede, steg antallet af smittede altså med en hastighed på ca. 57 personer i døgnet.

Øvelse 5.66

$s(x)=f(g(x))$	$f(x)$ (ydre)	$g(x)$ (indre)	$s(x)=f(g(x))$	$f(x)$ (ydre)	$g(x)$ (indre)
$s_1(x)=\sqrt{3x+1}$	$\sqrt{x}$	$3x+1$	$s_7(x)=(2x+1)^{-2}$	x^{-2}	$2x+1$
$s_2(x)=(5x+4)^{10}$	x^{10}	$5x+4$	$s_8(x)=\ln(x-4)$	$\ln(x)$	$x-4$
$s_3(x)=(1-4x)^3$	x^3	$1-4x$	$s_9(x)=(2x^2-3x+1)^5$	x^5	$2x^2-3x+1$
$s_4(x)=e^{3x}$	e^x	$3x$	$s_{10}(x)=e^{x^2+1}$	e^x	x^2+1
$s_5(x)=(x+1)^4$	x^4	$x+1$	$s_{11}(x)=\ln(x^2+9)$	$\ln(x)$	x^2+9
$s_6(x)=\frac{1}{2x+3}$	$\frac{1}{x}$	$2x+3$	$s_{12}(x)=2^{4x+1}$	2^x	$4x+1$

Øvelse 5.67

a) I eksemplet er g_1, g_2, g_3 og g_4 lineære.

I øvelsen er alle de indre funktioner lineære, på nær de indre funktioner for s_9, s_{10} og s_{11} som er andengradspolynomier.

b) $s_2'(x)=50(5x+4)^9$

$s_3'(x)=-12(1-4x)^2$

$s_5'(x)=4(x+1)^3$

$s_7'(x)=-4(2x+1)^{-3}$

c) Se sætning 24.

Øvelse 5.68

$s_2(x)=\frac{5}{3x+1}$ som opdeles i den ydre funktion $f_2(x)=\frac{5}{x}$ og den indre funktion $g_2(x)=3x+1$.

Nu er $f_2'(x)=\frac{-5}{x^2}$ som giver $s_2'(x)=\frac{-5}{(3x+1)^2}\cdot 3=\frac{-15}{(3x+1)^2}$.

$s_3(x)=\sqrt{3x-2}$ som opdeles i den ydre funktion $f_3(x)=\sqrt{x}$ og den indre funktion $g_3(x)=3x-2$.

Nu er $f_3'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ som giver $s_3'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

Øvelse 5.69

a) Vi får

ISBN 9788770668699

$s_1'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

$s_2'(x) = 50(5x+4)^9$.

$s_3'(x) = -12(1-4x)^2$.

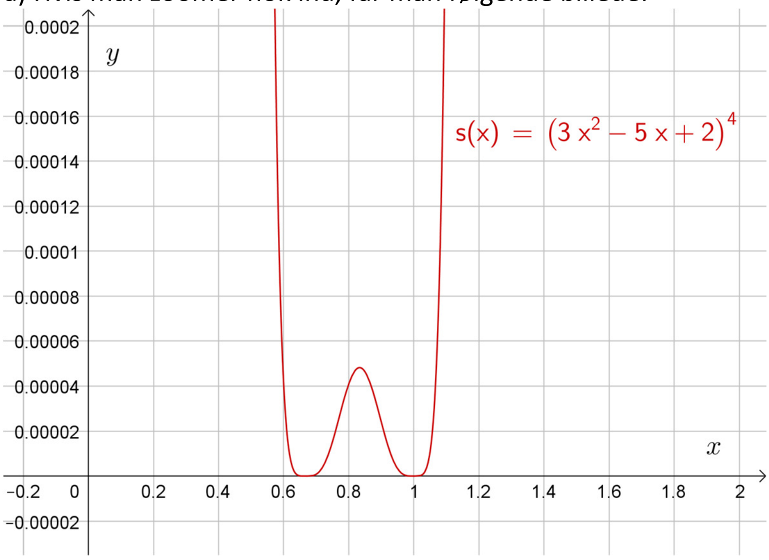
$s_5'(x) = 4(x+1)^3$.

$s_6'(x) = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$.

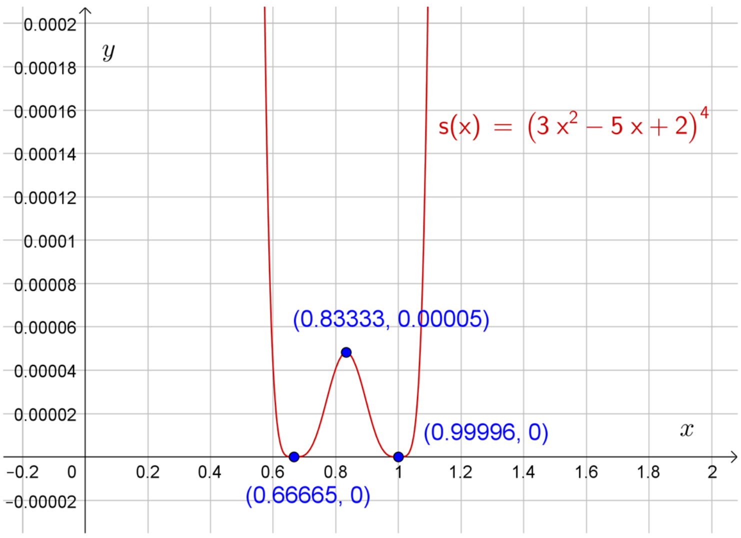
$s_7'(x) = -4(2x+1)^{-3}$.

Øvelse 5.70
Se eksemplet efter øvelsen i bogen.

Øvelse 5.71
a) Hvis man zoomer nok ind, får man følgende billede:



b) (*Bemærk: Der er en trykfejl i b): Der skal stå* $s'(x)$ *i stedet for* $s_1'(x)$.)
Grafisk er ekstremaerne bestemt således:



Dvs. det globale minimum for funktionen er 0 og det forekommer to steder, nemlig for $x = 0{,}67$ og for $x = 1$. I $x = 0{,}83$ er det et lokalt maksimum med værdien 0,00005.
Vi kan beregne os frem til disse svar ved at løse $s'(x) = 0$. Vi har

$s'(x) = 4\left(3x^2 - 5x + 2\right)^3 \cdot (6x-5)$

$0 = 4\left(3x^2 - 5x + 2\right)^3 \cdot (6x-5)$

Benyttes nulreglen er dette opfyldt når $6x-5=0$ eller når $3x^2-5x+2=0$. Den første ligning har løsningen $x=\frac{5}{6}=0{,}83$. Den anden ligning har løsningerne $x=1$ og $x=\frac{2}{3}$. Vi ser altså, at der er fejl på afrundingerne på de værdier som computeren giver os på figuren ovenfor.
Funktionsværdierne i de fundne x -værdier findes som $s(1)=0$ og $s(2/3)=0$ som vi får uden at regne, da 1 og 2/3 netop er rødderne i andengradspolynomiet. Videre er $s(5/6)=1/20736\approx 0{,}000048$.

Øvelse 5.72

a) (*Bemærk: Der er en trykfejl i nr 3): Funktionen er:* $s_3(x)=e^{x^3+2x^2-5x-2}$)

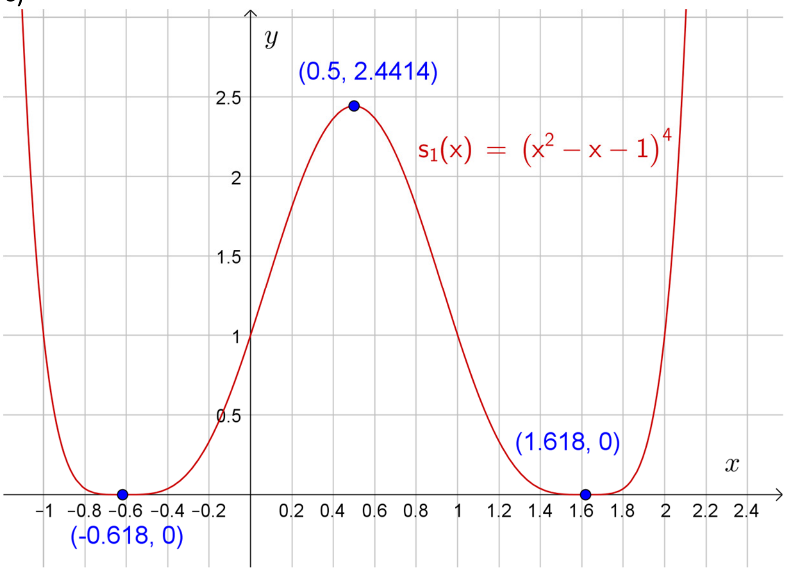
1) Ydre: x^4 indre: x^2-x-1.
2) Ydre: $\ln(x)$ indre: x^2+x+1.
3) Ydre: e^x indre: x^3+2x^2-5x-2.
4) Ydre: x^2 indre: $4x^5+5x^4+2x^3+3$.

b)

$$s_1'(x)=4\left(x^2-x-1\right)^3\cdot(2x-1)$$

$$s_4'(x)=2\left(4x^5+5x^4+2x^3+3\right)\cdot\left(20x^4+20x^3+6x^2\right)$$

c)



Grafisk ser vi, at der er et globalt minimum på 0, som forekommer to steder, nemlig i $x=-0{,}618$ og i $x=1{,}618$.
Desuden er der et globalt maksimum på 2,44 som forekommer i $x=0{,}5$.
Vi kan beregne os frem til disse svar ved at løse $s_1'(x)=0$. Vi har

$$s_1'(x)=4\left(x^2-x-1\right)^3\cdot(2x-1)$$

$$0=4\left(x^2-x-1\right)^3\cdot(2x-1)$$

Benyttes nulreglen er dette opfyldt når $2x-1=0$ eller når $x^2-x-1=0$. Den første ligning har løsningen $x=0{,}5$.
Den anden ligning har løsningerne $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Funktionsværdierne i de fundne x -værdier findes som $s_1\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=0$, som vi får uden at regne, da $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ netop er rødderne i andengradspolynomiet. Videre er $s_1(0{,}5)=625/256\approx 2{,}44$.

Øvelse 5.73

a) $f_1'(x)=3e^{3x}$.

b) $f_2'(x)=-4e^{-x}$.

ISBN 9788770668699

c) $f_3'(x)=0,5\ln(4)\cdot 4^x=\ln(2)\cdot 4^x$.

d) Man kan bruge kædereglen og få $f_4'(x)=2\ln(5)\cdot 5^{2x}$. Eller man kan omskrive funktionen til $f_4(x)=25^x$ og differentiere ved brug af sætning 26, $f_4'(x)=\ln(25)\cdot 25^x$. Bemærk, at resultatet er det samme i begge tilfælde, det er blot to forskellige måder at skrive den afledte funktion på.

e) Man kan bruge kædereglen og få $f_5'(x)=6\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{6}{x}$. Eller man kan omskrive funktionen til $f_5(x)=6\ln(2)+6\ln(x)$ og differentiere ledvis, hvilket igen giver $f_5'(x)=\frac{6}{x}$.

f) $f_6'(x)=\frac{1}{2x+2}\cdot 2=\frac{1}{x+1}$.

g) $f_7'(x)=3,5x^{-0,3}$.

h) $f_8'(x)=-8x^{-3}$.

Øvelse 5.74

a) $p_1'(x)=3x^2\cdot\ln(x)+x^2$.

b) $p_2'(x)=-2x^{-3}\cdot e^x+x^{-2}\cdot e^x=(1-2x^{-1})\cdot x^{-2}\cdot e^x$.

c) $p_3'(x)=-e^{-x}\cdot\ln(x)+e^{-x}\cdot x^{-1}$.

Øvelse 5.75

$s_8'(x)=\frac{1}{x-4}$.

$s_9'(x)=5\left(2x^2-3x+1\right)^4\cdot\left(4x-3\right)$.

$s_{10}'(x)=2x\cdot e^{x^2+1}$.

$s_{11}'(x)=\frac{2x}{x^2+9}$.

$s_{12}'(x)=4\ln(2)\cdot 2^{4x+1}$.

Øvelse 5.76

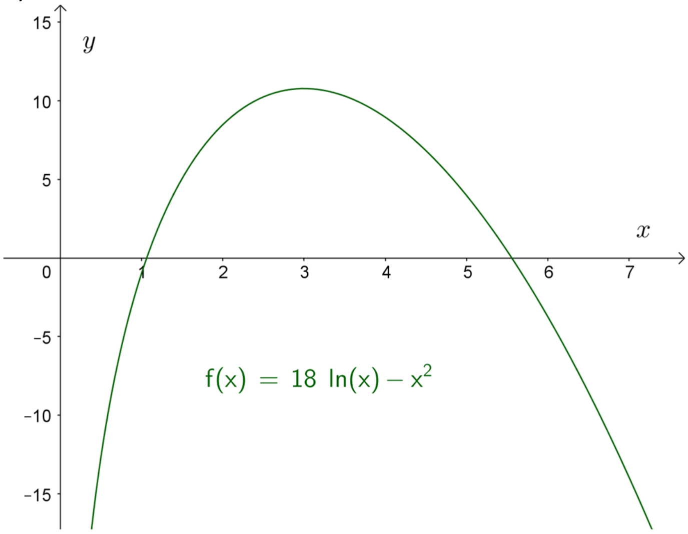
a) $f'(x)=5\ln(2)\cdot 2^x-1$.

b) $y=(10\ln(2)-1)x+10(1-\ln(2))$. Eller med decimaltal: $y=5,9315x+3,0685$.

c) f er aftagende på intervallet $]-\infty;-1,7932]$ og voksende på intervallet $[-1,7932;\infty[$.

Øvelse 5.77

a)



ISBN 9788770668699

b) $f'(x) = \frac{18}{x} - 2x$.

$f'(1) = 16$.

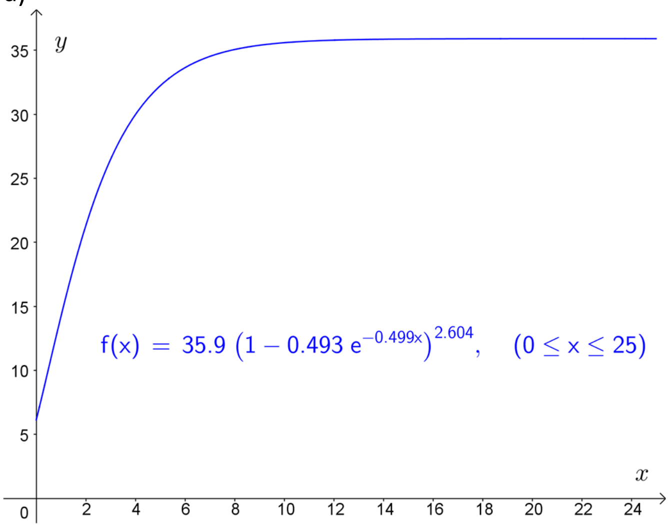
$f(1) = -1$.

En ligning for tangenten er $y = 16x - 17$.

c) Ligningen $f'(x) = 0$ har løsningerne $x = \pm 3$, dog er kun den positive løsning i funktionens definitionsmængde. Vi har $f'(1) = 16$ og $f'(6) = -9$. Derfor er f voksende på intervallet $]0;3]$ og aftagende på intervallet $[3;\infty[$.

Øvelse 5.78

a)



Når palmerne er 10 år gamle er udbyttet pr. hektar på $f(10) = 35{,}6$ ton palmeolie.

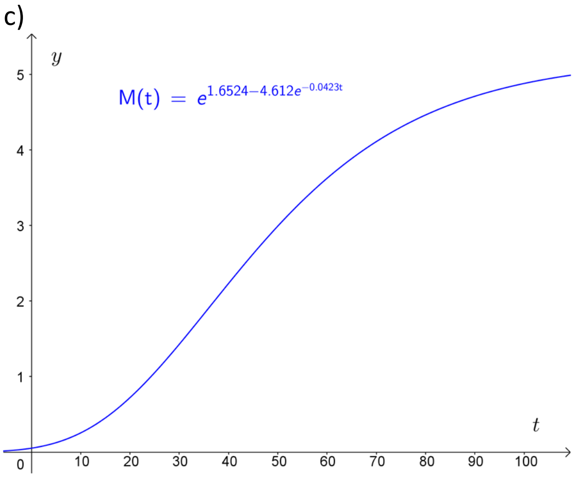
b) Når palmerne er 5 år gamle er væksthastigheden i udbyttet pr. hektar på $f'(5) = 1{,}78$ ton pr. år.

Øvelse 5.79

a) En kylling der er 30 døgn gammel vejer 1,43 kg.

b) $M(t) = e^{1{,}6524 - 4{,}612e^{-0{,}0423t}}$.

c)



Væksthastigheden når kyllingen er 30 døgn gammel er 0,0783 kg pr. døgn.

Øvelse 5.80

a) $f(x) = x^{-1}$ så $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

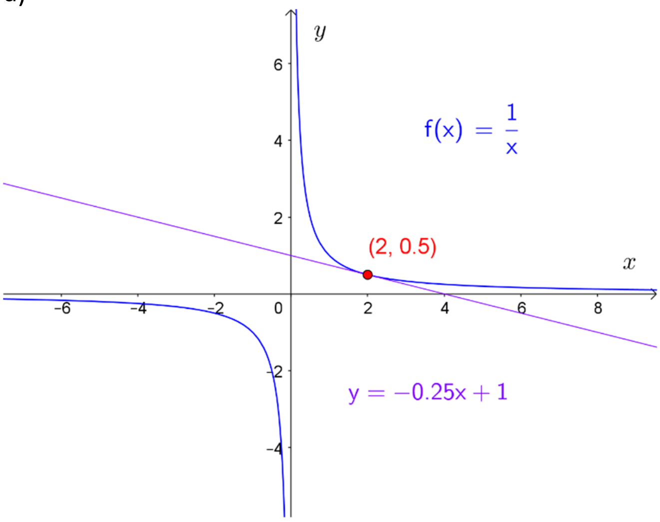
b) Brøkreglen er $\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$. Vi bruger den med $g(x) = 1$ og $h(x) = x$ og får

ISBN 9788770668699

$$\left(\tfrac{1}{x}\right)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Øvelse 5.81

a)



Tangentens ligning er grafisk bestemt til $y = -0{,}25x + 1$.

b) For alle negative tal a har ligningen to løsninger, nemlig $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{-a}}$. Når a ikke er negativ er der ingen løsninger.

Øvelse 5.82

a) $f(x) = x^{1/2}$ så $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

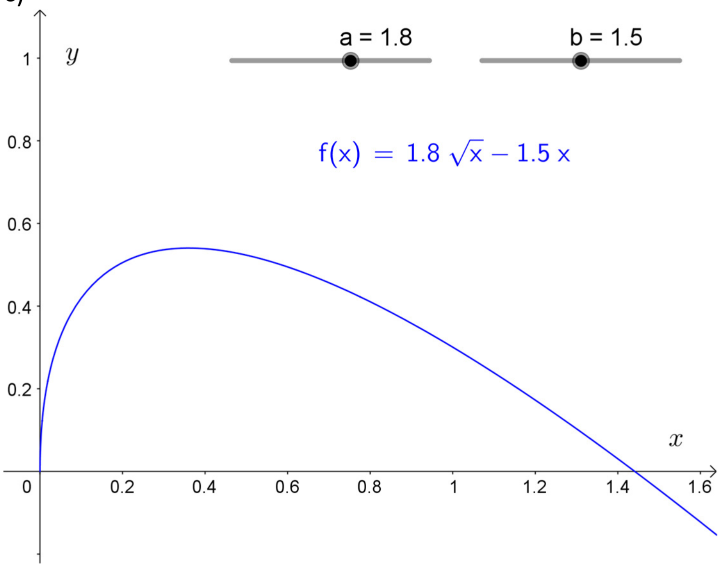
b) $1 = (x)' = \left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' = 2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$. Isoleres $\left(\sqrt{x}\right)'$ får vi $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Øvelse 5.83

a) Vi beregner $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{8-0} = -0{,}25$. b er andenkoordinaten til grafens skæring med andenaksen, og derfor er $b = 2$. Dette giver ligningen $y = -0{,}25x + 2$.

b) $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - b$. Når x nærmer sig 0, nærmer $f'(x)$ sig uendelig. Der er derfor lodret tangent i 0.

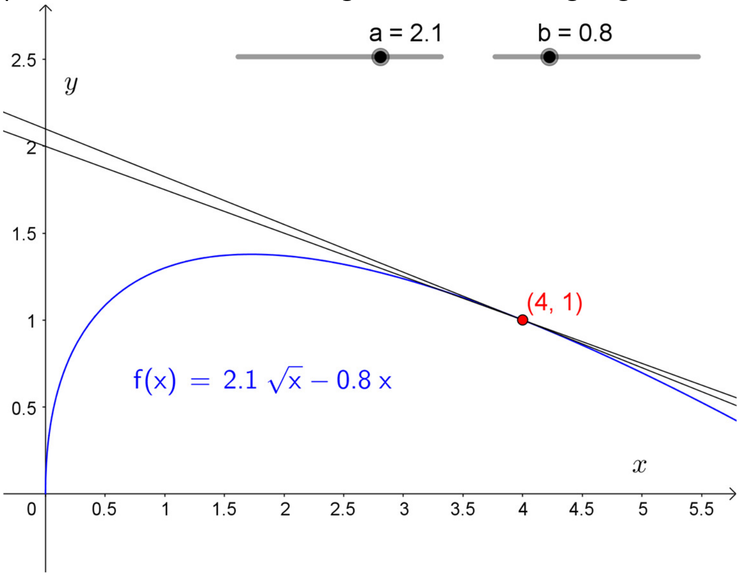
c)



ISBN 9788770668699

d) Når $x=4$ indsættes i ligningen for den mindre vej, får vi $y=-0,25\cdot 4+2=1$. Hvis frakørslen skal ramme den mindre vej, når $x=4$, skal det altså ske i punktet med koordinaterne $(4,1)$.

e) Med de valgte værdierne for skyderne, kan vi se, at betingelserne næsten er opfyldt. Tangenten og linjen der beskriver der mindre vej, er dog ikke helt sammenfaldende, så det vil kræve yderligere finjustering at ramme parametrene helt præcist. Vi har dog en ide om, hvilke værdier de ca. skal have. Den nøjagtige bestemmelse af parameterværdierne, foretages bedst ved beregning.



f) Vi kan udtrykke betingelserne ved $f(4)=1$ og $f'(4)=-0,25$ da hældningen af vejen er $-0,25$. Dette giver ligningssystemet

$$a\sqrt{4}-b\cdot 4=1$$
$$\frac{a}{2\sqrt{4}}-b=-0,25$$

g) Ved at reducere og gange den anden ligning med 4, får vi ligningssystemet

$$2a-4b=1$$
$$a-4b=-1$$

Trækkes den anden ligning fra den første, får vi

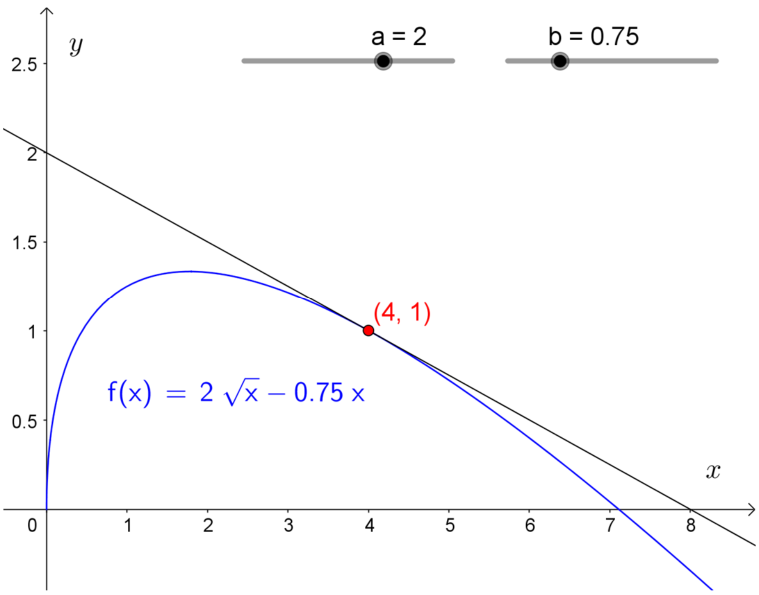
$$2a-4b-(a-4b)=1-(-1)$$

som kan reduceres til $a=2$. Ved at indsætte dette resultat i den anden ureducerede ligning, får vi

$$b=\frac{2}{4}+0,25=0,75.$$

Herved har vi fundet de to ønskede parameterværdier.

Dermed bliver forskriften for funktionen $f(x)=2\sqrt{x}-0,75x$. Vi tegner grafen for denne funktion:



ISBN 9788770668699

Øvelse 5.84

a) $p''(x)=6ax+2b$. Løses ligningen $p''(x)=0$ får vi derfor $x=-\dfrac{b}{3a}$. Det er netop førstekoordinaten til vendepunktet.

b)

x	$-\dfrac{b}{3a}-1$	$-\dfrac{b}{3a}$	$-\dfrac{b}{3a}+1$
$p''(x)$	$-6a$	0	$6a$

Vi ser, at a styrer monotoniforholdene for $p'(x)$. Hvis $a>0$ er der tale om et minimum for $p'(x)$ i $x=-\dfrac{b}{3a}$. Dvs. grafen går fra at krumme nedad til at krumme opad i vendepunktet. Hvis $a<0$ er der tale om et maksimum for $p'(x)$ i $x=-\dfrac{b}{3a}$. Dvs. grafen går fra at krumme opad til at krumme nedad i vendepunktet.

b afgør krumningen for $x=0$ idet $p''(0)=2b$.

c er tangenthældningen for $x=0$ idet $p'(0)=c$.

d er andenkoordinaten til grafens skæringspunkt med andenaksen, idet $p(0)=d$.

Øvelse 5.85

Man kan tilpasse beviset for punkt 1, eller man kan argumentere som følger: Funktionen $g(x)=-f(x)$ opfylder $g''(x)=-f''(x)>0$. Ifølge punkt 1 gælder så, at grafen for g ligger helt over tangenten til grafen i punktet $(a,f(a))$. Men grafen for g er blot en spejling af grafen for f i x -aksen. Dvs. grafen for f ligger helt under tangenten til grafen i punktet $(a,f(a))$.

Øvelse 5.86

a) $f'(x)=\ln(a)\cdot a^x=\ln(a)\cdot f(x)$. Funktionen $f(x)=a^x$ er altid positiv, så monotoniforholdene afgøres af faktoren $\ln(a)$. Den naturlige logaritme er en monotont voksende funktion med nulpunkt i 1 . Derfor er $f'(x)>0$ for $a>1$ og $f'(x)<0$ for $0<a<1$. Dette viser påstanden i spørgsmålet.

b) $f''(x)=\left(\ln(a)\right)^2\cdot a^x$. Dvs. $f''(x)>0$ medmindre $a=1$, i hvilket tilfælde grafen er en vandret linje, som vi normalt ikke betegner som en eksponentiel graf. For alle andre værdier af a er den anden afledede en positiv funktion, og grafen derfor opad hul.

Øvelse 5.87

a) $f'(x)=a\cdot x^{a-1}$. Faktoren x^{a-1} er altid positiv, så fortegnet for $f'(x)$ afgøres af fortegnet for a .

b) $f''(x)=a\cdot(a-1)\cdot x^{a-1}$.

c) Som før er faktoren x^{a-1} altid positiv, så fortegnet for $f''(x)$ afgøres af fortegnet for $a\cdot(a-1)$.

1. Når $a>1$ er begge faktorer positive, og produktet dermed også positivt. Dvs. $f''(x)>0$.
2. Når $a<0$ er begge faktorer negative. Produktet er derfor positivt. Dvs. $f''(x)>0$.
3. Når $0<a<1$ er den ene faktor positiv og den anden negativ. Produktet er derfor negativt. Dvs. $f''(x)<0$.

d) 1. Når $a>1$ er $f''(x)>0$ og $f'(x)>0$. Dvs. grafen går opad og krummer opad.

2. Når $a<0$ er $f''(x)>0$ og $f'(x)<0$. Dvs. grafen går nedad og krummer opad.

3. Når $0<a<1$ er $f''(x)<0$ og $f'(x)>0$. Dvs. grafen går opad og krummer nedad.

Øvelse 5.88

a)

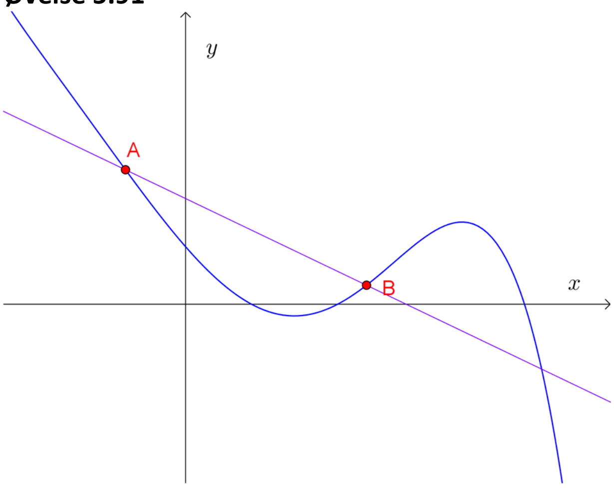
Beviset kan nærmest anvendes ordret, man skal bare ændre på nogle af bogstavbetegnelserne:
Tangenten til grafen i punktet $(c,f(c))$ har hældningskoefficienten $f'(c)$. Kald dette punkt C . Når $f''(x)>0$ i $]c;b]$, er $f'(x)$ voksende i $[c;b]$. Det betyder, at alle øvrige tangenter har en hældningskoefficient, der er større end $f'(c)$.

ISBN 9788770668699

Lad nu d være et tilfældigt tal mellem c og b. Kald punktet $(d, f(d))$ for D. Træk linjen fra $C(c, f(c))$ til $D(d, f(d))$. Vi vil vise, at punktet D på grafen ligger over tangenten, ved at vise at hældningskoefficienten for linjen fra A til D er større end tangentens hældningskoefficient.
Vi udnytter middelværdisætningen på intervallet $[c;d]$:
Der findes et tal e mellem c og d, således at $f'(e)$ er lig med hældningskoefficienten for linjen gennem C og D.
Men $f'(e)$ er hældningen af tangenten i $x = e$, og den er større end $f'(c)$. Dvs. at hældningskoefficienten for linjen gennem C og D er større end $f'(c)$. Og dette var præcis, hvad vi ønskede at vise, for når hældningskoefficienten er større, må D ligge over tangenten.
Beviset forløber tilsvarende for $x < a$.
b)
Der gælder generelt, at hvis fortegnet for $f''(x)$ skifter, når vi passerer a, så er der vendetangent. Den anden version er: Hvis $f''(a) = 0$, og $f''(x) < 0$ når $x > c$ og $f''(x) > 0$ når $x < c$, så er tangenten i $(a, f(a))$ en vendetangent

Øvelse 5.89
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$.
$f''(x) = 12x^2 - 12x$.
Ligningen $f''(x) = 0$ har løsningerne $x = 0$ og $x = 1$.
Vi har videre $f''(-1) = 24 > 0$, $f''(0,5) = -3 < 0$ og $f''(2) = 24 > 0$. Ifølge sætning 30 er der så vendetangent i $x = 0$ og $x = 1$. Vi har $f'(0) = 0$ så vendetangenten i 0 er vandret. Desuden er $f'(1) = -2$ så vendetangenten i 1 er skrå med en hældning på -2.

Øvelse 5.91



Antag som foreslået, at der findes x_0 i $]a;b[$ så $f(x_0) \geq s(x_0)$.
Ifølge middelværdisætningen findes c_1 i $]a;x_0[$ og c_2 i $]x_0;b[$ så

$$f'(c_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$$

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

Bemærk først, at $f''(x) > 0$ indebærer, at f' er en voksende funktion, hvorfor der skal gælde $f'(c_1) < f'(c_2)$, eftersom $c_1 < c_2$.
Da punktet $D = (x_0, f(x_0))$ ligger over eller på sekanten fra $A = (a, f(a))$ til $B = (b, f(b))$, er hældningen af sekanten fra A til D større end hældningen af sekanten fra A til B. Tilsvarende er hældningen af sekanten fra D til B mindre end hældningen af sekanten fra A til B.
Da $f'(c_1)$ netop er hældningen af sekanten fra A til D, og da $f'(c_2)$ netop er hældningen af sekanten fra D til B, får vi altså uligheden $f'(c_1) \geq f'(c_2)$. Men dette i modstrid med $f'(c_1) < f'(c_2)$. Dette viser det ønskede.

Man kan også vise resultatet direkte: Vælg et tilfældigt x_0 i $]a;b[$.
Ifølge middelværdisætningen findes c_1 i $]a;x_0[$ og c_2 i $]x_0;b[$ så

$$f'(c_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$$

$$f'(c_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

Kald funktionen der beskriver sekanten for $s(x)$. Vi kan opskrive en forskrift for $s(x)$ ved

$$s(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a).$$

Da $f''(x)>0$ for alle x i $]a;b[$ er f' voksende på intervallet. Da $c_1<c_2$ må derfor gælde $f(c_1)<f(c_2)$, dvs.

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$$

Vi ganger over med nævnerne, hvorved uligheden bevares, da $x_0>a$ og $b>x_0$.

$$\left(f(x_0)-f(a)\right)\cdot\left(b-x_0\right)<\left(f(b)-f(x_0)\right)\cdot\left(x_0-a\right)$$

$$b\cdot f(x_0)-b\cdot f(a)-x_0\cdot f(x_0)+x_0\cdot f(a)<x_0\cdot f(b)-x_0\cdot f(x_0)-a\cdot f(b)+a\cdot f(x_0)$$

$$b\cdot f(x_0)-b\cdot f(a)+x_0\cdot f(a)<x_0\cdot f(b)-a\cdot f(b)+a\cdot f(x_0)$$

$$(b-a)\cdot f(x_0)<x_0\cdot\left(f(b)-f(a)\right)-a\cdot f(b)+b\cdot f(a)$$

$$(b-a)\cdot f(x_0)<x_0\cdot\left(f(b)-f(a)\right)-a\cdot f(b)+a\cdot f(a)-a\cdot f(a)+b\cdot f(a)$$

$$(b-a)\cdot f(x_0)<x_0\cdot\left(f(b)-f(a)\right)-a\cdot\left(f(b)-f(a)\right)+\left(b-a\right)\cdot f(a)$$

$$(b-a)\cdot f(x_0)<\left(x_0-a\right)\cdot\left(f(b)-f(a)\right)+\left(b-a\right)\cdot f(a)$$

Vi dividerer med $b-a$, hvorved uligheden bevares, da $a<b$.

$$f(x_0)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(x_0-a\right)+f(a)$$

$$f(x_0)<s(x_0).$$

Da x_0 var valgt tilfældigt, viser dette, at sekanten ligger over grafen i hele det åbne interval $]a;b[$.

Øvelse 5.92

Hvis x_1 og x_2 ligger i det åbne interval $]a;b[$, kan vi anvende sætning 31 med intervallet $]x_1;x_2[$. Hvis $s(x)$ er funktionen for sekanten, gælder der nu $f(x)\le s(x)$ i $]x_1;x_2[$. Specielt gælder det for $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ (som tilhører intervallet, da det er midtpunktet mellem x_1 og x_2), dvs. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le s\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Sekanten kan beskrives ved forskriften $s(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+f(x_1)$. Indsættes $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ får vi

$$s\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)+f(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)+f(x_1)$$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}+f(x_1)=\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}$$

Dette giver den ønskede ulighed $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}$.

Øvelse 5.93

a) Lad f være et andengradspolynomium, og antag, at f har mindst tre rødder. Ifølge Rolles sætning findes så mellem hvert par af rødder en rod for f'. Dvs. f' har mindst to rødder. Dog ved vi, at f' er et førstegradspolynomium, og derfor har præcist én rod. Dermed har vi en modstrid og kan konkludere, at f har højst to rødder.

ISBN 9788770668699

b) Lad f være et tredjegradspolynomium, og antag, at f har mindst fire rødder. Ifølge Rolles sætning findes så mellem hvert par af rødder en rod for f'. Dvs. f' har mindst tre rødder. Dog ved vi, at f' er et andengradspolynomium, og derfor har højst to rødder. Dermed har vi en modstrid og kan konkludere, at f har højst tre rødder.
c) Lad f være et polynomium af grad n, og antag, at f har mindst $n+1$ rødder. Ifølge Rolles sætning findes så mellem hvert par af rødder en rod for f'. Dvs. f' har mindst n rødder. Dog ved vi, at f' er et polynomium af grad $n-1$, og ifølge induktionsantagelsen derfor højst har $n-1$ rødder. Dermed har vi en modstrid og kan konkludere, at f har højst n rødder.

Øvelse 5.94

Vi skal vise, at funktionen $f(x)=e^x-(1+x)$ er positiv for $x\neq 0$.

Vi har $f'(x)=e^x-1$, så der gælder $f'(0)=0$ og $f'(x)>0$ for $x>0$ og $f'(x)<0$ for $x<0$. Dvs. f har et minimum for $x=0$ hvor $f(0)=0$. Dvs. for $x\neq 0$ gælder $f(x)>0$ som ønsket.

Alternativt følger resultatet af sætning 29. For e^x gælder nemlig, at den anden aflede er positiv for alle x, så grafen ligger over enhver af sine tangenter, specielt tangenten i punktet $(0,1)$, som har ligningen $y=x+1$. Derfor gælder $e^x>x+1$, undtagen altså når $x=0$.

Øvelse 5.95

a) Definer $f(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$. Vi skal vise, at $f(x)>0$ for $x>0$. Vi har $f'(x)=e^x-(1+x)$. Ifølge den foregående øvelse er $f'(x)>0$ for $x>0$. Dvs. f er en voksende funktion for $x\geq 0$. Der gælder derfor $f(x)>f(0)=0$ for $x>0$.

b) Definer $f(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3!}\right)$. Vi skal vise, at $f(x)>0$ for $x>0$. Vi har $f'(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$. Ifølge den foregående øvelse er $f'(x)>0$ for $x>0$. Dvs. f er en voksende funktion for $x\geq 0$. Der gælder derfor $f(x)>f(0)=0$ for $x>0$.

c) Induktivt får vi, at for alle naturlige tal n gælder: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$.

Da uligheden gælder for alle naturlige tal n, gælder den også i grænsen hvor n går mod uendelig, dog er uligheden ikke længere skarp, så vi får

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$