L&R Uddannelse EGMONT

Løsninger til øvelser i kapitel 5A

Øvelse 5.6

a) Hvis rotordiameteren er 10 meter, starter påvirkningszonen 10 meter fra møllen, så det tager 1 sekund for luften at nå ind til møllen.
Hvis rotordiameteren er 100 meter, starter påvirkningszonen 100 meter fra møllen, så det tager 10 sekunder for luften at nå ind til møllen.
b) Den lille mølle når med 75 omdrejninger i minuttet at lave 1,25 omdrejning på 1 sekund. Hvis møllen har tre vinger, bliver luftmolekylet så påvirket af $3 \cdot 1{,}25 = 3{,}75$ vinger.
Den store mølle når med 15 omdrejninger i minutter at lave 2,5 omdrejning på de 10 sekunder det tager luftmolekylerne at komme ind til møllen. Hvis møllen har tre vinger, bliver luftmolekylet så påvirket af $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ vinger.

Øvelse 5.7

Densiteten af luft ved $20°$ C og atmosfærisk tryk er ca. 1,2 kg/m^3. Lad os tage den lille mølle fra øvelse 5.6. Der var $t = 1$ sekund og rotordiameteren var 10 meter, dvs. tværsnitsarealet bliver $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 78{,}54$ m^2. Sættes nu hastigheden til 5 m/s får vi

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 78{,}54 \cdot 5^3 \cdot 1 = 5890{,}5$$

Da vi regner i standardenheder, får vi energien ud i Joule. Vi kan gentage beregningen ved nogle andre vindhastigheder,

v i m/s	1	2	4	5	10
E i Joule	47,12	376,99	3015,9	5890,5	47124

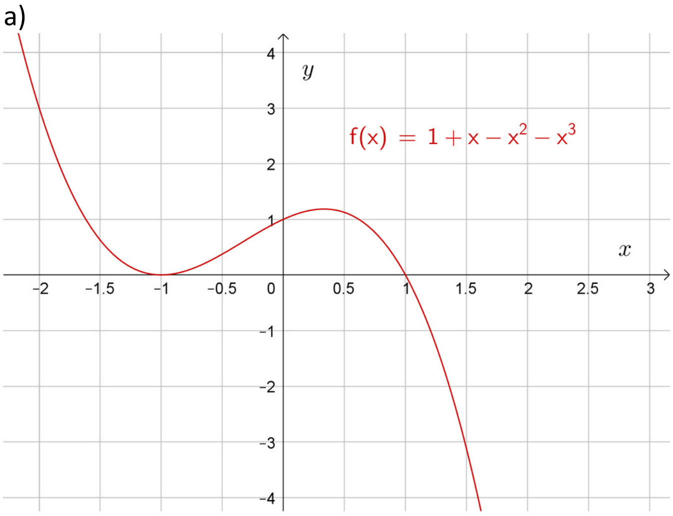
Det ses f.eks., at når hastigheden fordobles, bliver energien otte gange så stor, ligesom vi netop skal se, når energien er proportional med hastigheden i tredje potens.

Øvelse 5.8

a) Radius er 82 meter så arealet er $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 82^2 = 21124$ m^2.
b) Ved 10m/s: $P = 5 \cdot 10^6$ W eller ca. 5MW.
Ved 20m/s: $P = 4 \cdot 10^7$ W eller ca. 40MW.

Øvelse 5.9

a)



b) $p(0) = 1$. Her er $v_2 = 0$, så luften vil stå stille, efter den har passeret møllen. Møllens effekt er det halve af den øvre grænse for effekten. Grafisk betyder det, at grafen skærer y-aksen i $y = 1$.
$p(1) = 0$. Her er $v_2 = v_0$, så luften bevæger sig lige hurtigt før og efter møllen. Der er derfor ikke opsamlet noget energi fra luften, så møllens effekt er 0. Grafisk betyder det, at grafen skærer x-aksen i $x = 1$.

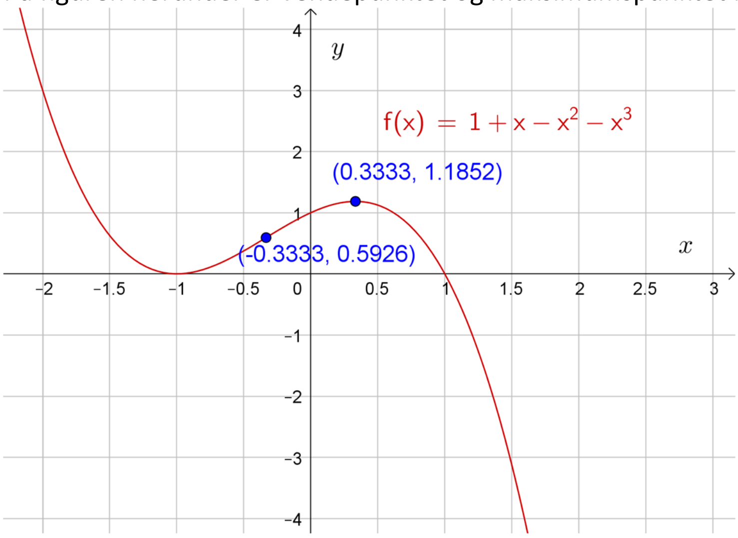
ISBN 9788770668699

c) Hvis man ganger $(x+1)(1-x^2)$ ud, får man netop $-x^3-x^2+x+1$.
Ligningen $(x+1)(1-x^2)=0$ har løsningerne $x=1$ og $x=-1$, hvilket også passer med grafen, idet det er grafens skæringer med førsteaksen. Dette resultat kan man få ved at benytte nulreglen, hvorved man får de to ligninger $x+1=0$ og $1-x^2=0$, som løses hver for sig.

d) Vi har $-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{-1}{3\cdot(-1)}=-\dfrac{1}{3}$. Vi ser af grafen, at der er minimum i $x=-1$. Da maksimum og minimum ligger lige langt fra vendepunktet, må maksimum ligge i $x=\dfrac{1}{3}$. Værdien heri er

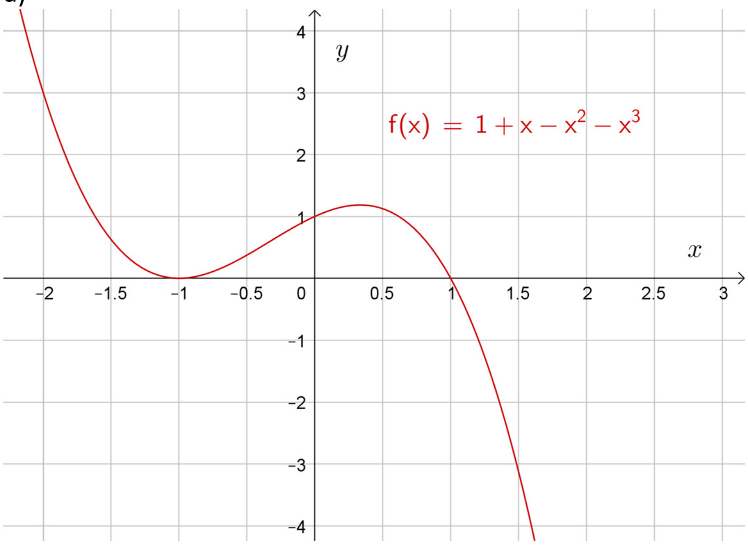
$$p\left(\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=-\frac{1}{27}-\frac{3}{27}+\frac{9}{27}+\frac{27}{27}=\frac{32}{27}\approx 1{,}185$$

Da den øvre grænse for effekten svarer til en funktionsværdi på 2 (som altså ikke kan opnås), kan vi beregne, hvor mange procent af den øvre grænse vi når op på. Dette er $16/27\approx 59{,}26\%$.
På figuren herunder er vendepunktet og maksimumspunktet bestemt grafisk.



Øvelse 5.10

a)



b) Andengradsligningen $-3x^2-2x+1=0$ har diskriminant $d=(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot1=16$ og dermed er løsningerne $x=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{-6}$ som giver enten -1 eller $\dfrac{1}{3}$.

c) Det er de to x -værdier, hvori der er lokale ekstremaer.

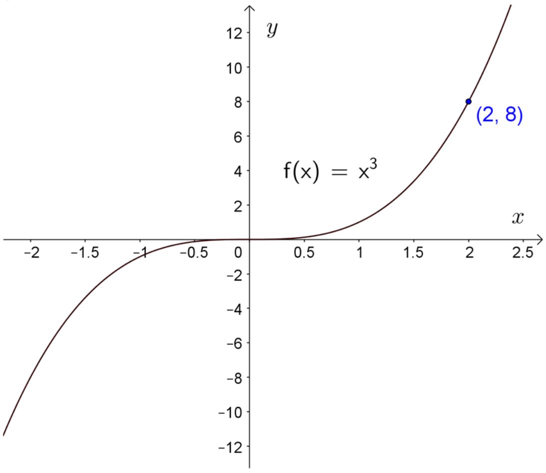
d) $x=\dfrac{1}{3}$ giver $\dfrac{v_2}{v_0}=\dfrac{1}{3}$, som når vi ganger med v_0 giver $v_2=\dfrac{1}{3}v_0$. Dvs. luftens molekyler har efter passagen med vindmøllen en tredjedel af den fart de havde inden de mødte møllen.

ISBN 9788770668699

e) $p\left(\frac{1}{3}\right)=-\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+1=-\frac{1}{27}-\frac{3}{27}+\frac{9}{27}+\frac{27}{27}=\frac{32}{27}\approx 1{,}185$.

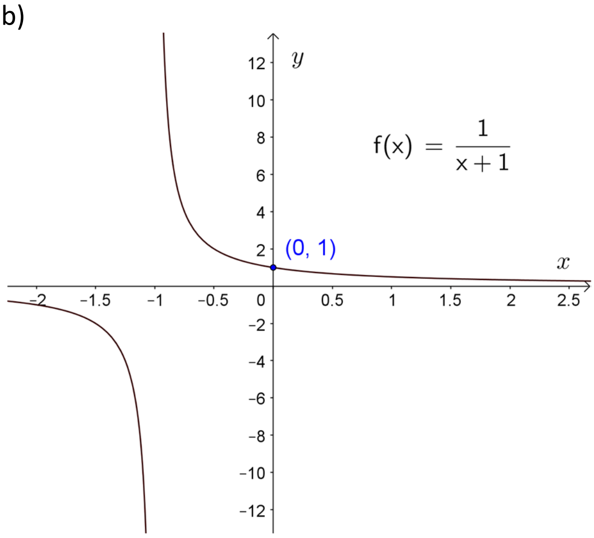
Nu er $P_{mølle}=\frac{1}{2}P_{luft}\cdot p(x)$, så hvis $p(x)$ er maksimal får vi $P_{mølle}=\frac{1}{2}P_{luft}\cdot\frac{32}{27}=\frac{16}{27}P_{luft}=59{,}26\%\cdot P_{luft}$.

Øvelse 5.11



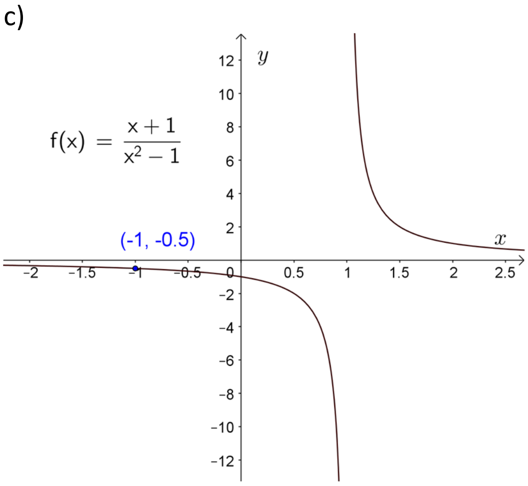
Vi kan finde intervalgrænserne for intervallet på x-aksen ved at løse ligningerne $7{,}8=x^3$ og $8{,}2=x^3$. Dette giver x-værdierne $x=\sqrt[3]{7{,}8}=1{,}9832$ og $x=\sqrt[3]{8{,}2}=2{,}0165$. Vi kan altså bruge intervallet $]1{,}9832;2{,}0165[$.

b)



Vi kan finde intervalgrænserne for intervallet på x-aksen ved at løse ligningerne $0{,}8=1/(x+1)$ og $1{,}2=1/(x+1)$. Dette giver x-værdierne $x=1/0{,}8-1=0{,}25$ og $x=1/1{,}2-1=-1/6=-0{,}167$. Vi kan altså bruge intervallet $]-0{,}167;0{,}25[$.

c)



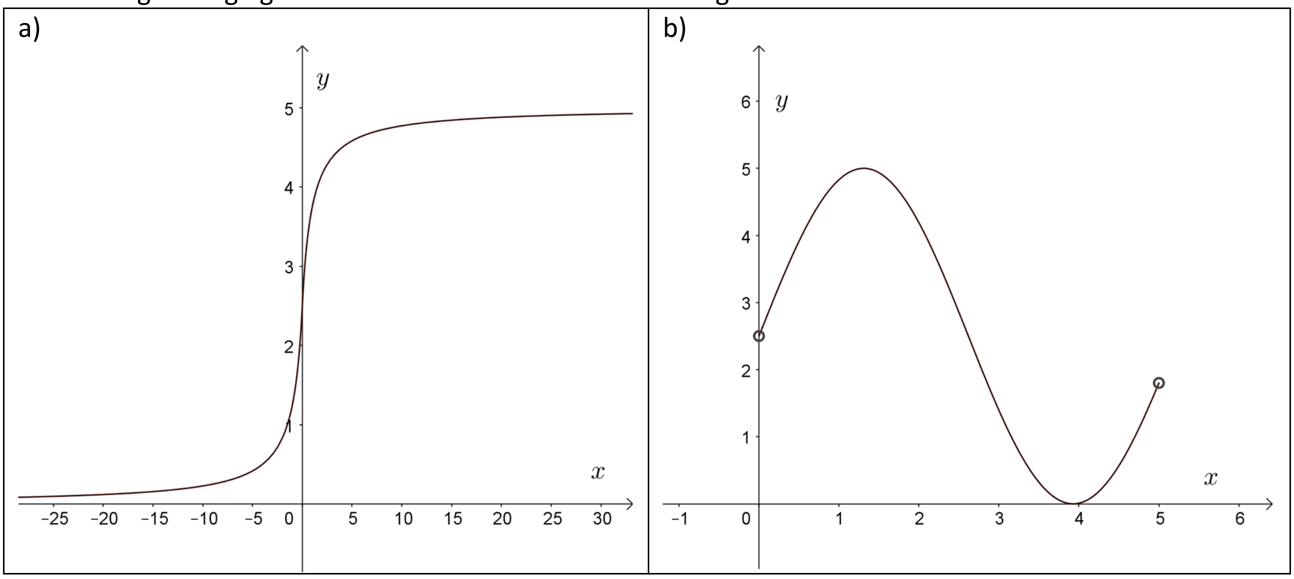
Ud fra forskriften ser det ud til at gå galt, når man forsøger at indsætte $x=-1$, idet nævneren giver 0. Tælleren giver dog også 0, så udtrykket er umiddelbart ubestemt. Funktionsudtrykket kan dog reduceres ved at anvende tredje kvadratsætning i nævneren: $\dfrac{x+1}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$. Vi ser altså, at der egentlig er tale om funktionen $\dfrac{1}{x-1}$.

For at finde det interval, der matcher $]-0{,}501;-0{,}499[$, skal vi løse ligningerne $\dfrac{1}{x-1}=-0{,}501$ og $\dfrac{1}{x-1}=-0{,}499$, som har løsningerne $x=\dfrac{1}{-0{,}501}+1=-0{,}996$ og $x=\dfrac{1}{-0{,}499}+1=-1{,}004$. Vi får altså x-intervallet $]-1{,}004;-0{,}996[$.

Øvelse 5.13
For to tal c og d i værdimængden for f kan vi finde a og b i definitionsmængden for f så $f(a)=c$ og $f(b)=d$. Hvis y er et tilfældigt tal mellem c og d, kan vi ifølge sætning 1B finde et e i definitionsmængden for f så $f(e)=y$. Men så ligger y i værdimængden for f. Da y var et vilkårligt tal i $[c;d]$, ligger altså hele intervallet i værdimængden for f.

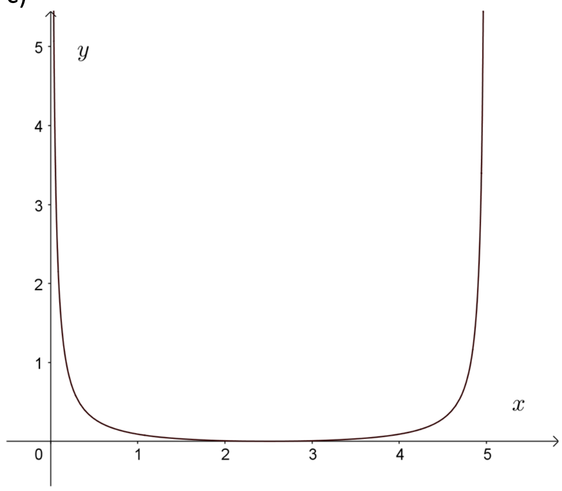
Øvelse 5.14
a) Vi lader $a=0$ og $b=1$ i sætning 1B. Vi har så $f(a)=-1$ og $f(b)=1$. Vi kan da vælge $y=0$ i sætning 1B og konkludere, at der findes et c i intervallet $[0,1]$ så $f(c)=0$. Altså er c et nulpunkt for f i intervallet $[0,1]$.
b) Vi ser på funktionen $f(x)=x^3-15x+1$. Vi har $f(-4)=-3$, $f(0)=1$, $f(2)=-21$ og $f(4)=5$. Vi kan derfor opdele intervallet $[-4;4]$ i de tre intervaller $[-4;0]$, $[0,2]$ og $[2,4]$, og med sætning 1B konkludere, at f har et nulpunkt i hvert interval, som følgelig er en løsning til ligningen $x^3-15x+1=0$.

Øvelse 5.15
Der er mange mulige grafer. Her viser vi bare en enkelt mulighed til hver situation.

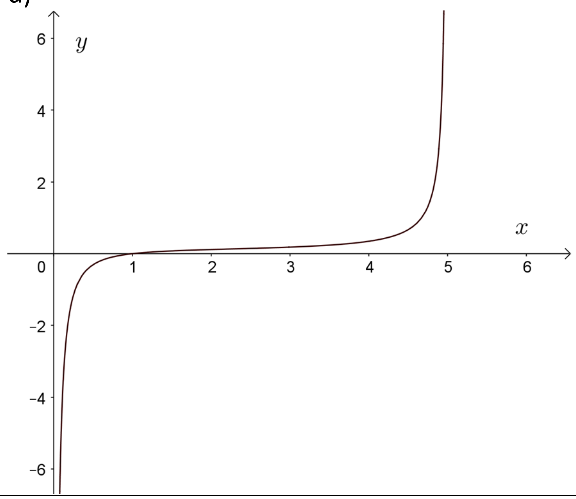


ISBN 9788770668699

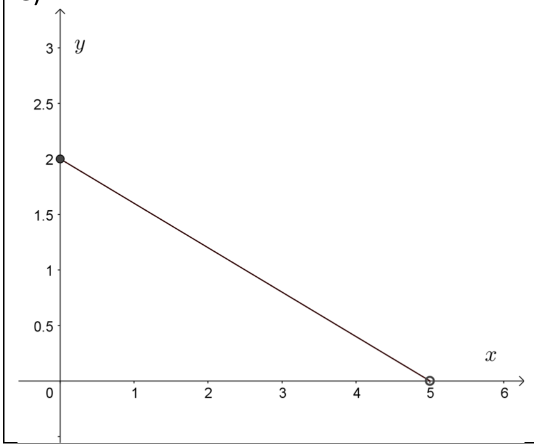
c)



d)



e)

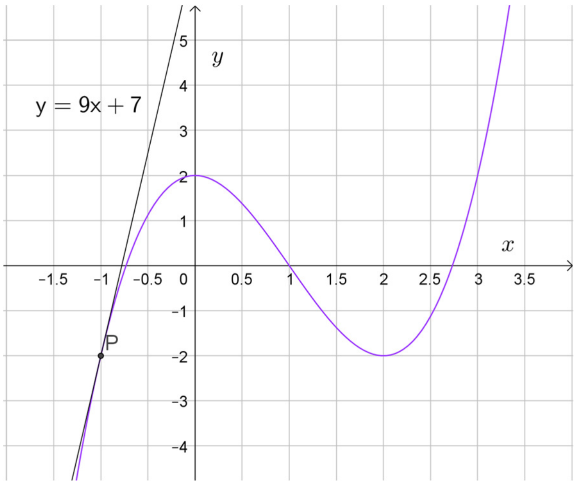


Øvelse 5.20

En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.
(*Bemærk*: *Der henvises til øvelse 5.15, det skal være 5.16, hvor vi møder fæmnomenet i øvelse e*)

Øvelse 5.21

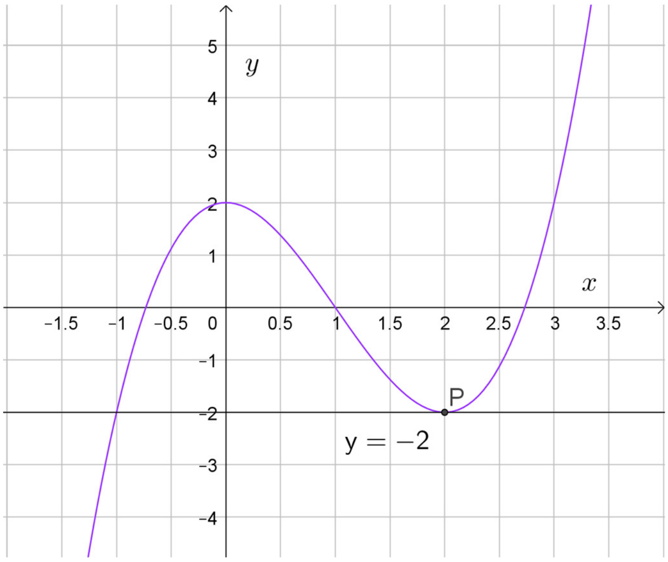
a) Vi indtegner en tangent til grafen i punktet $(-1,-2)$.



Vi kan aflæse hældningskoefficienten for tangenten, som er lig $f'(-1)$. Vi får her $f'(-1)=9$.

Vi indtegner ligeledes en tangent til grafen i punktet $(2,-2)$.

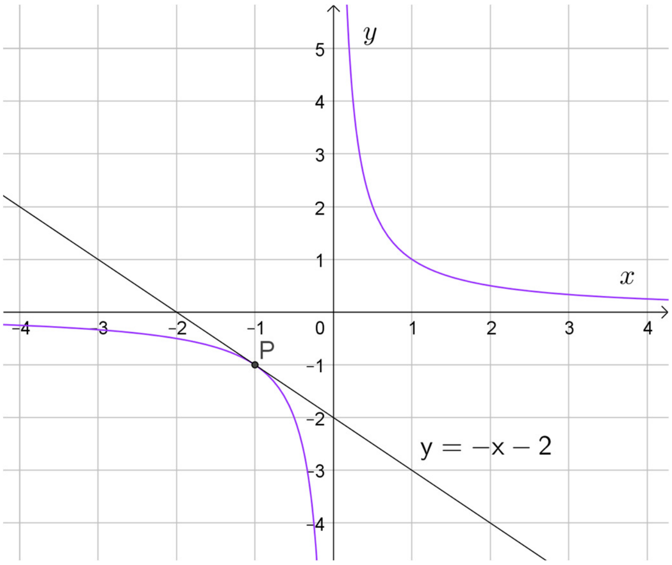
ISBN 9788770668699



Her er tangenten vandret, så hældningskoefficienten er 0. Vi får derfor $f'(2)=0$.

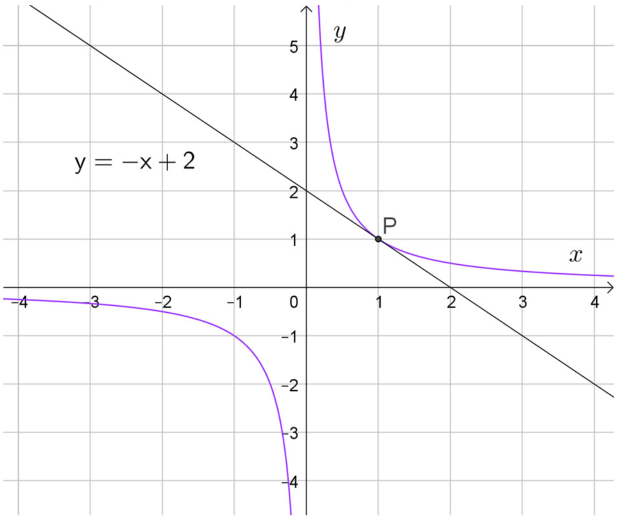
Vi kan videre se, at tangenthældningen vokser kontinuert fra 0 mod uendeligt på intervallet fra 2 og opefter. Ifølge sætning 1B anvendt på funktionen $f'(x)$, findes derfor en x-værdi større end 2 hvori $f'(x)=2{,}25$.

b) Vi indtegner en tangent til grafen i punktet $(-1,-1)$.



Vi kan aflæse hældningskoefficienten for tangenten, som er lig $f'(-1)$. Vi får her $f'(-1)=-1$.

Vi indtegner ligeledes en tangent til grafen i punktet $(1,1)$.



Vi kan aflæse hældningskoefficienten for tangenten, som er lig $f'(1)$. Vi får her $f'(1)=-1$.

Tangenterne til grafen har alle steder en negativ hældningskoefficient. Så ligningen $f'(x)=a$ har kun en løsning når a er negativ.

ISBN 9788770668699

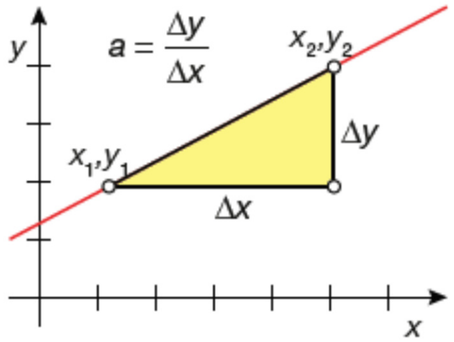
Vi kan videre se, at tangenthældningen vokser kontinuert fra minus uendeligt mod 0 på intervallet fra 0 og opefter. Ifølge sætning 1B anvendt på funktionen $f'(x)$, findes derfor en x-værdi større end 0 hvori $f'(x) = -0{,}25$.

Øvelse 5.22

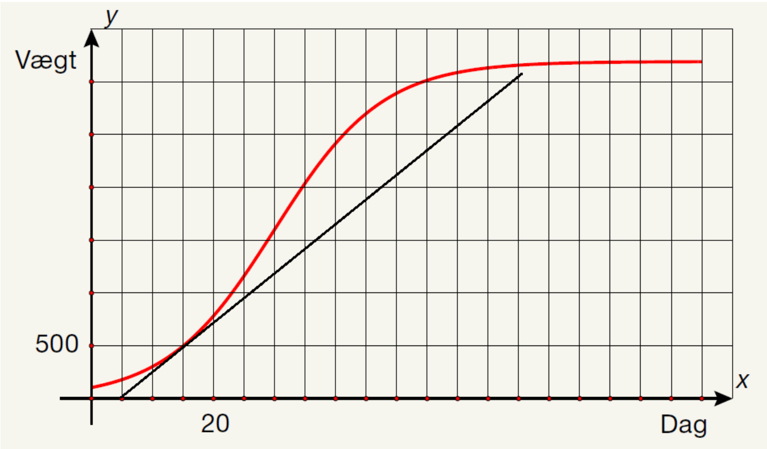
a) Differentiabel for alle x undtagen ved de blå udfyldte cirkler, som øjensynligt er i $x = \pm\frac{\pi}{2}$ og $x = \pm\frac{3\pi}{2}$.
b) Differentiabel for alle x undtagen ved de blå udfyldte cirkler, som øjensynligt er i $x = \pm 2$ og $x = \pm 6$.
c) Differentiabel for alle x.
d) Differentiabel for alle x undtagen $x = -1$.
e) Differentiabel for alle x undtagen $x = 2$.

Øvelse 5.23
En konstant funktion er en lineær funktion med en hældningskoefficient på 0.

Øvelse 5.24
a) Det er den koefficient der er ganget på x i forskriften for den lineære funktion. Eller alternativt er det den værdi som funktionen ændres med, når x vokser med 1.
b) Hvis vi starter i et punkt på grafen, og går stykket Δx til højre i koordinatsystemet, og stykket Δy op derfra, til vi igen rammer grafen, så kan hældningskoefficienten beregnes som forholdet mellem disse ændringer i x og y.
Figuren er taget fra "Hvad er Matematik? 1" s. 59.

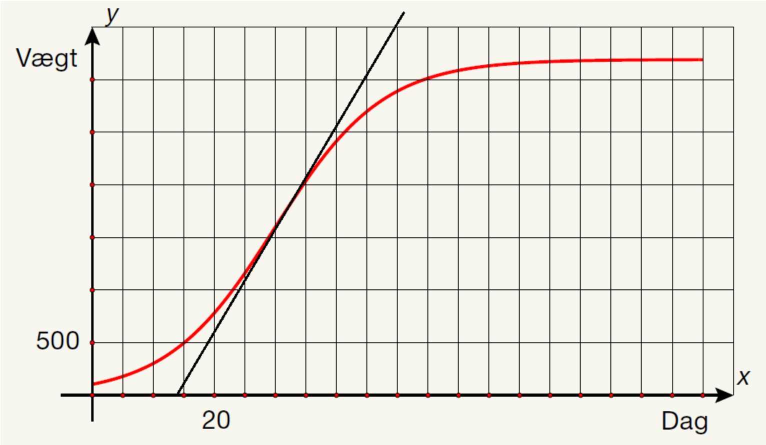


c) Kyllingen vejer ca. 800 gram efter 20 dage.
d) Kyllingen bliver ca. 42 dage gammel, hvis den slagtes når den vejer 2500 gram.
e) Vi tegner efter bedste evne en tangent til grafen ud for de 15 dage.



Vi ser, at tangenten stiger ca. 250 gram på 5 dage, altså er $a = \frac{250}{5} = 50$. Væksthastigheden er dermed 50 gram pr. dag når kyllingen er 15 dage gammel.
f) Vi skal finde der hvor tangenten er stejlest. Den stejlest mulige tangent er forsøgt indtegnet nedenfor.

ISBN 9788770668699



Tangentens røringspunkt er omtrent $(32,1700)$. Så når kyllingen er 32 dage og vejer 1700 gram har den sin største væksthastighed.

Øvelse 5.25

x	-4	-3	-2	-1	0	½	1	2	3	4
x^2	-8	-6	-4	-2	0	1	2	4	6	8
	$2x$									
x^3	48	27	12	3	0	0,75	3	12	27	48
	$3x^2$									
$0{,}25x^2$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,25	0,5	1	1,5	2
	$0{,}5x$									
$0{,}25x^2-2x+3$	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,75	-1,5	-1	-0,5	0
	$0{,}5x-2$									
x^3-3x^2	72	45	24	9	0	-2,25	-3	0	9	24
	$3x^2-6x$									
$\sqrt{x}$	Udef.	Udef.	Udef.	Udef.	Udef.	0,707	0,5	0,354	0,289	0,25
	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$									
$\ln(x)$	Udef.	Udef.	Udef.	Udef.	Udef.	2	1	0,5	0,333	0,25
	$\frac{1}{x}$									

Udef. Betyder at funktionen eller dens afledte er udefineret i den respektive x-værdi.

Øvelse 5.26

a) $f'(0)=0$. Det er hældningen af tangenten i $x=0$.

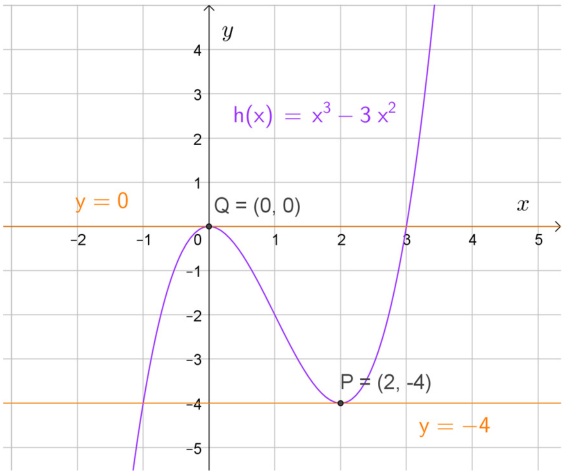
$f'(-4)=-2$. Det er hældningen af tangenten i $x=-4$.

$f'(50)=25$. Det er hældningen af tangenten i $x=50$.

b) Vi har $g'(x)=0{,}5x-2$. Hældningen af tangenten i røringspunktet findes nu som $g'(4)=0{,}5\cdot 4-2=0$. Tangenten har altså en hældningskoefficient der er 0, og er dermed vandret. Ligningen for tangenten er derfor på formen $y=b$. Konstanten b kan findes som y-værdien i røringspunktet, der er $g(4)=0{,}25\cdot 4^2-2\cdot 4+3=-1$. Altså er tangentens ligning $y=-1$.

c) Herunder er tegnet grafen for h samt en tangent i hvert af de to ekstremumspunkter.

ISBN 9788770668699



Det ses, at der er lokalt ekstremum når $x=0$ og når $x=2$.
I ekstremumspunkterne er tangenten vandret, dvs. den har en hældning på 0.
Vi bestemmer x-værdierne i ekstremumspunkterne ved beregning. Hertil skal vi løse ligningen $h'(x)=0$.

$h'(x)=3x^2-6x$

$0=3x^2-6x$

$0=3x(x-2)$

hvor vi har sat $3x$ udenfor en parentes. Ifølge nulreglen er ligningen opfyldt når $3x=0$ og når $x-2=0$. Dvs. ligningens løsninger er $x=0$ og $x=2$, som netop er ekstremumspunkternes x-værdier.

Øvelse 5.27

a) $y=5+0{,}4\cdot(x-3)$ som kan reduceres til $y=0{,}4x+3{,}8$.

b) $y=7-1{,}5\cdot(x+2)$ som kan reduceres til $y=-1{,}5x+4$.

c) Hældningskoefficienten beregnes til $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-10}{9-4}=\frac{-8}{5}=-1{,}6$.

Linjens ligning er $y=10-1{,}6\cdot(x-4)$ som kan reduceres til $y=-1{,}6x+16{,}4$.

Øvelse 5.28

a) Ikke en epsilonfunktion.
b) Er en epsilonfunktion.
c) Ikke en epsilonfunktion.
d) Kan forkortes til $3h$ som er en epsilonfunktion.
e) Er en epsilonfunktion.
f) Ikke en epsilonfunktion – logaritmen er slet ikke defineret i 0.

Øvelse 5.29

a) Vi løser ligningen $f'(x)=-12$.

$f'(x)=2x$

$-12=2x$

$x=-6$.

Den tilhørende y-værdi beregnes som funktionsværdien i $x=-6$.

$y=f(-6)=(-6)^2=36$

Så i punktet $(-6,36)$ på grafen har tangenten en hældningskoefficient på -12.

b) Tangentens ligning er $y=36-12(x+6)$ som kan reduceres til $y=-12x-36$.

c) Tangentens skæringspunkt med andenaksen har koordinaterne $(0,-36)$.

d) Når $f'(x)=5$ får vi $x=2{,}5$. Røringspunktet har dermed koordinaterne $(2{,}5;6{,}25)$ og tangentens ligning bliver $y=5x-6{,}25$. Skæringspunktet med andenaksen bliver så $(0;-6{,}25)$.

e) Hvis y-koordinaten til tangentens røringspunkt er y_0 vil tangenten skære andenaksen i punktet $(0,-y_0)$. Vi kan bevise resultatet ved at opstille en generel formel for tangentens ligning i $x=x_0$:

ISBN 9788770668699

$y = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2 = 2x_0 \cdot x - x_0^2$. Heraf ses, at tangenten skærer y-aksen i $-x_0^2 = -y_0$.
f) Den første tangent skærer x-aksen i -3. Den anden tangent skærer x-aksen i $1{,}25$. I begge tilfælde skærer tangenten x-aksen i en værdi der er det halve af x-værdien i røringspunktet. Vi kan bevise resultatet ved at sætte $y = 0$ i den generelle formel for tangentens ligning: $0 = 2x_0 \cdot x - x_0^2$ som har løsningen $x = x_0 / 2$.

Øvelse 5.30
a) Da $f'(x) = 3x^2$ aldrig kan blive negativ, er det kun positive tal og 0 der kan optræde som hældningskoefficient for en tangent til grafen.
b) Vi løser ligningen $f'(x) = 12$.

$$f'(x) = 3x^2$$
$$12 = 3x^2$$
$$4 = x^2$$
$$\pm 2 = x$$

Det er altså i punkterne $(-2,-8)$ og $(2,8)$, at tangenten har en hældningskoefficient på 12.
c) Det er i punktet $(2,8)$. Tangenten har ligningen $y = 8 + 12(x-2)$, som kan reduceres til $y = 12x - 16$.
d) Tangenten skærer andenaksen i punktet med koordinaterne $(0,-16)$.
e) Hvis y-koordinaten til tangentens røringspunkt er y_0 vil tangenten skære andenaksen i punktet $(0,-2y_0)$. Vi kan bevise resultatet ved at opstille en generel formel for tangentens ligning i $x = x_0$:
$y = 3x_0^2 \cdot (x - x_0) + x_0^3 = 3x_0^2 \cdot x - 2x_0^3$. Heraf ses, at tangenten skærer y-aksen i $-2x_0^3 = -2y_0$.
f) Ligningen for tangenten i det andet punkt er $y = 12x + 16$, i overensstemmelse med sætningen vi har formuleret i e).

Øvelse 5.31

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^4 = x_0^4 + 4x_0^3 h + 6x_0^2 h^2 + 4x_0 h^3 + h^4 = f(x_0) + (4x_0^3)h + \left(6x_0^2 h + 4x_0 h^2 + h^3\right)h$$

Her er vores epsilonfunktion $E(h) = 6x_0^2 h + 4x_0 h^2 + h^3$ som netop opfylder kriterierne for en epsilonfunktion. Vi kan dermed konkludere, at $f'(x_0) = 4x_0^3$ og generelt at $f'(x) = 4x^3$.

Øvelse 5.32
Når $f(x) = x^2 + 3x - 4$ er $f'(x) = 2x + 3$.
a) $f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ er hældningen af tangenten til grafen i $(0, f(0))$.
$f'(10) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$ er hældningen af tangenten til grafen i $(10, f(10))$.
b) Vi ved allerede, at tangenthældningen er 3 i $(0, f(0))$, så vi mangler y-koordinaten, som er $y = f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$. Ligningen for tangenten bliver så $y = -4 + 3(x - 0)$ eller $y = 3x - 4$.
c) Ligningen $f'(x) = 0$ bliver $2x + 3 = 0$ som har løsningen $x = -1{,}5$. Dette betyder, at når $x = -1{,}5$ har grafen vandret tangent, dvs. det er her parablens toppunkt er placeret.

Øvelse 5.33
Reglen anvendt med $k = 0{,}5$ og $f = g$ giver $g'(x) = 0{,}5 \cdot f'(x) = 0{,}5 \cdot 4x^3 = 2x^3$.
a) Vi har $g'(-2) = 2 \cdot (-2)^3 = -16$, som er hældningen af tangenten til grafen i $(-2, g(-2))$.
Vi har $g'(0) = 2 \cdot 0^3 = 0$, som er hældningen af tangenten til grafen i $(0, g(0))$.
Vi har $g'(3) = 2 \cdot 3^3 = 54$, som er hældningen af tangenten til grafen i $(3, g(3))$.
b) Ligningen $g'(x) = 54$ bliver til

$$2x^3 = 54$$
$$x^3 = 27$$
$$x = \sqrt[3]{27}$$
$$x = 3$$

Dvs. når $x = 3$ er tangenthældningen 54, og det er den eneste x-værdi hvor denne tangenthældning forekommer.

c) Ligningen kan løses for alle værdier af a, da værdimængden for $g'(x)$ består af alle reelle tal. For et givet a er der netop én x-værdi, der løser ligningen, nemlig $x=\sqrt[3]{a/2}$.

Øvelse 5.34
Vi skal vise, at $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$.
Vi kan skrive $f-g$ som $f+(-g)$ og anvende regel 1, som giver $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)+(-g)'(x_0)$. Anvender vi nu regel 2 på $-g$ i tilfældet hvor $k=-1$, får vi $(-g)'(x_0)=-g'(x_0)$. Dermed har vi $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)+(-1)(g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$ som ønsket.

Øvelse 5.35
a) $f'(x)=3$.
b) $f'(x)=4x^3-15x^2+8x-2$.
c) $f'(x)=0{,}75x^2+0{,}6x-1$.

Øvelse 5.36
Vi kan bruge sætning 5 fra tidligere i kapitlet og opskrive ligningen som $y=-1+4(x-2)$, som også kan skrives $y=4x-9$.

Øvelse 5.37
Vi har $x_0=2$ og $f(x_0)=-1$ og $f'(x_0)=4$. Indsættes disse oplysninger i formlen fra sætningen får vi $y=-1+4(x-2)$, som også kan skrives $y=4x-9$.

Øvelse 5.38
a) Vi har $p(x)=-0{,}25x^2+6x+4$ så $p(2)=15$ og $p'(x)=-0{,}5x+6$ så $p'(2)=5$. Vi kan dermed opstille tangentligningen: $y=15+5(x-2)$ eller $y=5x+5$.
b) For at vise, at der findes en tangent med en hældningskoefficient på 8, skal vi løse ligningen $p'(x)=8$. Løsningen hertil er $x=-4$. Bestemmes tangentligningen for denne x-værdi får man $y=8x+8$.

Øvelse 5.39
(*Bemærk*: *Der er en trykfejl i forskriften, som skulle være:* $q(x)=0{,}25x^4-0{,}5x^3-2x^2-1$. *Med denne forskrift giver sidste spørgsmål mening, med forskriften i opgaven giver den ikkem mening*)
a) Vi har $q(x)=0{,}25x^4-0{,}5x^3+2x^2-1$ så $q'(x)=x^3-1{,}5x^2+4x$ som giver $q'(0)=0$, dvs. tangentens hældning er 0 når $x=0$.
b) Tangentligningen er $y=-6{,}5x-4{,}75$.
c) Vi sætter tangentens ligning lig funktionen og løser ligningen,
$0{,}25x^4-0{,}5x^3+2x^2-1=-6{,}5x-4{,}75$
Denne ligning har kun løsningen $x=-1$. Der er altså kun ét skæringspunkt mellem grafen og tangenten, som netop er i røringspunktet for tangenten.
Hvis spørgsmålet regnes med forskriften: $q(x)=0{,}25x^4-0{,}5x^3-2x^2-1$, så vil der være de omtalte ekstra to løsninger: $x=-0{,}236,\ x=4.236$

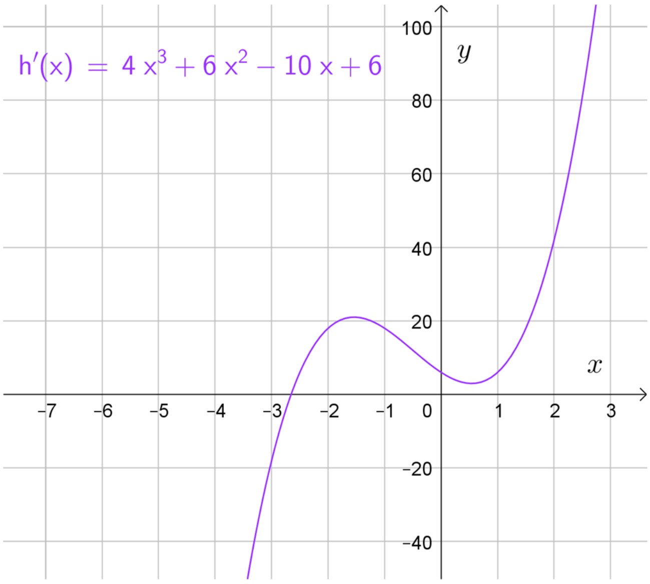
Øvelse 5.40
a) *Bemærk: Der er en trykfejl i bogen. Punktet* $(2,0)$ *ligger ikke på grafen. Det skal være punktet* $(0,2)$.
Tangentligningen her er $y=4{,}5x+2$.
b) Vi løser ligningen $f'(x)=4{,}5$
$1{,}5x^2-6x+4{,}5=4{,}5$
$1{,}5x^2-6x=0$
$1{,}5x(x-4)=0$

Ifølge nulreglen er løsningerne til ligningen $x=0$ og $x=4$. Dvs. tangenten har også en hældning på 4,5 når $x=4$. Røringspunktet bliver $(4,4)$ da $f(4)=4$.

Øvelse 5.41

a) Vi har $h'(x)=4x^3+6x^2-10x+6$. Ligningen $h'(x)=a$ er derfor en tredjegradsligning, og den har således en løsning for alle værdier af a.

b) Ligningen i a) er en tredjegradsligning og kan have 1, 2 eller 3 løsninger. Grafisk svarer det til antallet af skæringspunkter mellem den vandrette linje $y=a$ og grafen for $h'(x)$, som er tegnet herunder.



For en værdi af a mellem y-værdien for de to ekstremumspunkter, vil ligningen have tre løsninger.

For en værdi af a lig y-værdien for et af de to ekstremumspunkter, vil ligningen have to løsninger.

For en værdi af a over y-værdien for maksimummet eller under y-værdien for minimummet, vil ligningen have én løsning.

De to værdier af a hvor der er to løsninger, kan findes ved at bestemme de lokale ekstremaer for $h'(x)$, dvs. vi skal først løse ligningen $h''(x)=0$ eller $12x^2+12x-10=0$. Løsningerne er $x=0{,}541$ og $x=-1{,}541$. De tilhørende y-værdier er $2{,}98$ og $21{,}02$. Vi kan derfor formulere resultatet mere præcist således:

Ligningen $h'(x)=a$ har tre løsninger når a ligger i intervallet $]2{,}98;21{,}02[$.

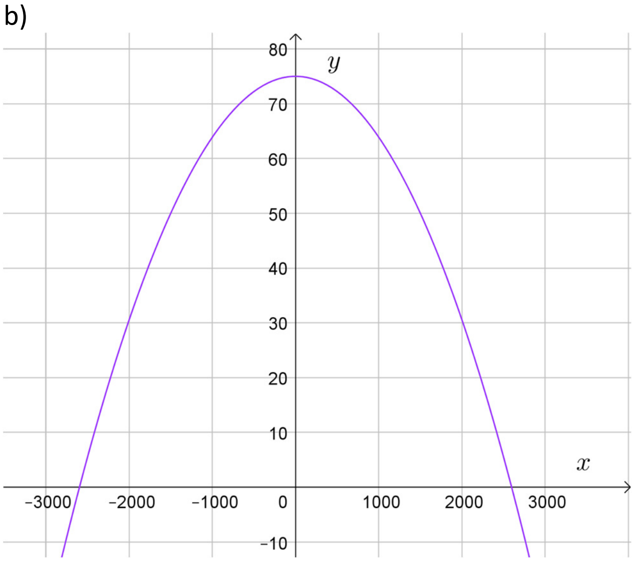
Ligningen $h'(x)=a$ har to løsninger når a har én af værdierne $2{,}98$ og $21{,}02$.

Ligningen $h'(x)=a$ har én løsning når a ligger udenfor intervallet $[2{,}98;21{,}02]$.

Øvelse 5.42

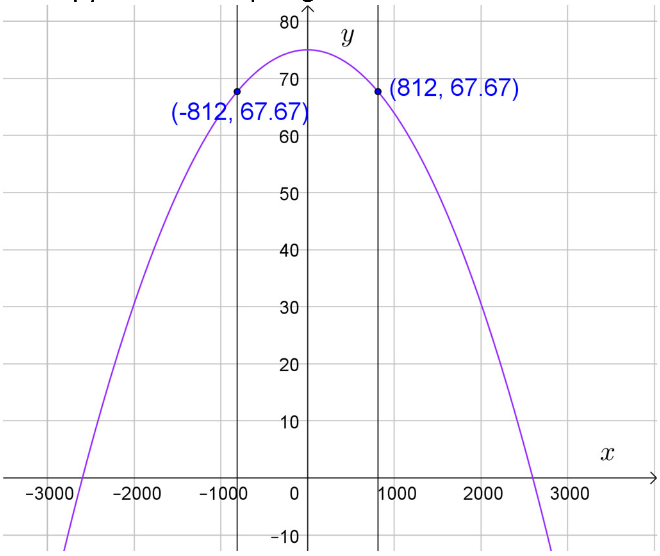
a) $y=\sqrt{45000^2-x^2}-44925$.

b)

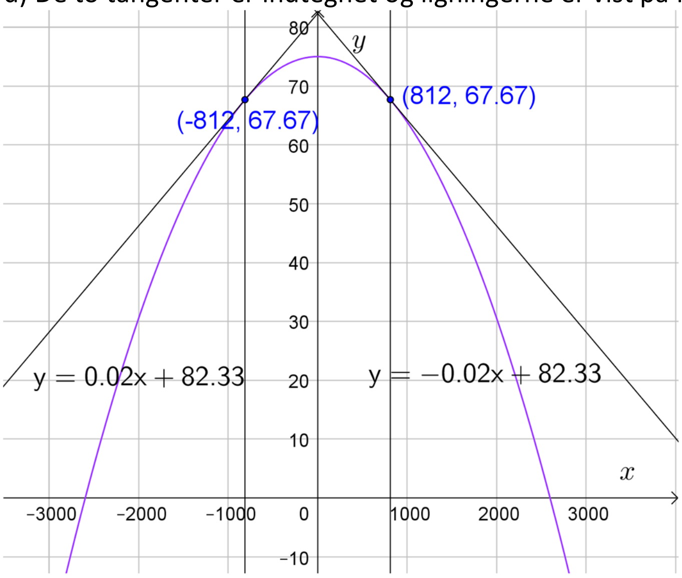


ISBN 9788770668699

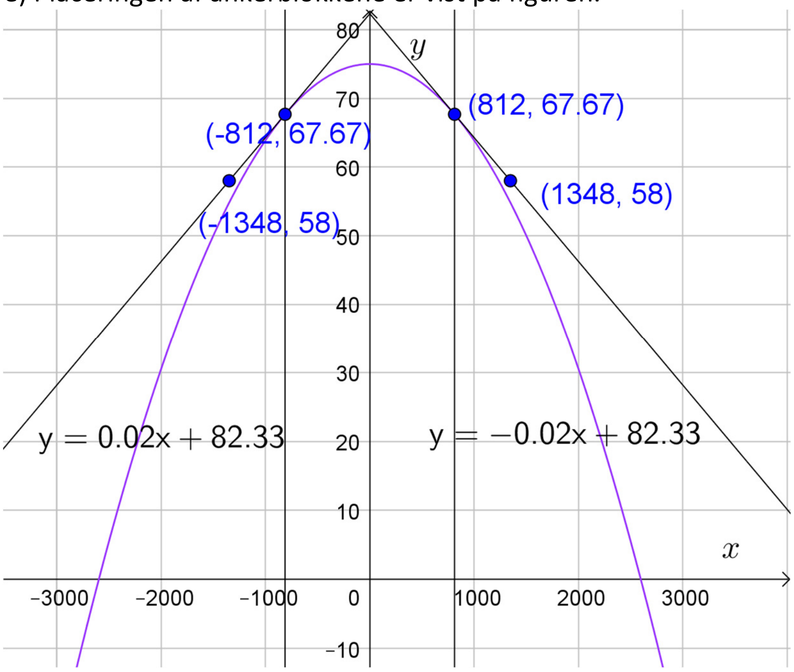
c) Vi indsætter $x = \pm 1624/2 = \pm 812$ i ligningen fra a) og får $y = \sqrt{45000^2 - (\pm 812)^2} - 44925 = 67{,}67$. Placeringen af de to pyloner er vist på figuren herunder.



d) De to tangenter er indtegnet og ligningerne er vist på figuren.



e) Placeringen af ankerblokkene er vist på figuren.



ISBN 9788770668699

Vi finder ligningen for linjen gennem de to punkter $(-1348,58)$ og $(-812;67{,}67)$. Vi har $a=\dfrac{67{,}67-58}{-812-(-1348)}=0{,}018$.
Ligningen er nu $y=58+0{,}018(x+1348)=0{,}018x+81{,}9$. Dette er i fin overensstemmelse med ligningen for tangenten. Regnes med uafrundede tal bliver de to konstanter næsten helt ens. Ligningen for den anden linje er $y=-0{,}018x+81{,}9$.

Øvelse 5.43
a) Tangentens ligning i punktet (x_0,x_0^2) er $y=x_0^2+2x_0\cdot(x-x_0)$ som også kan skrives $y=2x_0\cdot x-x_0^2$. Vi indsætter heri punktet $(1,-3)$ og får ligningen $-3=2x_0-x_0^2$. Dette er en andengradsligning
$x_0^2-2x_0-3=0$
Her er $d=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$ og løsningerne er derfor $x=\dfrac{2\pm4}{2}=1\pm2$, altså -1 og 3. Tangenterne i disse x-værdier vil altså gå igennem punktet $(1,-3)$.
b) Vi indsætter punktet (a,b) i tangentens ligning og får andengradsligningen $b=2x_0\cdot a-x_0^2$ som kan omskrives til
$x_0^2-2a\cdot x_0+b=0$
Her er diskriminanten $d=(-2a)^2-4\cdot1\cdot b=4a^2-4b=4(a^2-b)$.
Vi ved, at andengradsligningen har to løsninger netop når $d>0$, dvs. netop når $a^2>b$. Dermed er der to forskellige tangenter gennem punktet (a,b), når denne betingelse er opfyldt. Det svarer grafisk til, at punktet ligger under parablen.

Øvelse 5.44
a) *(Der skal stå $f(x)=2x^2-7x-20$, ikke $f(c)$)* Funktionen har et minimum, som er $-26{,}125$.
b) *(Der mangler et plus: $g(x)=x^3+x^2+x+1$)* Funktionen har ingen ekstremaer.
c) Funktionen har et minimum, som er 0.

Øvelse 5.45
Vi indlægger et koordinatsystem med tiden i timer ud ad x-aksen og strækningen i km op ad y-aksen. Køreturen kan nu beskrives som en graf for en funktion f der går fra punktet $(0,0)=(a,f(a))$ hvor vi starter til punktet $(2,150)=(b,f(b))$ hvor vi slutter. Hældningen af den rette linje, der forbinder de to punkter er
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{150-0}{2-0}=75$$
Hvis vi går ud fra, at f er en differentiabel funktion, får vi nu, at der findes et tidspunkt c så $f'(c)=75$, dvs. farten til tidspunktet c var 75 km/t.

Øvelse 5.46
a) Med $a=-2$ og $b=2$ er $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{16-4}{2-(-2)}=\dfrac{12}{4}=3$.
b) $f'(c)=3$ giver ligningen $3c^2+4c-1=3$ som har løsningerne $c=-2$ og $c=2/3$.

Øvelse 5.47
a) Hvis de fire nulpunkter kaldes x_1, x_2, x_3 og x_4 (sorteret i stigende rækkefølge), så kan vi anvende Rolles sætning på hvert af intervallerne $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ og $[x_3,x_4]$ og dermed finde tre forskellige tal mellem a og b (ét i hvert interval) hvor $f'(x)=0$, dvs. den afledte funktion har tre nulpunkter i intervallet $[a,b]$.
b) Hvis f har n nulpunkter vil f' have $n-1$ nulpunkter i intervallet.

Øvelse 5.48
Punkt 2: Som i beviset vælges $x_1<x_2$ og vi skal vise $f(x_1)>f(x_2)$. Som i beviset kan vi finde c så
$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$

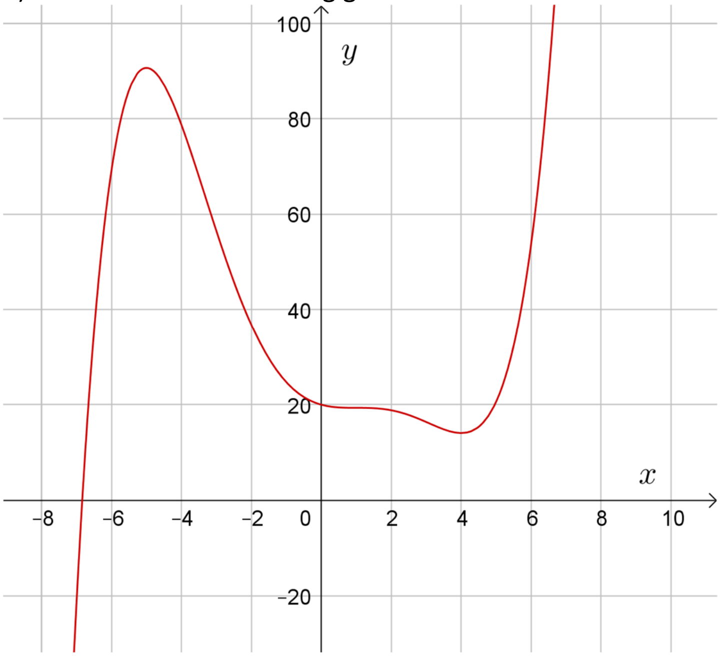
ISBN 9788770668699

Denne gang er højresiden negativ, da $x_2 - x_1 > 0$ men $f'(c) < 0$. Altså er $f(x_2) - f(x_1) < 0$, men så er $f(x_2) < f(x_1)$, dvs. f er aftagende.

Punkt 3: Som i punkt 1 og 2, men her fås $f'(c) = 0$, som gør at vi kan konkludere, at $f(x_1) = f(x_2)$, så funktionen er konstant.

Øvelse 5.49

a) Herunder er vist en mulig graf.



Monotoniforholdene er som følger:

f er voksende på intervallet $]-\infty;-5]$.

f er aftagende på intervallet $[-5;4]$.

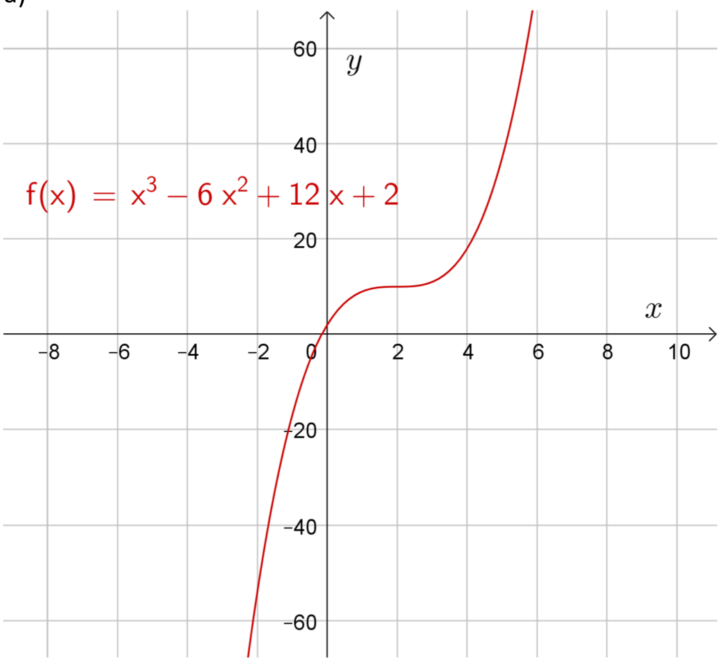
f er voksende på intervallet $[4;\infty[$.

b) Da f' har tre nulpunkter må f' mindst have grad 3, så f må mindst have grad 4.

Yderligere er graden af polynomiet ulige, da funktionen er voksende på begge de yderste monotoniintervaller. Dermed er graden af polynomiet mindst 5.

Øvelse 5.50

a)



ISBN 9788770668699

b) $f'(x)=3x^2-12x+12$.

Vi skal løse $f'(x)=0$ dvs. andengradsligningen

$3x^2-12x+12=0$

Vi dividerer igennem med 3,

$x^2-4x+4=0$

Vi genkender dette som kvadratet på $x-2$, altså får vi ligningen

$(x-2)^2=0$

Andengradsligningen har altså den ene løsning $x=2$.

Vi bestemmer om funktionen vokser eller aftager på hver side af $x=2$.

$f'(1)=3$

$f'(3)=3$

Altså er funktionen voksende på begge sider af $x=2$. Der er derfor tale om en monotont voksende funktion.

Øvelse 5.51

(*Bemærk: y bør erstattes af* $V(T)$)

Vi bestemmer $V'(T)=-0{,}06426+0{,}0170086\cdot T-0{,}0002037\cdot T^2$. Sætter vi lig med 0 og løser for T får vi $T=3{,}97$ og $T=79{,}53$. Da funktionen er begrænset til temperaturintervallet $[0;30]$, ser vi bort fra den sidste løsning. For at undersøge hvad der sker i $T=3{,}97$ finder vi en tangenthældning på hver side, f.eks.

$V'(3)=-0{,}015$

$V'(5)=0{,}016$

Heraf ses, at der er tale om et minimum for $V(T)$, dvs. ved en temperatur på ca. $4°$ C er rumfanget af 1kg vand minimalt. Da densiteten beregnes som masse pr. volumen, dvs. $1/V(T)$, vil et minimum for rumfanget give et maksimum for densiteten. Derfor er densiteten størst for $T=3{,}97$.

Øvelse 5.52

(*Bemærk: Der mangler et x på 500 i forskriften:* $O(x)=x^3-30x^2+5++x+30$. *Og dette angiver de samlede omkostninger, ikke omkostninger pr ton*)

a) Vi skal først opstille en funktionsforskrift $f(x)$ for fortjenesten. Fortjenesten er indtægter minus udgifter, altså

$f(x)=I(x)-U(x)$

Her er indtægtsfunktionen givet ved $I(x)=308x$ da prisen pr. ton blev oplyst at være 308.

Udgiftsfunktionen er $U(x)=O(x)$ - *det er en fejl i opgaven, at det er angivet som omkostninger pr ton*.

Vi får dermed $f(x)=308x-\left(x^3-30x^2+500x+30\right)$.

Vi løser ligningen $f'(x)=0$ og får $x=16$, med værdien 482.

Øvelse 5.53

a) $f'(x)=2ax+b$.

I skæringspunktet med andenaksen er $x=0$. Vi har

$f'(0)=2a\cdot 0+b=b$

som påstået i sætningen.

b) Vi skal løse ligningen $f'(x)=0$. Dette giver

$2ax+b=0$

$2ax=-b$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

Dvs. grafen har vandret tangent i $x=-\dfrac{b}{2a}$. Vi vælger en x -værdi én over og under denne x-værdi og får

$$f'\left(-\frac{b}{2a}-1\right)=2a\left(-\frac{b}{2a}-1\right)+b=-b-2a+b=-2a$$

$$f'\left(-\frac{b}{2a}+1\right)=2a\left(-\frac{b}{2a}+1\right)+b=-b+2a+b=2a$$

ISBN 9788770668699

Heraf ses, at hvis $a > 0$, er der tale om et minimum, og hvis $a < 0$, er der tale om et maksimum.
Andenkoordinaten til toppunktet udledes således:

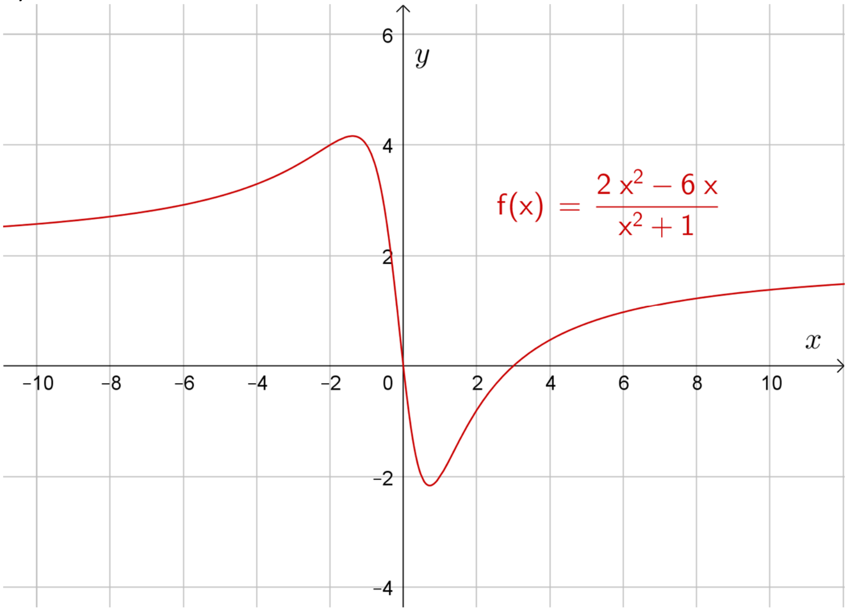
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\frac{b^2}{(2a)^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

I første brøk kan vi forkorte et a. Dernæst sættes på fælles brøkstreg.

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{d}{4a}.$$

Øvelse 5.54

a)



b) Værktøjsprogrammet giver $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 4x - 6}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

c) Vi løser $f'(x) = 0$. Vi kan løse den på computeren og få $x = 0{,}721$ og $x = -1{,}387$. Men vi kan faktisk også løse den i hånden, da vi kan gange igennem med nævneren og få andengradsligningen

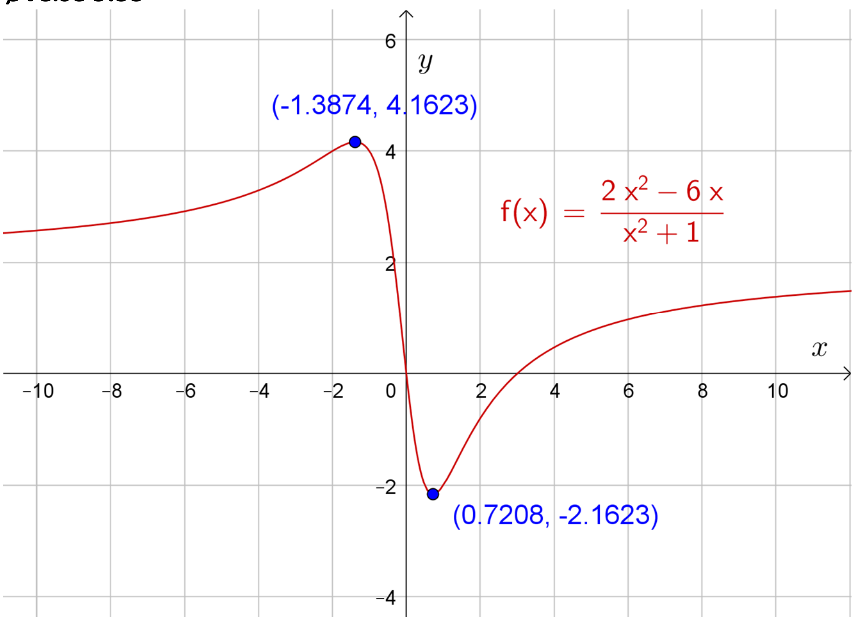
$6x^2 + 4x - 6 = 0$

som netop har disse to løsninger. Men det er betryggende, at vi kan reducere det til en andengradsligning i hånden, da vi så ved, at der kun skal være to løsninger til ligningen.
Nu kan vi bestemme ekstremaerne som y-værdierne i disse to x-værdier.
Minimum er $f(0{,}721) = -2{,}162$ og maksimum er $f(-1{,}387) = 4{,}162$. Her har vi benyttet grafen til at afgøre, at der var tale om et minimum og et maksimum.

d) Monotoniforholdene kan umiddelbart opskrives på baggrund af vores undersøgelser i c) samt grafen i a).
f er voksende på intervallet $]-\infty; -1{,}387]$.
f er aftagende på intervallet $[-1{,}387; 0{,}721]$.
f er voksende på intervallet $[0{,}721; \infty[$.

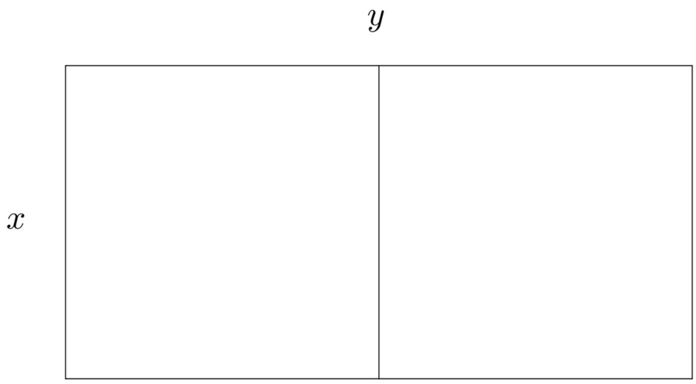
ISBN 9788770668699

Øvelse 5.55



Øvelse 5.56

På website ligger der TINspire løsning



Situationen er vist på tegningen. Vi kalder de to sider x og y, og de er angivet i meter. Arealet og længden af hegnet kan nu beregnes ved formlerne

$A = xy$

$L = 2y + 3x$

Da hegnets længde er 600m får vi

$600 = 2y + 3x$

Heri isoleres y,

$2y = 600 - 3x$

$y = \frac{600 - 3x}{2}$

$y = 300 - 1,5x$

Dette udtryk for y indsættes i arealformlen, som bliver

$A(x) = x(300 - 1,5x) = -1,5x^2 + 300x$

Dette er et andengradspolynomium med negativ ledende koefficient, så det har et maksimum, som vi kan bestemme ved at finde toppunktet. I dette tilfælde er toppunktet $(100,15000)$, hvilket betyder, at for at arealet skal være størst muligt, skal $x = 100$, og da bliver arealet på 15000 m^2.

Øvelse 5.57

På website ligger en TINspire løsning
a) Højden er h, den korte side er x og den lange side er $6x$. Rumfanget er produktet af de tre sider, altså
$V = 6x \cdot x \cdot h = 6h \cdot x^2$
Overfladearealet består af toppen som har arealet $6x^2$.
En stor sideflade med arealet $6hx$.
To små sideflader med samlet areal på $2hx$.
Lægges disse arealer sammen får vi $O = 6x^2 + 8hx$.
b) Vi indsætter $O = 80$ og isolerer h,

$$6x^2 + 8hx = 80$$
$$8hx = 80 - 6x^2$$
$$h = \frac{80 - 6x^2}{8x}$$

Dette udtryk indsættes i formlen for rumfanget,

$$V = 6 \cdot x^2 \cdot \left(\frac{80 - 6x^2}{8x} \right) = \frac{3}{4} x \cdot \left(80 - 6x^2 \right)$$

Vi finder maksimum for denne funktion med et værktøjsprogram. Det giver punktet $(2{,}108;84{,}327)$. Dermed er det størst mulige rumfang på 84,327.

Øvelse 5.58

Vi bemærker først, at andengradspolynomiet i nævneren har rødder i -2 og 3, så funktionen er ikke defineret for disse to x-værdier. Værktøjsprogrammet giver os nu

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 7}{\left(x^2 - x - 6 \right)^2}$$

For at finde monotoniforhold skal vi løse ligningen $f'(x) = 0$, dvs. ligningen

$$\frac{-x^2 + 2x - 7}{\left(x^2 - x - 6 \right)^2} = 0$$

Vi kan gange igennem med nævneren og får andengradsligningen

$$-x^2 + 2x - 7 = 0$$

Diskriminanten er her negativ, idet $d = -24$. Dermed er der ingen steder på grafen med vandret tangent. Vi skal nu undersøge funktionen på de tre intervaller $]-\infty;-2]$, $[-2;3]$ og $[3;\infty[$. Vi vælger en værdi i hvert interval og bestemmer differentialkvotienten

$$f'(-3) = -11/18$$
$$f'(1) = -1/6$$
$$f'(4) = -5/12$$

Differentialkvotienten er altså negativ i alle de tre valgte x-værdier. Hvis vi kan konkludere, at $f'(x)$ er negativ for alle x-værdier i intervallerne, kan vi bruge monotonisætningen til at konkludere, at f er aftagende på alle tre intervaller, og dermed i hele sin definitionsmængde.
Spørgsmålet er altså, om det kan forekomme, at der findes et x_0 i $]-\infty;-2]$ så $f'(x_0) \geq 0$. Vi har allerede set, at $f'(x_0)$ ikke kan være 0, da ligningen $f'(x_0) = 0$ ikke havde nogen løsninger. Antag derfor, at $f'(x_0) > 0$. Da f' er kontinuert findes ifølge sætning 1B (første hovedsætning om kontinuerte funktioner), et tal c mellem x_0 og -3 så $f'(c) = 0$. Men det har vi set ikke kan lade sig gøre. Altså kan vi ikke have $f'(x_0) > 0$. Der gælder derfor $f'(x) < 0$ for alle x i $]-\infty;-2]$. Vi kan konkludere tilsvarende for de to øvrige intervaller.