ISBN 9788770668699

Løsninger til øvelser i kapitel 4

Øvelse 4.4

a) $x = 2{,}928$ og $y = 3{,}450$.

b) $x + y = 6{,}378$.

$2^{6{,}378} = 83{,}18$.

Øvelse 4.5

Ud fra definitionen har vi

$\log_N(a \cdot b) - \log_N(b) = \log_N(a) - \log_N(1)$.

Lægges $\log_N(b)$ til på begge sider, får vi formlen i øvelsen.

Øvelse 4.7

a) Tage gennemsnittet af de to y -værdier.

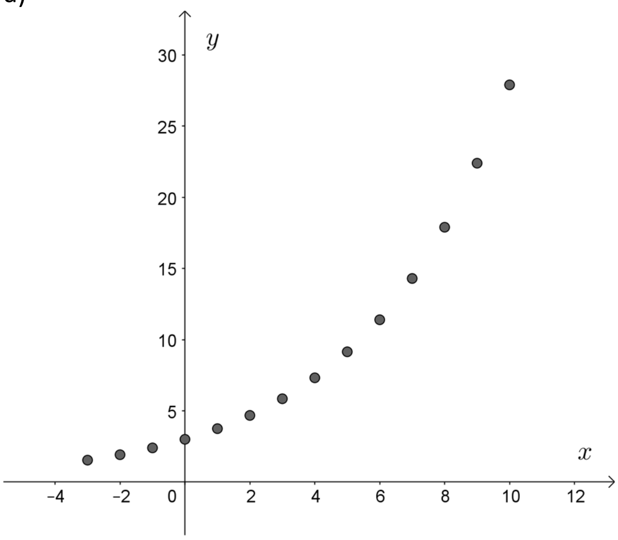
b) Med lineær interpolation: $\dfrac{0{,}8633 + 0{,}8692}{2} = 0{,}86625$. Til sammenligning giver computeren $\log(7{,}35) = 0{,}86629$.

c) For $\log(7{,}15)$ giver lineær interpolation $0{,}85430$ mens computeren giver $0{,}85431$.

For $\log(7{,}25)$ giver lineær interpolation $0{,}86030$ mens computeren giver $0{,}86034$.

Øvelse 4.8

a)



b) Det giver ligningen $y = 3 \cdot 1{,}25^x$.

d)

x	y	$\log(y)$
-3	1,54	0,187521
-2	1,92	0,283301
-1	2,40	0,380211
0	3,00	0,477121
1	3,75	0,574031
2	4,68	0,670246
3	5,85	0,767156
4	7,32	0,864511
5	9,15	0,961421
6	11,40	1,056905
7	14,30	1,155336

ISBN 9788770668699

8	17,90	1,252853
9	22,40	1,350248
10	27,90	1,445604

e) Det giver ligningen $\log(y) = 0,0969x + 0,4771$.

Øvelse 4.9

a) $a^0 = 1$.

b) $a^{-7} = \dfrac{1}{a^7}$.

c) $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

d) $a^{1/5} = \sqrt[5]{a}$.

e) $a^{5/7} = \sqrt[7]{a^5}$.

f) $a^{2,76} = a^{276/100} = a^{69/25} = \sqrt[25]{a^{69}}$.

Øvelse 4.11

a) $2\ln(3x-5) = 8$

$$\ln(3x-5) = \frac{8}{2}$$
$$\ln(3x-5) = 4$$
$$3x-5 = e^4$$
$$3x = e^4 + 5$$
$$x = \frac{e^4+5}{3}$$
$$x = 19,87 .$$

b) $5,7 \cdot e^{0,08x} = 1256$

$$e^{0,08x} = \frac{1256}{5,7}$$
$$0,08x = \ln\left(\frac{1256}{5,7}\right)$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{1256}{5,7}\right)}{0,08}$$
$$x = 67,44 .$$

Øvelse 4.12

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{10^{\log(a)}}{10^{\log(b)}}\right) = \log\left(10^{\log(a)-\log(b)}\right) = \log(a) - \log(b) .$$

Øvelse 4.13

Vi har $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$. Anvender vi nu regel 3 får vi $\log(\sqrt[x]{a}) = \log(a^{1/x}) = \dfrac{1}{x}\log(a)$.

Øvelse 4.14

a) $x = 10^{100}$.

b) Vi skal vælge x større end 10^K .

Øvelse 4.15

$\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$.

$\log(0,000001) = \log(10^{-6}) = -6$

Vi kan gøre resultatet så lavt vi ønsker ved at vælge et argument tilstrækkeligt tæt på 0. Ønsker vi $\log(x) < -K$ for et stort positivt tal K, skal vi vælge x mindre end 10^{-K}. Logaritmen går derfor mod minus uendeligt, når x går mod 0.

Øvelse 4.16

a) x skal være mindre end 10^{-10} (men stadig positiv).

b) Vi skal vælge x mindre end 10^{-K}.

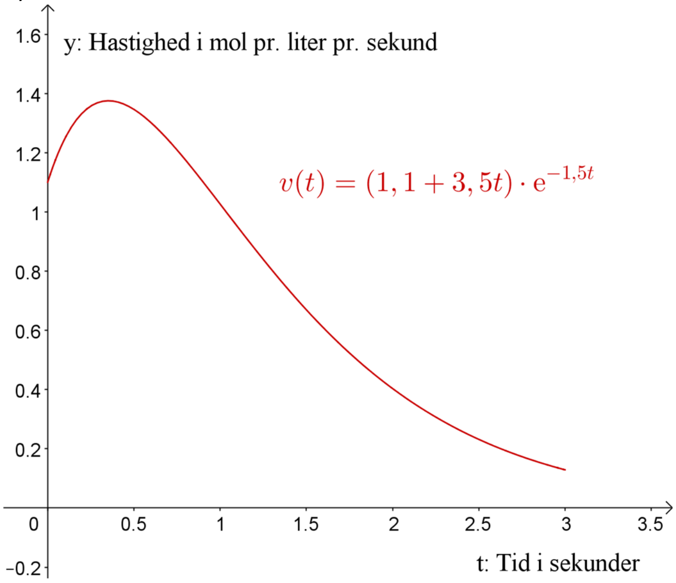
Øvelse 4.17

a) $y = 4{,}1 \cdot e^{0{,}2546x}$.

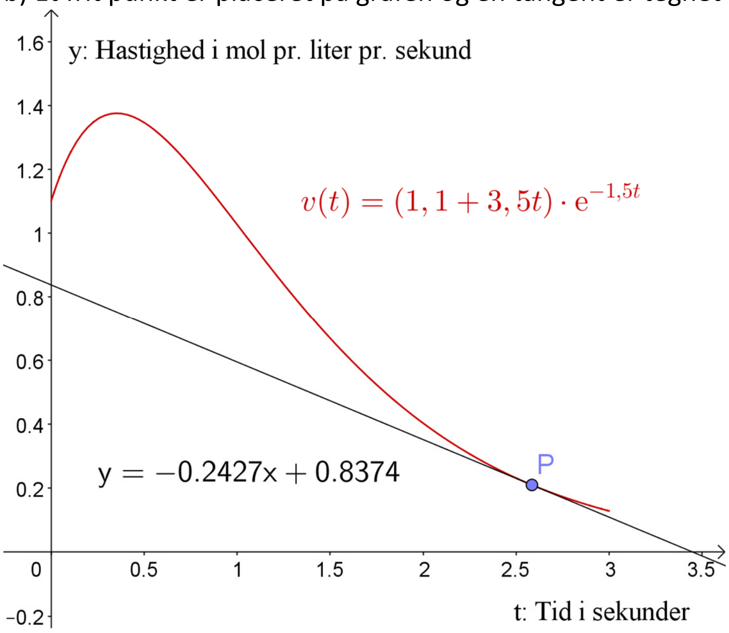
b) $y = 0{,}69 \cdot 0{,}440^t$

Øvelse 4.18

a)

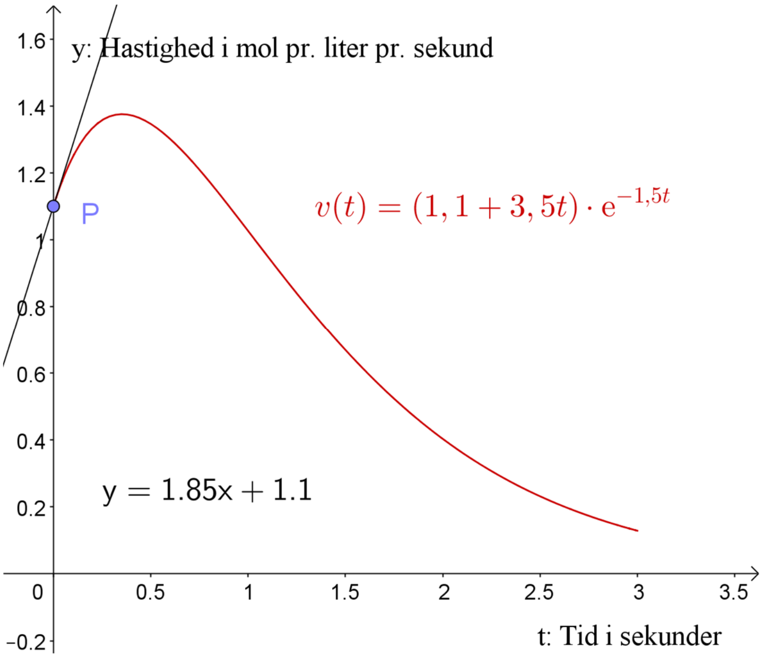


b) Et frit punkt er placeret på grafen og en tangent er tegnet i punktet. Ligningen for tangenten er vist.



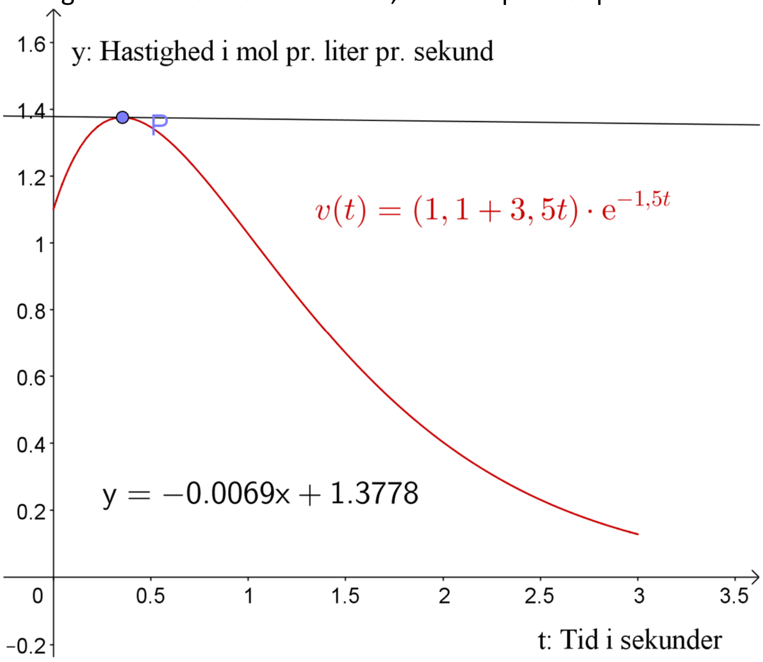
c) Vi placerer tangenten i skæringspunktet med andenaksen. Tangentens skæring med andenaksen er da sammenfaldende med grafens skæring med andenaksen. Vi aflæser denne til 1,1.

ISBN 9788770668699



Vi kan også beregne $v(0)$ hvilket ligeledes giver en hastighed på 1,1 mol pr. liter pr. sekund til tiden $t=0$.

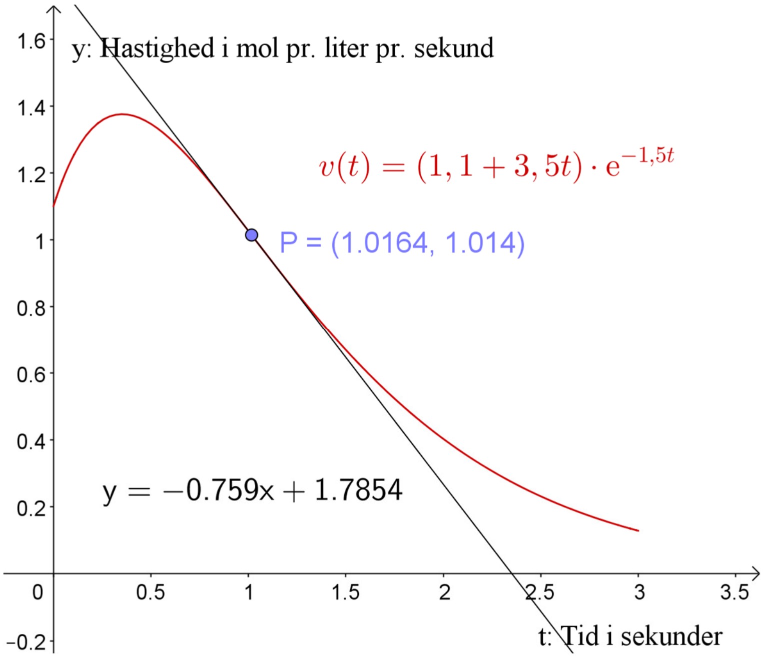
d) Hastigheden er størst, der hvor tangenten bliver vandret. På billedet er tangenten næsten vandret. Den største hastighed aflæses derfor til ca. 1,378 mol pr. liter pr. sekund.



Tjekker man svaret ved grafisk at bestemme ekstremum, får man 1,375 mol pr. liter pr. sekund.

e) Der hvor tangenten har det numerisk største negative hældningskoefficient vil hastigheden aftage mest. Dette er grafisk bestemt til tidspunktet $t=1{,}0164$. Regner man efter, får man det præcise tidspunkt $t=1{,}0190$.

ISBN 9788770668699



Øvelse 4.19

Logaritmen er en monotont voksende funktion og $\log(1)=0$ mens $\log(10^{11})=11$. Dette viser, at logaritmen transformerer intervallet $[1,10^{11}]$ til intervallet $[0,11]$.

Tilsvarende er $\log(10^{-5})=-5$. Dette viser, at logaritmen transformerer intervallet $[10^{-5},1]$ til intervallet $[-5,0]$.

Øvelse 4.20

a) Eksponentiel regression giver $a=1,07$ og $b=3012$.

b)

Antal døgn (x)	0	10	20	30	40	50	60
Antal insekter (y)	3012	5925	11656	22928	45103	88725	174535
$\log(y)$	3,4789	3,7727	4,0665	4,3604	4,6542	4,9480	5,2419

c) Lineær regression giver ligningen $\log(y)=0,0294x+3,4789$. Ifølge teorien skal $0,0294=\log(a)$ og $3,4789=\log(b)$. Vi regner efter og får $\log(1,07)=0,0294$ og $\log(3012)=3,4789$, hvilket er præcist som det skulle være.

Øvelse 4.21

a) Potensregression giver $a=-0,4998$ og $b=29,78$.

b)

Planet	Merkur	Venus	Jorden	Mars	Jupiter	Saturn
Afstand (AE) (x)	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,555
Gennemsnitshastighed (km/s) (y)	47,89	35,03	29,73	24,13	13,06	9,64
$\log(x)$	-0,4123	-0,1409	0,0000	0,1830	0,7163	0,9802
$\log(y)$	1,6802	1,5444	1,4732	1,3826	1,1159	0,9841

c) Lineær regression giver ligningen $\log(y)=-0,4998\log(x)+1,4739$. Vi kan se, at a-værdierne er ens, som de skulle være. Yderligere skal der gælde $1,4739=\log(b)$. Vi regner efter og får $\log(29,78)=1,4739$, i overensstemmelse med teorien.

Øvelse 4.22

a) Vi løser ligningen $\log(4,2\cdot 10^{12})=1,5M+4,8$ og får $M=5,2$ som er værdien på Richterskalaen.

ISBN 9788770668699

Øvelse 4.23

a) En fordobling af afstanden betyder, at energien falder til $1/4$, dvs. energien bliver halveret to gange. I teksten står der, at en fordobling af energien medfører en stigning i dB på 3. Tilsvarende må en halvering i energien svare til et fald i dB på 3. To halveringer svarer så til et fald i dB på 6.
b) Fra 43m til ca. 170m er afstanden ca. firedoblet. Det betyder at energien er faldet til $1/16$, altså halveret fire gange. Derfor er dB faldet med 12. Da dB i afstanden 43m var 56, er den i afstanden 170m på ca. 44. Det svarer til en mellemting mellem støjniveauet på et kontor og en hvisken i en afstand af 2 meter.
I afstanden 260m fra vindmøllen er afstanden ca. seksdoblet i forhold til de 43 meter, dvs. energien er faldet til $1/36$. Det er lidt over fem halveringer, så dB er faldet med lidt over 15, dvs. dB er nu lidt under 41.
c) Når der opstilles 10 vindmøller, må vi gå ud fra, at energien også tidobles. Det er lidt over tre fordoblinger, så dB stiger med lidt over 9, altså ca. 10. Som beskrevet i teksten svarer en forøgelse af dB på 10 til en subjektiv opfattelse af, at lydstyrken er fordoblet.