Løsninger til øvelser i kapitel 3

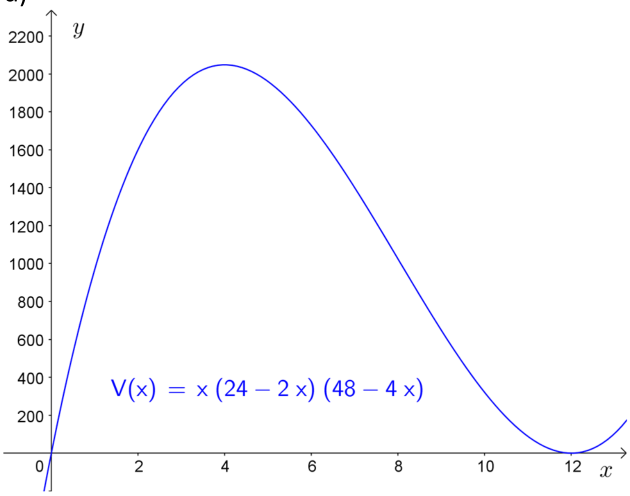
Øvelse 3.3

a) Vi kalder bredden b og længden l. Så gælder $b = 24 - 2x$ og $l = 48 - 4x$.

b) $V(x) = x \cdot (24 - 2x) \cdot (48 - 4x)$.

c) Højden, bredden og længden kan ikke være negative. Så vi må have $0 < x < 12$.

d)

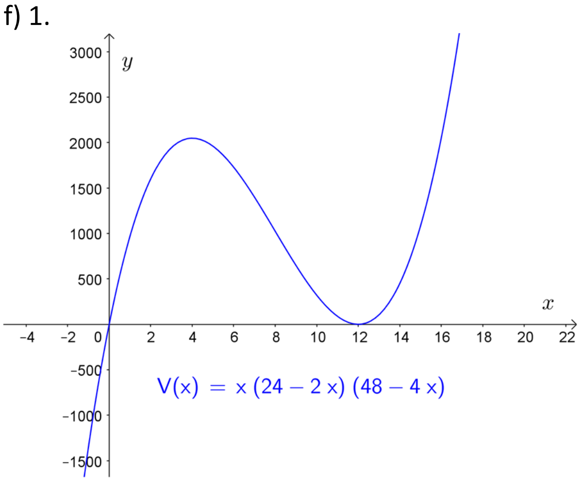


e)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$V(x)$	968	1600	1944	2048	1960	1728	1400	1024	648	320	88

Ud fra tabellen ser det maksimale rumfang ud til at være omkring 2050 cm^3.

f) 1.



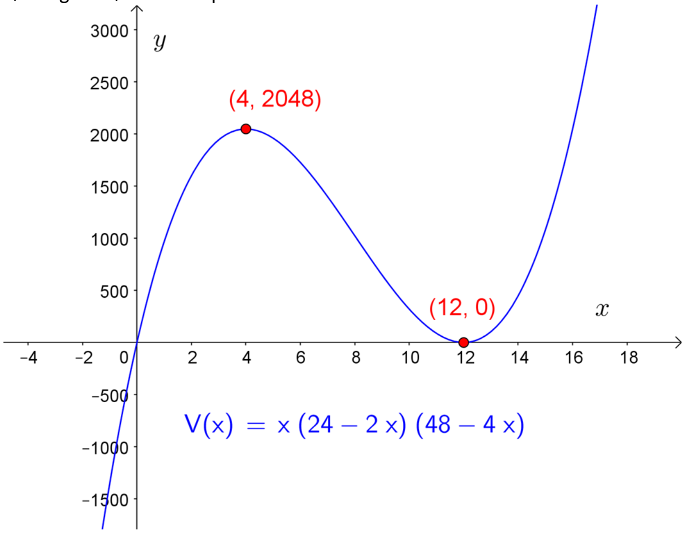
Når $x = 0$ og når $x = 12$ er $V(x) = 0$.

På intervallerne $]0;12[$ og $]12;\infty[$ er funktionen positiv.

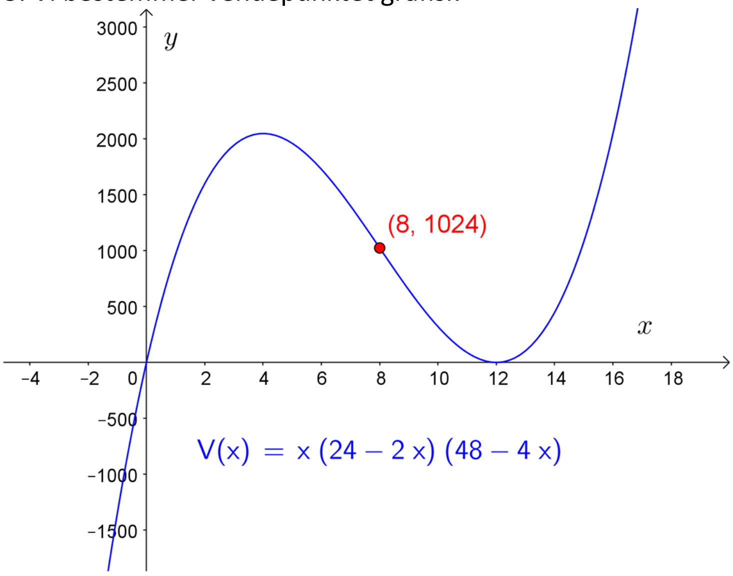
På intervallet $]-\infty;0[$ er funktionen negativ.

2. Vi bestemmer ekstremumspunkterne grafisk

ISBN 9788770668699



Heraf kan vi se, at i $x=4$ er der et lokalt maksimum med værdien $V=2048$.
I $x=12$ er der et lokalt minimum med værdien $V=0$.
Endvidere er monotoniforholdene som følger:
V er voksende på intervallerne $]-\infty;4]$ og $[12;\infty[$.
V er aftagende på intervallet $[4;12]$.
3. Vi bestemmer vendepunktet grafisk

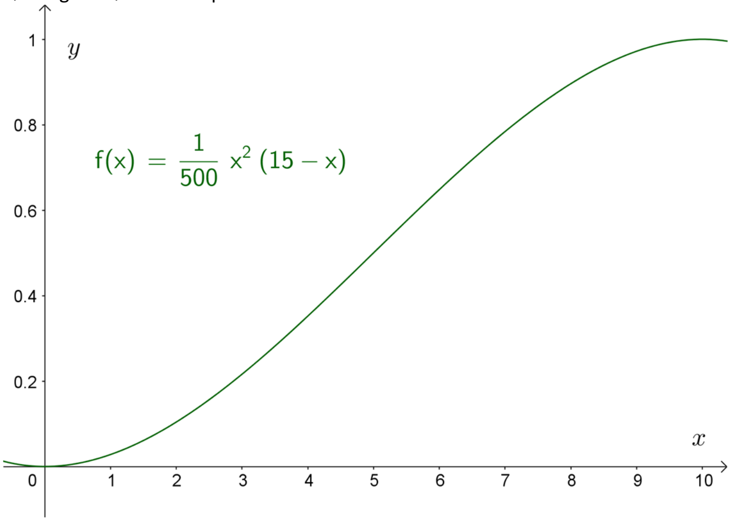


Dvs. når $x<8$ krummer grafen nedad, og når $x>8$ krummer grafen opad.
4. Grafen er "symmetrisk" omkring vendepunktet, i den forstand, at $1024-V(8+x)=V(8-x)-1024$. Så hvis man roterer den nedadkrummende del af grafen 180 grader omkring vendepunktet, vil man netop få den opadkrummende del af grafen.
g) De giver fint mening begge to, idet man vil få et rumfang på 0, hvis man ikke laver noget afskær, eller hvis man laver et afskær der er så stort, at bredden og længden af kassen bliver 0.
h) Især det lokale maksimum giver god mening, da det angiver det maksimale rumfang man kan få af den fysiske kasse.

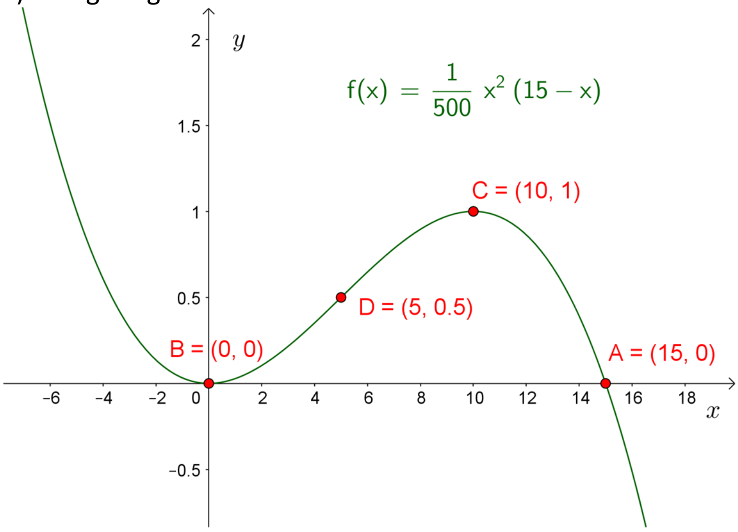
Øvelse 3.4

a) Med $r=5$ får vi forskriften $f(x)=\dfrac{1}{500}\cdot x^2\cdot(15-x)$.
Definitionsmængden er $Dm(f)=[0;10]$ hvor $x=0$ svarer til en andel på 0, og $x=10$ svarer til en andel på 1.
b)

ISBN 9788770668699



c) Vi tegner grafen i et bredere interval.



Her er skæringspunkterne med x-aksen (A og B), ekstremumspunkterne (B og C) samt vendepunktet (D) markeret. Dvs.

1. For $x=0$ og $x=15$ skærer grafen x-aksen.
2. For $x=0$ og $x=10$ er der et lokalt ekstremum.
3. Funktionen vokser fra en minimal andel på 0 i $x=0$ til en maksimal andel på 1 i $x=10$, hvilket giver god mening i den fysiske model.
4. Vendepunktet er ved $x=5$. Dette svarer til, at man halverer kuglen. Når man bevæger sig væk fra det centrale snitplan, bør andelen udvikle sig symmetrisk, hvilket også er afspejlet i grafen ovenfor.

d) Vi skal løse ligningen $f(x)=0{,}25$ dvs. $\frac{1}{500}\cdot x^2\cdot(15-x)=0{,}25$. Løsningen er her $x=3{,}26$, som er der hvor man skal lægge snitplanen (desuden er der to andre "ufysiske" løsninger). Pga. symmetrien vil det at afskære 25% være det samme som at afskære 75%. Vi kunne derfor også lægge snittet i $x=10-3{,}26=6{,}74$.

e) $r=10$ giver $x=6{,}53$.
$r=15$ giver $x=9{,}79$.
$r=20$ giver $x=13{,}05$.

I alle tilfælde er forholdet $\frac{x}{r}$ lig 0,65. Dette resultat siger altså, at uanset hvor stor kuglen er, skal vi altid lægge snittet ved ca. 65% af kuglens radius for at afskære 25%.

Vi kan argumentere for dette således: Hvis kuglen har en bestemt radius r, og vi skalerer radius med en faktor k, vil kuglens rumfang skaleres med en faktor k^3. Men hvis vi har lagt et snit i $x=0{,}65r$ vil både den afskårne del samt resten af kuglen blive skaleret op med den samme faktor. Altså vil den afskårne del stadig udgøre 25% af kuglens rumfang. Da alle længder er blevet skaleret op med en faktor k, ligger snittet altså nu i $k\cdot x=0{,}65\cdot k\cdot r$ hvor $k\cdot r$ er den nye radius. Igen ser vi altså, at forholdet mellem snittets placering $k\cdot x$ og kuglens radius $k\cdot r$ er lig $0{,}65$.

Vi kan også argumentere således: Udtrykket for andelen kan omskrives således

ISBN 9788770668699

$$V_{Andel} = \frac{1}{4r^3} \cdot x^2 \cdot (3r - x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{(3r-x)}{r} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 \cdot \left(3 - \frac{x}{r}\right).$$

Her kan vi indføre den nye variabel $x_1 = \frac{x}{r}$ og får

$$V_{Andel} = \frac{1}{4} \cdot {x_1}^2 \cdot (3 - x_1).$$

Vi ser altså, at andelen kun afhænger af forholdet mellem x og r, og dette forhold er netop løsning til ligningen $0{,}25 = \frac{1}{4} \cdot {x_1}^2 \cdot (3 - x_1)$. Forholdet $\frac{x}{r}$ er derfor uafhængigt af kuglens størrelse.

Øvelse 3.5

a) $a = 2$, $b = -7$, $c = 25$ og $d = -9$.
b) $a = 0{,}75$, $b = 5$, $c = 0$ og $d = -10$.
c) $a = -6$, $b = 0$, $c = 7$ og $d = 1$.
d) $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$ og $d = 0$.
e) $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ og $d = -8$.
f) $a = 2$, $b = 0$, $c = -4$ og $d = 0$.

Øvelse 3.6

a)
$p_1(x) = 15x^3 - 27x^2 - 6x$. Her er $a = 15$, $b = -27$, $c = -6$ og $d = 0$.
$p_2(x) = -3x^3 + x^2 + 34x + 40$. Her er $a = -3$, $b = 1$, $c = 34$ og $d = 40$.
b)
Kassens rumfang kunne beskrives ved funktionen: $V(x) = x \cdot (24 - 2x) \cdot (48 - 4x) = 8x^3 - 192x^2 + 1152x$.
Rumfangsandelen for kuglen kunne beskrives ved funktionen: $f(x) = \frac{1}{500} \cdot x^2 \cdot (15 - x) = -\frac{1}{500}x^3 + \frac{3}{100}x^2$.

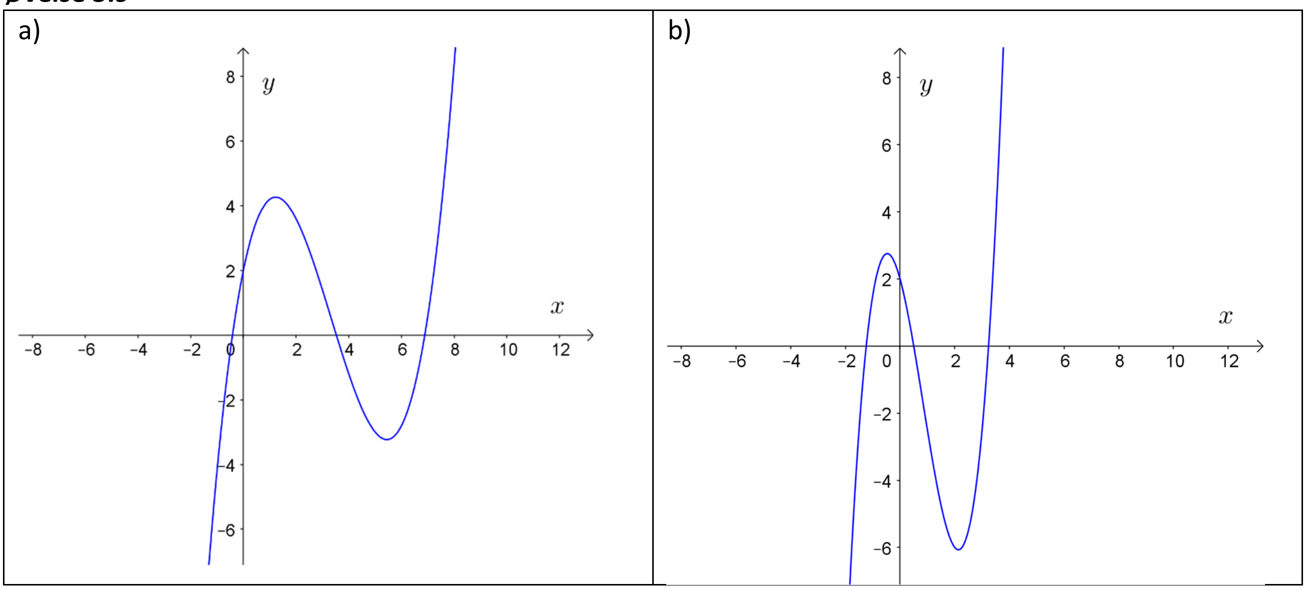
Øvelse 3.7

Se boksen på den efterfølgende side i grundbogen for svar på spørgsmålene.

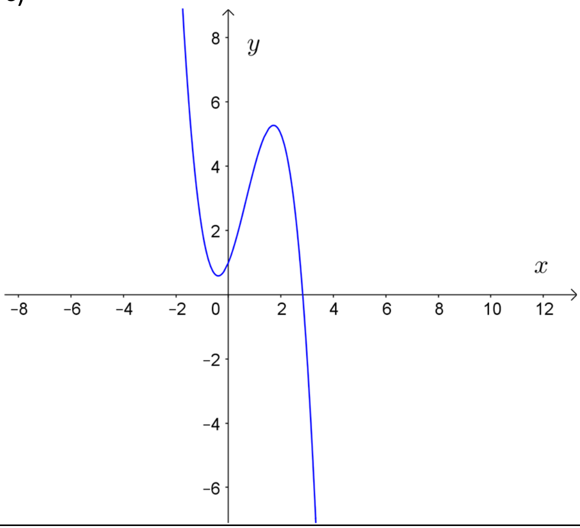
Øvelse 3.8

1. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ og $d > 0$.
2. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ og $d > 0$.
3. $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ og $d > 0$.
4. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ og $d < 0$.

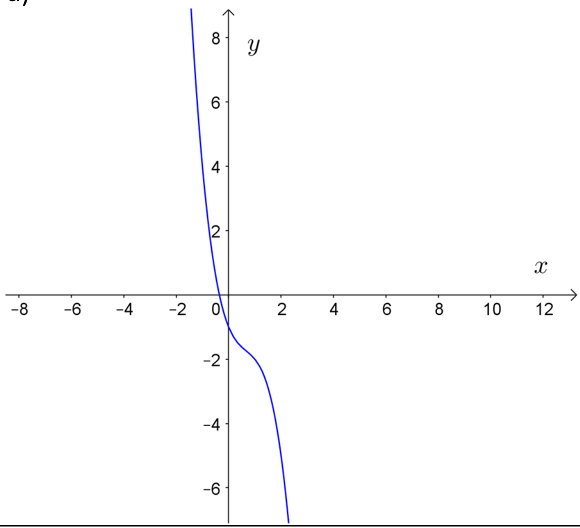
Øvelse 3.9



c)



d)



Øvelse 3.10

d) $x_Q = x_S + h$.

e) $y_P - y_S = y_S - y_Q$, hvilket kan omskrives til $y_S = \dfrac{y_P + y_Q}{2}$.

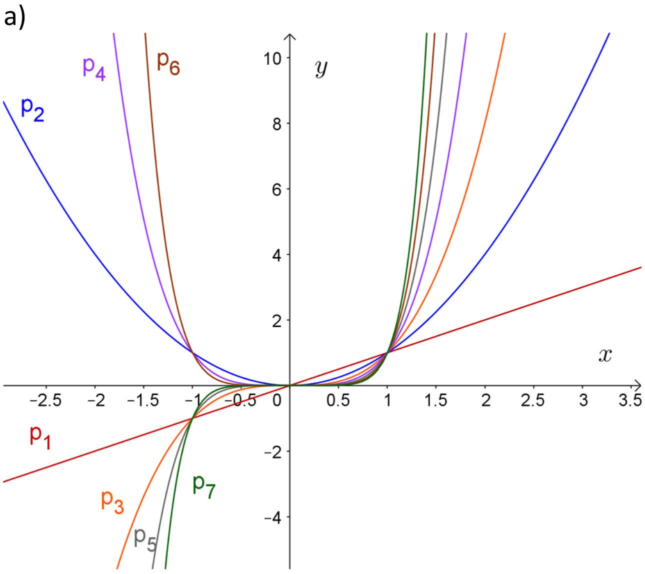
Øvelse 3.11

Graden er

a)	b)	c)	d)	e)	f)
1	7	2	0	5	7

Øvelse 3.12

a)



Alle polynomierne går mod uendeligt når x går mod uendeligt.
Alle graferne går igennem $(0,0)$.
Hvis graden er lige går polynomiet mod uendeligt når x går mod minus uendeligt. Polynomiet har et globalt minimum i $(0,0)$.
Hvis graden er ulige går polynomiet mod minus uendeligt når x går mod minus uendeligt. Polynomiet har en vandret vendetangent i $(0,0)$ (dog ikke for $n = 1$).
b) Hvis man kender fortegnet for a og pariteten af n (dvs. om n er lige eller ulige) kan man sige en del om grafens udseende.

ISBN 9788770668699

Øvelse 3.13

b) a afgør grafens opførsel når x er langt fra 0.
e er y-værdien i grafens skæringspunkt med y-aksen.
d er hældningen af tangenten til grafen i dens skæringspunkt med y-aksen.
c afgør krumningen af grafen i dens skæringspunkt med y-aksen.
c) Ud fra beskrivelserne i spørgsmål b) kan man angive fortegnet for a, c, d og e.

Øvelse 3.14

b) a afgør grafens opførsel når x er langt fra 0.
f er y-værdien i grafens skæringspunkt med y-aksen.
e er hældningen af tangenten til grafen i dens skæringspunkt med y-aksen.
d afgør krumningen af grafen i dens skæringspunkt med y-aksen.
c) Ud fra beskrivelserne i spørgsmål b) kan man angive fortegnet for a, d, e og f.

Øvelse 3.15

2) Mellem to rødder kan grafen ikke være konstant, så den må enten gå op og så ned igen, eller ned og så op igen, for at komme til den næste rod. Imellem de to rødder er der altså et maksimum eller et minimum.
3) Da de yderste grene peger hver sin vej, må grafen altid skære x-aksen mindst et sted, dvs. polynomiet har mindst én rod.

Øvelse 3.16

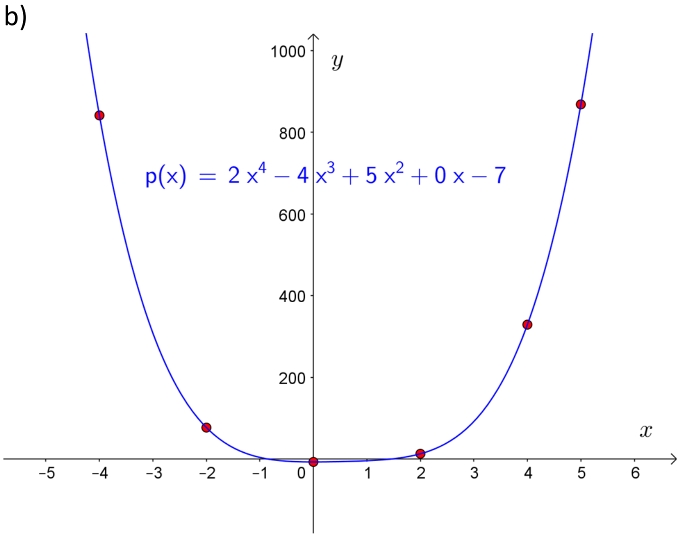
For p gælder: Graden er 2, så der er højst 2 rødder. Da koefficienten foran x^2 er positiv og konstantleddet er negativt, vil grafen skære y-aksen i en negativ y-værdi, og grenene vil pege opad i begge retninger. Dvs. der vil være præcist to rødder, én positiv og én negativ.
For q gælder: Graden er 3, så der er højst 3 rødder og mindst 1 rod. Da koefficienten foran x^3 er positiv og konstantleddet er negativt, vil grafen skære y-aksen i en negativ y-værdi, og grafen vil herfra gå opad mod højre. Dvs. der vil være en positiv rod.

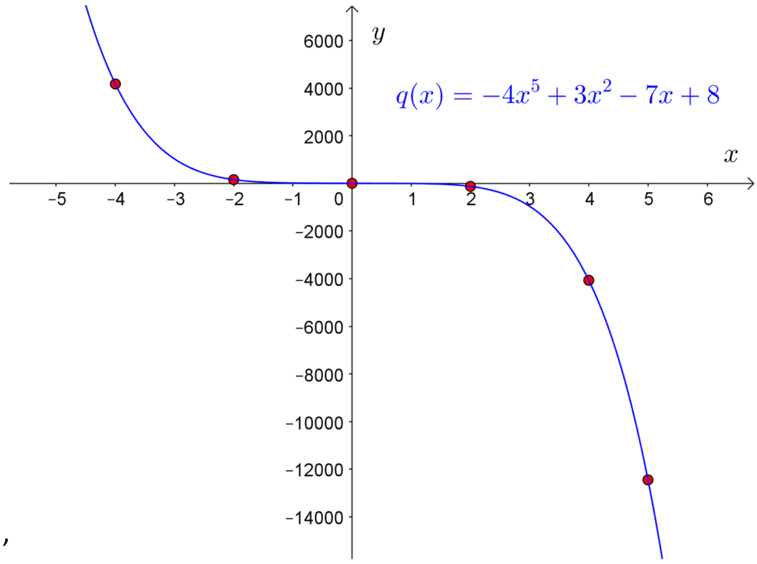
Øvelse 3.17

Første graf: De to yderste grene peger i hver sin retning, så graden er ulige. Der er 3 skæringer med x-aksen, så graden er mindst 3. Grafen er ikke symmetrisk omkring sit vendepunkt, så graden er mindst 5.
Anden graf: De to yderste grene peger i samme retning, så graden er lige. Der er 2 skæringer med x-aksen, så graden er mindst 2. Grafen er ikke symmetrisk omkring en lodret linje gennem minimumspunktet, så graden er mindst 4.

Øvelse 3.18

a) Vi skal kende fem punkter for et fjerdegradspolynomium, og seks punkter for et femtegradspolynomium.
b)

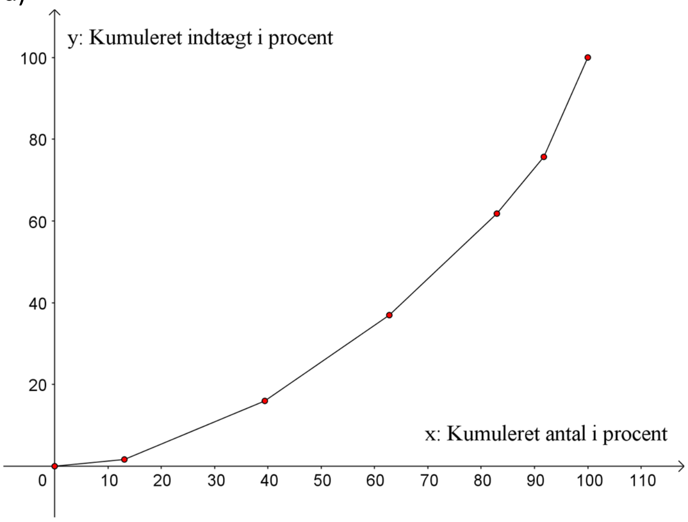




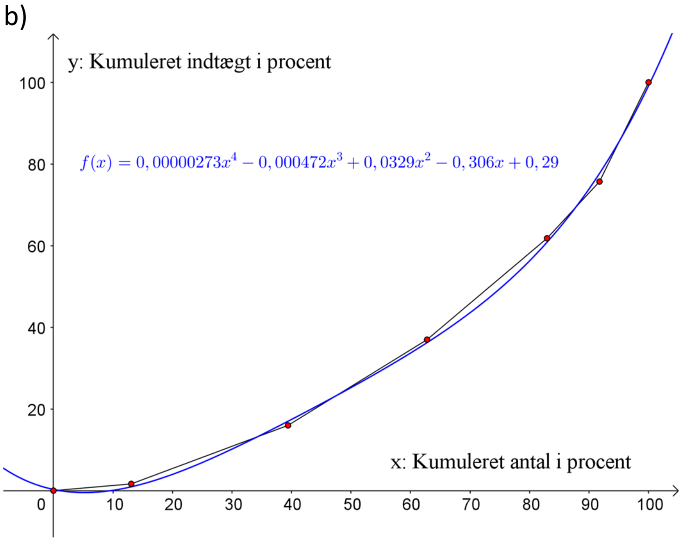
,

Øvelse 3.19

a)



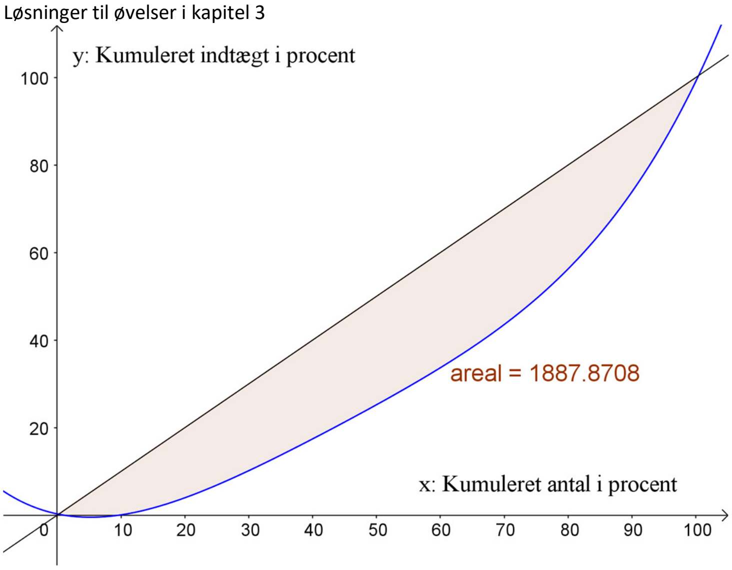
b)



Forskriften for fjerdegradspolynomiet er $f(x) = 0{,}00000273x^4 - 0{,}000472x^3 + 0{,}0329x^2 - 0{,}306x + 0{,}29$.

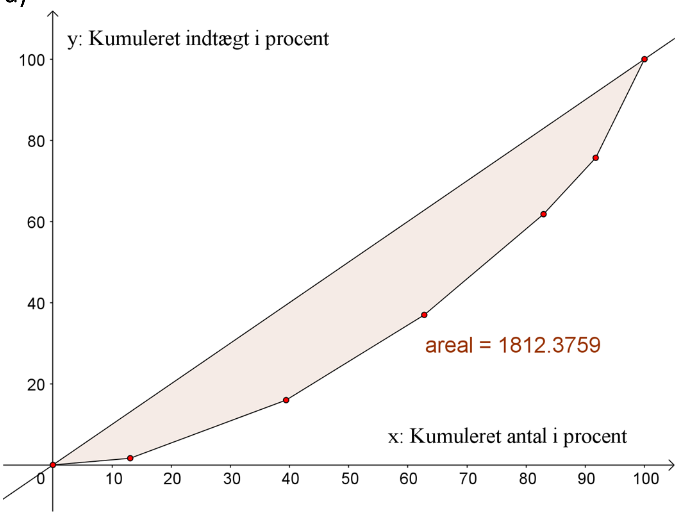
c)

ISBN 9788770668699



Arealet mellem graferne er grafisk bestemt til 1887,87. Arealet af trekanten under linjen $y = x$ er $0{,}5 \cdot 100 \cdot 100 = 5000$. Dermed bliver Ginikoefficienten $\frac{1887{,}87}{5000} = 0{,}378$.

d)

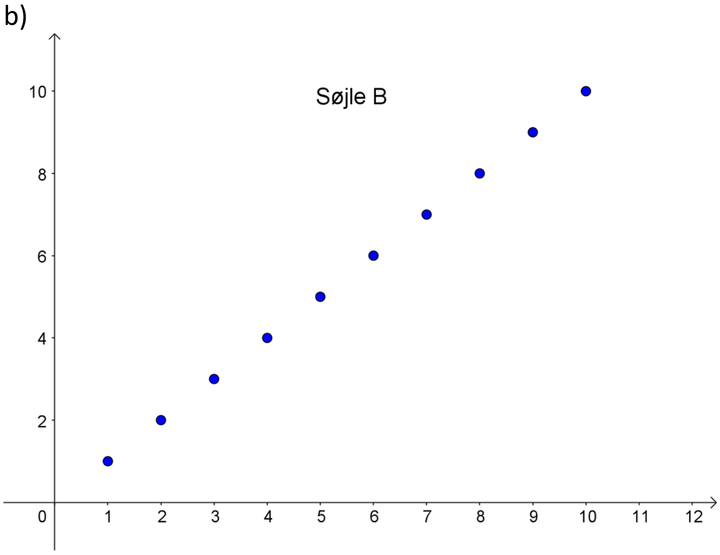


Ginikoefficienten bliver nu $\frac{1812{,}38}{5000} = 0{,}363$.

Øvelse 3.20

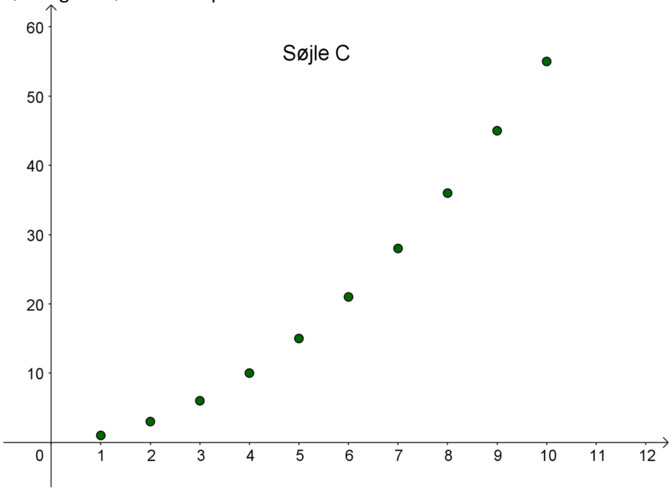
a) =A2+B1.

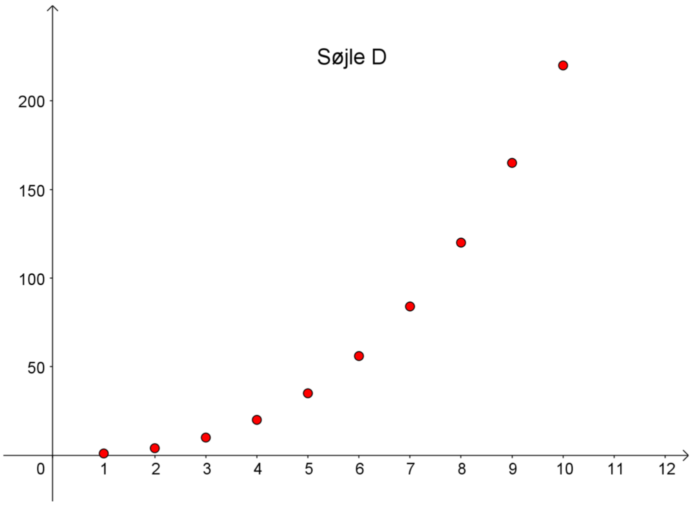
b)

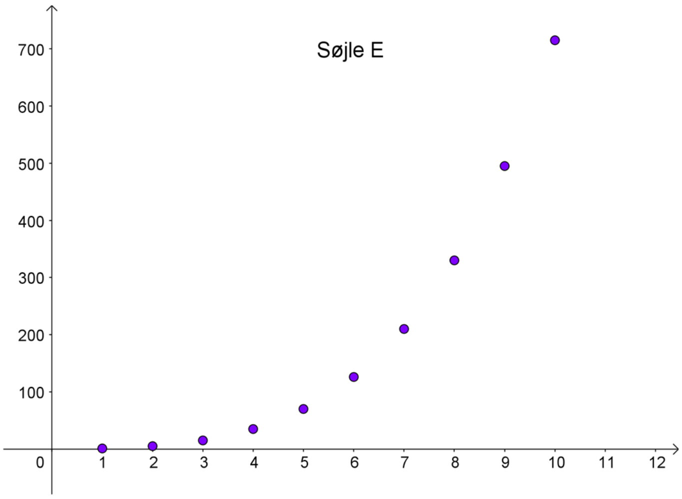


ISBN 9788770668699

Løsninger til øvelser i kapitel 3







Punkterne ud fra søjle B ser unægtelig ud til at ligge på en ret linje, dvs. funktionen bagved er lineær (et førstegradspolynomium). Vi ved da også, at der er tale om sammenhængen $y = x$. Det kan være svært at se, hvilke funktioner der ligger bag de øvrige grafer, men eftersom øvelsen stilles i et kapitel om polynomier, kunne vi jo gætte på, at der var tale om polynomiumsgrafer.

d) Punkterne tegnet ud fra søjle B kan beskrives ved funktionen $f(x) = x$.

Punkterne tegnet ud fra søjle C kan beskrives ved funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5x$.

Punkterne tegnet ud fra søjle D kan beskrives ved funktionen $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$.

Punkterne tegnet ud fra søjle E kan beskrives ved funktionen $f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{1}{4}x$.