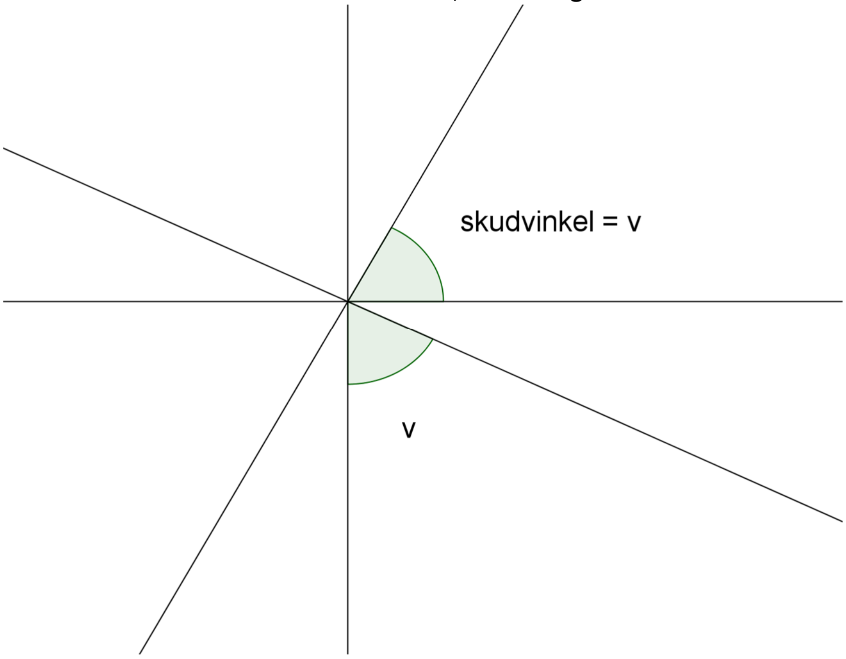
Løsninger til øvelser i kapitel 2

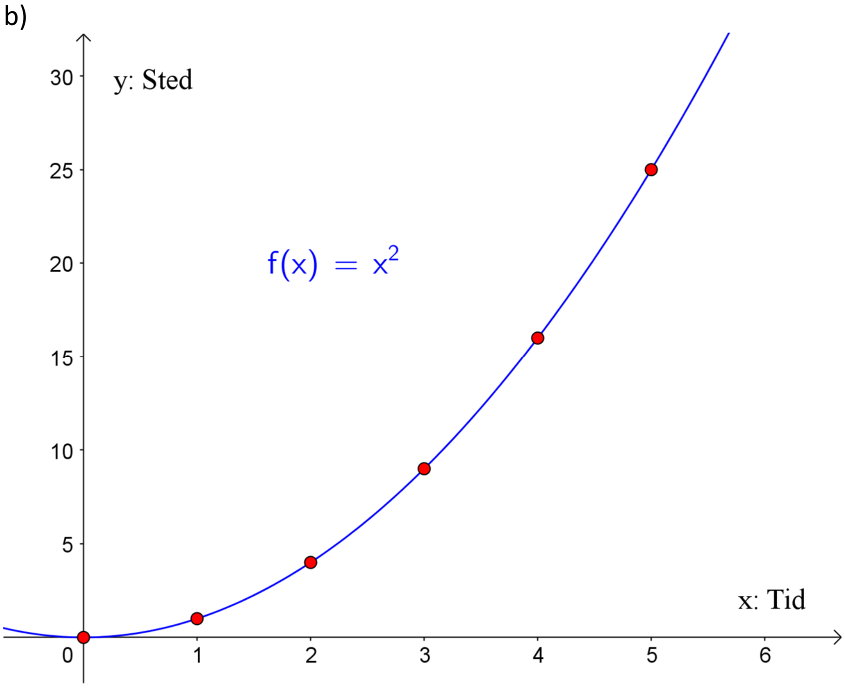
Øvelse 2.2

Man aflæser vinklen markeret med v , som er lig skudvinklen.



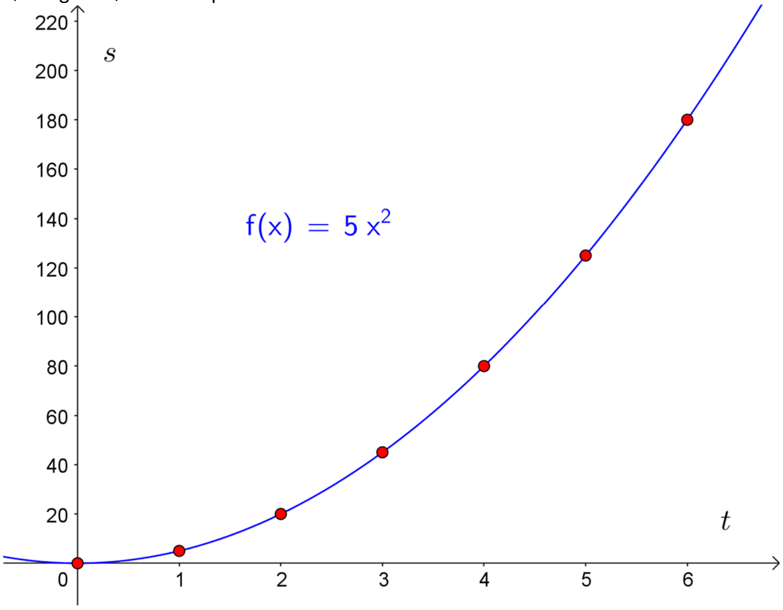
Øvelse 2.5

b)



Øvelse 2.7

t	0	1	2	3	4	5	6
s	0	5	20	45	80	125	180



Øvelse 2.10

Sættes $x_0 = 0$ får vi $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$. Isoleres t heri får vi

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

Dette udtryk indsættes i ligningen for y, og der reduceres,

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} + y_0$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^{\ 2} \cdot (\cos(\alpha))^2} + \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} + y_0$$

$$y = -\frac{g}{2 v_0^{\ 2} \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Øvelse 2.12

a) Konstantleddet er b og førstegradsleddet er $a \cdot x$.

b) Det er tallene a og b. Tallet a er hældningskoefficienten (stigningstallet) og b er andenkoordinaten til grafens skæringspunkt med andenaksen.

c) Et nultegradspolynomium består kun af et konstantled, dvs. det er en konstant funktion. Grafen er derfor en vandret linje. Hvis konstanten er 0 tillægges polynomiet undertiden graden $-\infty$.

Øvelse 2.13

a) $a = 2$, $b = -7$ og $c = 25$.

b) $a = 0{,}25$, $b = 2$ og $c = -3{,}5$.

c) $a = -4$, $b = 2$ og $c = 1$.

d) $a = -1$, $b = 0$ og $c = 0$.

e) $a = 1$, $b = 0$ og $c = -4$.

f) $a = 3$, $b = -9$ og $c = 0$.

Øvelse 2.14

Se sætning 1 s. 66-67 for svar på spørgsmålene.

Øvelse 2.15

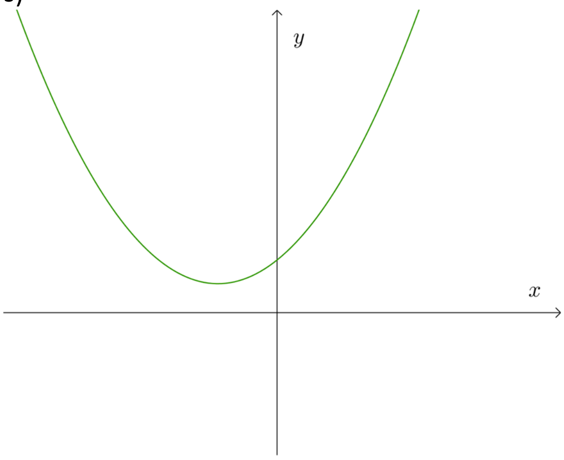
1. $a > 0$, $b < 0$ og $c > 0$.
2. $a < 0$, $b > 0$ og $c > 0$.
3. $a > 0$, $b > 0$ og $c < 0$.
4. $a < 0$, $b > 0$ og $c < 0$.

ISBN 9788770668699

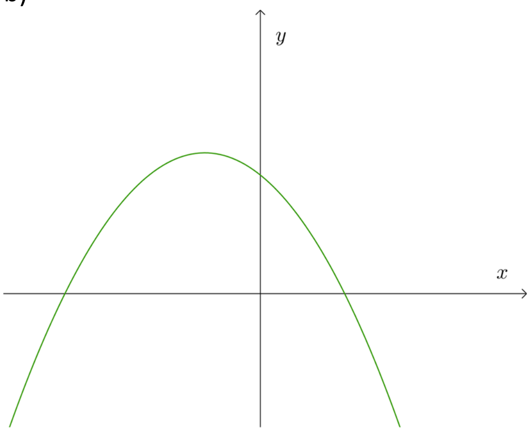
Øvelse 2.16

Der er mange mulige parabler der opfylder kriterierne. Herunder er tegnet en mulig parabel i hver situation.

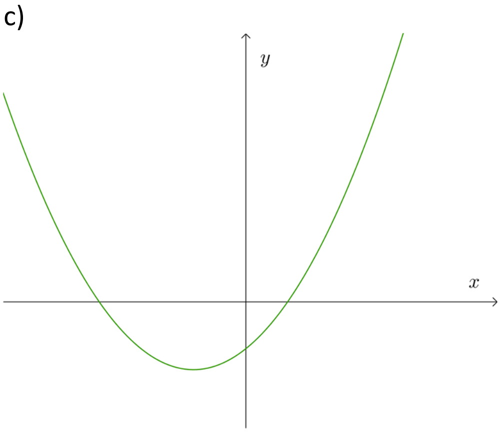
s)



b)



c)



Øvelse 2.17

Hvis a og b har samme fortegn, ligger parablens toppunkt til venstre for y-aksen, dvs. i 2. eller 3. kvadrant.

Hvis a og b har modsat fortegn, ligger parablens toppunkt til højre for y-aksen, dvs. i 1. eller 4. kvadrant.

Hvis b er 0 ligger parablens toppunkt på y-aksen.

Øvelse 2.18

a+b)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ISBN 9788770668699

$p(x)$	52	39	28	19	12	7	4	3	4	7	12	19	28	39	52

Koordinatsættet til toppunktet aflæses ud fra tabellen til $(2,3)$.

c)

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_1(x)$	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

d) x-værdierne for $p(x)$ er 2 større end de tilsvarende x-værdier for $p_1(x)$. Der gælder derfor $x_1 = x_2 + 2$ og $y_1 = y_2 + 3$.

For $p(x) = x^2 - 5x + 8$ får vi

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$p(x)$	37,75	26,75	17,75	10,75	5,75	2,75	1,75	2,75	5,75	10,75	17,75	26,75	37,75

Her kan vi aflæse koordinaterne til toppunktet af tabellen, idet det har koordinatsættet $(2,5;1,75)$.
Der gælder nu sammenhængene $x_1 = x_2 + 2,5$ og $y_1 = y_2 + 1,75$.

For $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ får vi

x	-5,25	-4,25	-3,25	-2,25	-1,25	-0,25	0,75	1,75	2,75	3,75	4,75	5,75	6,75
$p(x)$	74,88	52,88	34,88	20,88	10,88	4,875	2,875	4,875	10,88	20,88	34,88	52,88	74,88

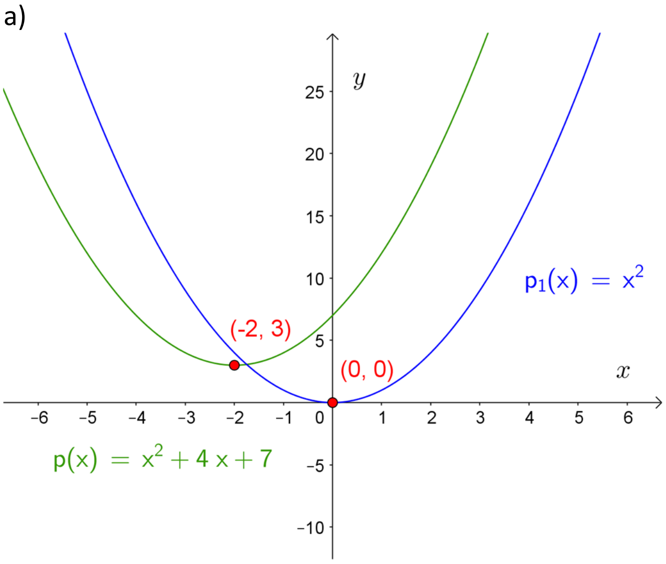
Her kan vi aflæse koordinaterne til toppunktet af tabellen, idet det har koordinatsættet $(0,75;2,875)$.
Vi skal sammenligne med $p_2(x) = 2x^2$.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_2(x)$	98	72	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50	72	98

Der gælder nu sammenhængene $x_1 = x_2 + 0,75$ og $y_1 = y_2 + 2,875$.

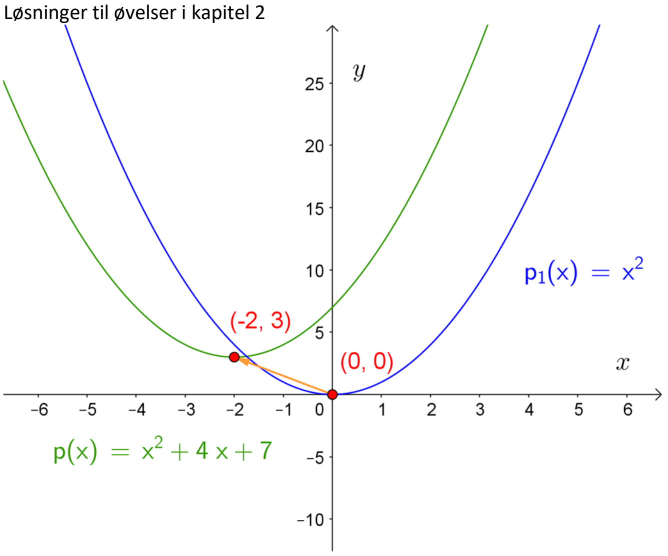
Øvelse 2.19

a)

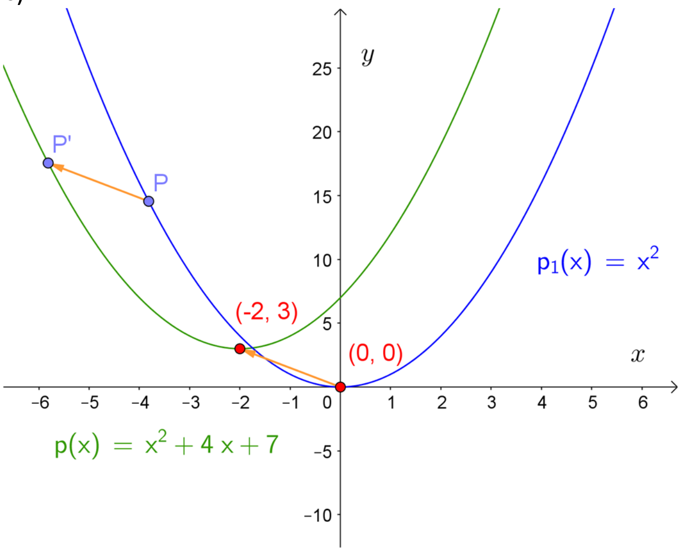


b)

ISBN 9788770668699



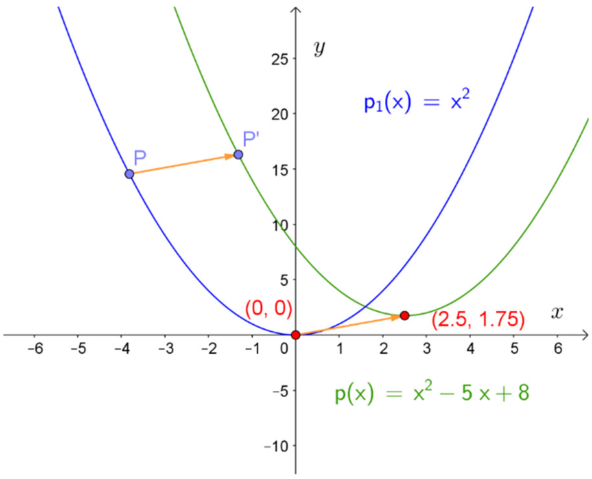
c)



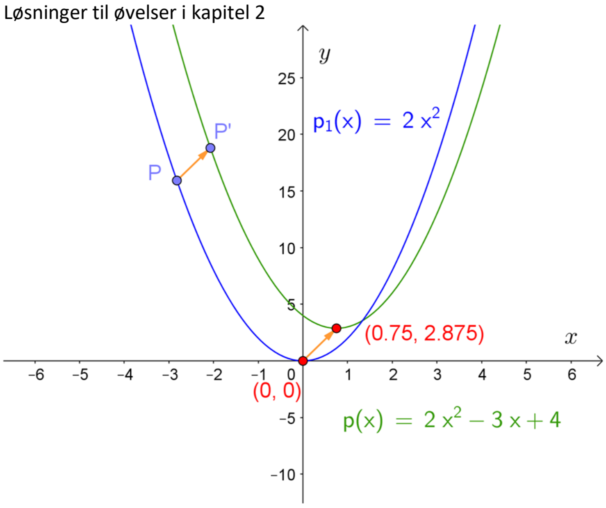
Det forskudte punkt ligger på grafen for $p(x)$. Så grafen for $p(x)$ fås ved at forskyde alle punkterne på grafen for $p_1(x)$ med forskydningsvektoren.

d)

1.



2.



Øvelse 2.23

Vi får ligningssystemet

$4a - 2b + c = -8$

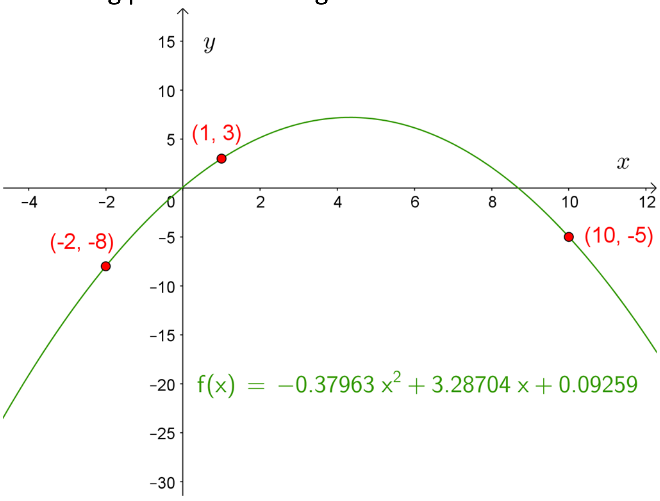
$a + b + c = 3$

$100a + 10b + c = -5$

Det har løsningen $a = -\frac{41}{108}$, $b = \frac{355}{108}$ og $c = \frac{5}{54}$. Dvs. forskriften for andengradspolynomiet er

$f(x) = -\frac{41}{108}x^2 + \frac{355}{108}x + \frac{5}{54}$.

Grafen og punkterne er tegnet herunder.



Øvelse 2.24

a) Forskriften for et andengradspolynomium har tre frie parametre. Hvert punkt fastlægger én af parametrene. Har man kun to punkter, er der derfor stadig én fri parameter. Der er således uendeligt mange forskellige parabler, der går igennem to givne punkter (medmindre punkterne ligger på samme lodrette linje, i hvilket tilfælde det ikke er muligt at tegne nogen funktionsgraf gennem punkterne.)

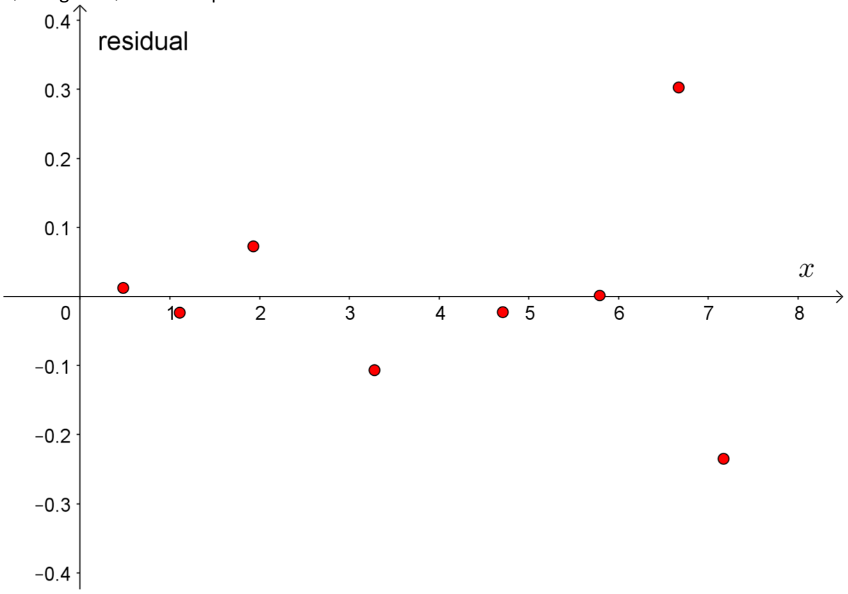
b) Næsten. Man kan, såfremt ingen af punkterne ligger på den samme lodrette linje, og ikke alle tre punkter ligger på den samme rette linje.

c) Hvis det er muligt at trække en parabel gennem alle fire punkter, kan man udvælge de tre af dem, og bestemme en forskrift ud fra disse tre punkter. Hvis det ikke er muligt at trække en parabel gennem alle fire punkter, kan man udføre andengradsregression.

Øvelse 2.25

a) Herunder ses residualplottet.

ISBN 9788770668699



Forklaringsgraden er $r^2 = 0{,}99365$.

b) Punkterne i residualplot er ganske tilfældigt fordelt, så det tyder på, at et andengradspolynomium er en god beskrivelse af data. Dog er afvigelsen på de to sidste punkter relativt meget større, men det kan formentlig tilskrives unøjagtighed ved placeringen af punkterne på springvandet.

Øvelse 2.26

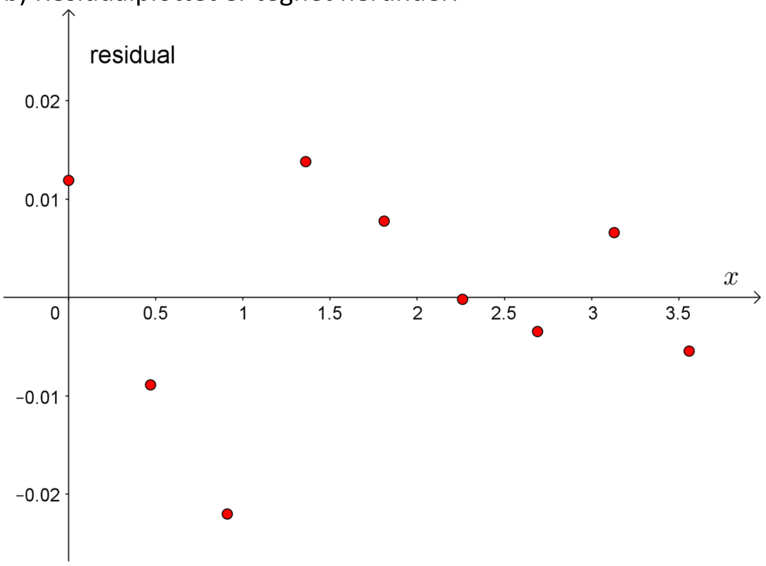
a) Toppunktet har koordinaterne $(3{,}79;6{,}25)$.

b) Hvis hanens munding er placeret i $(0{,}0)$, kommer vandet 6,25 meter op over hanens munding.

Øvelse 2.27

a) Forklaringsgraden er $r^2 = 0{,}99934$.

b) Residualplottet er tegnet herunder.



Punkterne er nogenlunde tilfældigt fordelt i residualplottet, så datapunkterne må siges at beskrives godt med et andengradspolynomium.

Øvelse 2.28

Toppunktet har koordinaterne $(2{,}35;3{,}52)$. Boldens maksimale højde over gulvet er derfor 3,52 meter ifølge modellen.

Øvelse 2.30

a) Løsningerne er $x = 2$ og $x = 10$.

b) Løsningerne er $x = -3$ og $x = 1$.

ISBN 9788770668699

c) Løsningen er $x=1$. Der er kun én løsning, da diskriminanten er 0.
d) Der er ingen løsninger, da diskriminanten er negativ.

Øvelse 2.32
De to trekanter er ensvinklede, så vi kan benytte, at de indre forhold i ensvinklede trekanter er ens, til at opstille ligningen
$$\frac{20}{x}=\frac{20+2x+14}{1775}$$
Vi ganger over og reducerer,
$$20\cdot 1775=\left(20+2x+14\right)\cdot x$$
$$35500=(2x+34)\cdot x$$
$$35500=2x^2+34x$$
$$0=2x^2+34x-35500$$
Vi løser andengradsligningen:
$$d=34^2-4\cdot 2\cdot(-35500)=285156$$
$$x=\frac{-34\pm\sqrt{285156}}{2\cdot 2}$$
Dette giver løsningerne $x=125$ og $x=-142$, hvoraf kun den ene passer i situationen. Sidelængderne i den kvadratiske bymur er derfor 250 meter.

Øvelse 2.33
a)
$$0;35=\frac{7}{12}$$
$$0;40=\frac{2}{3}$$
$$0;20=\frac{1}{3}$$
$$0;6,40=\frac{1}{9}$$
$$0;41,40=\frac{25}{36}$$
$$0;50=\frac{5}{6}$$
$$0;30=\frac{1}{2}$$
b)
$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{7}{12}.$$
c) Løsningerne er $x=\frac{1}{2}$ og $x=-\frac{7}{6}$. Heraf passer den første med det der står i teksten.

Øvelse 2.34
a) $d=36$. Parablen skærer x-aksen to steder.
b) $d=36$. Parablen skærer x-aksen to steder.
c) $d=16$. Parablen skærer x-aksen to steder.

Øvelse 2.35
a) $d=64$. Da $d>0$ har polynomiet to rødder. Disse er 2 og 10.
b) $d=-800$. Da $d<0$ har polynomiet ingen rødder.
c) $d=-1100$. Da $d<0$ har polynomiet ingen rødder.
d) $d=10000$. Da $d>0$ har polynomiet to rødder. Disse er 0 og 25.

Man kunne også tegne grafen, og aflæse antallet af skæringspunkter med x-aksen.

Øvelse 2.36

a) Hvis $k<3$ er der ingen skæringspunkter mellem linjen og parablen. Hvis $k>3$ er der to skæringspunkter mellem linjen og parablen.

b) Vi får ligningen $k=x^2+2x+4$ som kan omskrives til $0=x^2+2x+4-k$. Diskriminanten kan beregnes til $d=2^2-4\cdot1\cdot(4-k)=4-4(4-k)=4-16+4k=-12+4k$.

Hvis $d=0$ er der netop ét skæringspunkt mellem graferne. Vi får her ligningen $0=-12+4k$, som netop har løsningen $k=3$. Hvis $d>0$ er der to skæringspunkter mellem graferne. Denne ulighed er opfyldt for $k>3$. Hvis $d<0$ er der ingen skæringspunkter mellem graferne. Denne ulighed er opfyldt for $k<3$.

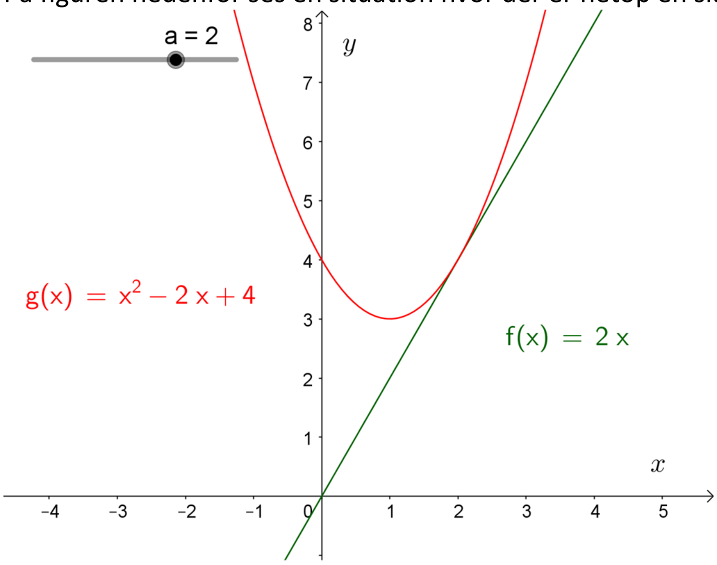
I det tilfælde hvor $k>3$ kan vi opskrive løsningerne til ligningen som

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-12+4k}}{2}=-1\pm\sqrt{-3+k}\,.$$

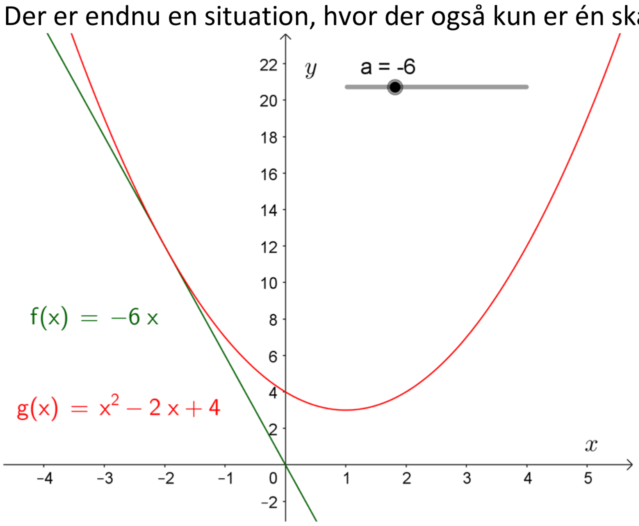
Øvelse 2.37

a)

På figuren nedenfor ses en situation hvor der er netop én skæring.



Der er endnu en situation, hvor der også kun er én skæring, som nedenstående figur viser.



Samlet har vi derfor: Når $a=2$ eller når $a=-6$ er der netop én skæring mellem graferne for f og g.

Når $a>2$ eller når $a<-6$ er der netop to skæringer mellem graferne for f og g.

Når $-6<a<2$ er der ingen skæringer mellem graferne for f og g.

b)

Ligningen $x^2-2x+4=ax$ omskrives til $x^2-2x-ax+4=0$ som videre kan omskrives til $x^2-(2+a)x+4=0$

ISBN 9788770668699

Her er $d = (-(2+a))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = (2+a)^2 - 16$.

Hvis $d = 0$ er der netop ét skæringspunkt mellem graferne. Vi får her ligningen

$0 = (2+a)^2 - 16$

$16 = (2+a)^2$

$\pm\sqrt{16} = 2 + a$

$\pm 4 = 2 + a$

$a = \pm 4 - 2$

Der altså to løsninger, nemlig $a = 2$ og $a = -6$. For disse værdier af a, har graferne netop ét skæringspunkt.
Hvis $d > 0$ er der to skæringspunkter mellem graferne. Denne ulighed er opfyldt for $a > 2$ og for $a < -6$. Hvis $d < 0$ er der ingen skæringspunkter mellem graferne. Denne ulighed er opfyldt for $-6 < a < 2$.
I det tilfælde hvor $a > 2$ eller $a < -6$ kan vi opskrive løsningerne til ligningen som

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(2+a)^2 - 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{(1 + a/2)^2 - 4}.$$

Øvelse 2.38

Græsarealet består nu af to kvadrater med arealet x^2 hver, to rektangler hver med arealet $4x$, samt et rektangel med arealet $8x$. Det samlede areal er derfor $2x^2 + 16x$. Sættes dette lig med 50, fås ligningen

$2x^2 + 16x = 50$

eller

$2x^2 + 16x - 50 = 0$

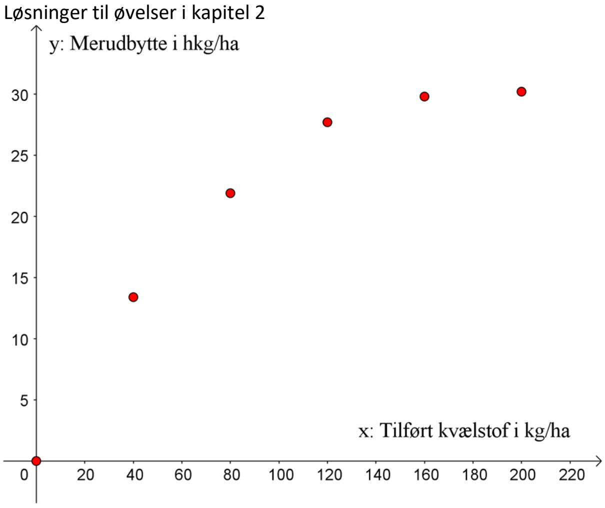
Den positive løsning er her $x = 2{,}4$. Så familien skal lægge et 2,4 meter bredt stykke kunstgræs rundt langs bassinets tre sider.

Øvelse 2.39

a) Ud ad x-aksen er den tilførte mængde kvælstof målt i kg pr. ha (hektar). Og op ad y-aksen er beløbet målt i kr.
b) Grafen for udgifterne er en ret linje, dvs. den bagvedliggende funktion er lineær. Skæringen med y-aksen repræsenterer de faste udgifter, f.eks. udgifter til udbringning. Stigningstallet repræsenterer udgifterne til 1 kg kvælstof pr ha.
c) Indtægterne stammer fra salg af det høstede korn.
Sammenhængen mellem produktion og indtægter er formentlig en proportionalitet, dvs. at hvert kg produceret korn sælges til en fast pris. Men prisen på kornet vil også afhænge af kornets kvalitet, hvilke salgsaftaler man kan lave, m.m.
Når man øger gødningsmængden, stiger udbyttet, men kun til en vis grænse. Der er grænser for, hvor meget kvælstof kornet kan udnytte. På et tidspunkt er planterne mættet med kvælstof. Yderligere tilførsel af kvælstof er ikke bare overflødigt, det kan også nedsætte udbyttet, måske fordi andre næringsstoffer bliver fortrængt af den megen kvælstof, så planterne ikke trives optimalt. Eller der kan slet og ret være tale om en overdosering, som man også kan se i mennesker, der indtager for store mængder mineraler. Der ses ofte øgede forekomster af lejesæd ved stor kvælstoftilførsel.
d) Skæringspunktets førstekoordinat repræsenterer den kvælstoftilførsel hvor udgifter og indtægter er lige store. Landmanden har ved denne kvælstoftilførsel intet overskud på sin produktion.
e) Det maksimale udbytte forekommer ved den kvælstoftilførsel, der giver den maksimale produktion af korn. Umiddelbart skulle man tro, at dette er favorabelt, men for landmanden, som også har udgifter til kvælstoffet, er det mest favorabelt at gøde ved økonomisk optimum, angivet som optimal mængde på figuren. Her er forskellen mellem indtægter og udgifter størst mulig, og landmanden har derfor den maksimale fortjeneste på sit korn.

Øvelse 2.40

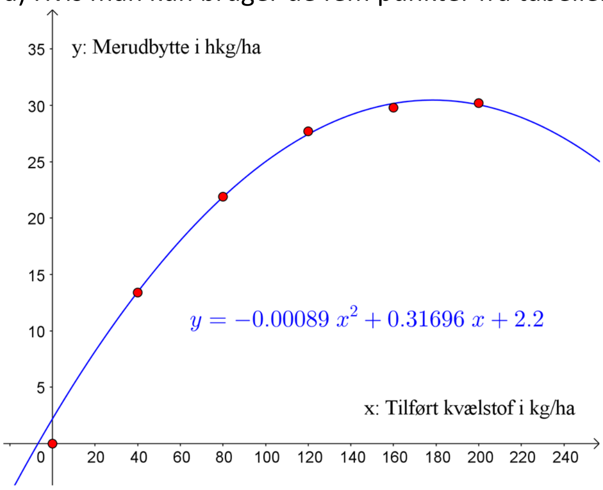
(*Bemærk: I linjen over øvelse 2.40 står der "udbytte". Der skal stå "merudbytte". Hvis der skal svares med "udbytte", skal grundgødningstallet på 38,6 lægges til*).
a) Nej. I givet fald skulle udbyttet stige proportionalt med gødningsmængden, hvilket ikke er tilfældet.
b) Nej. I givet fald skulle udbyttet stige proportionalt med gødningsmængden, hvilket ikke er tilfældet.
c) Her medtager vi et punkt i (0,0), der svarer til den grundgødede mark med et merudbytte på 0.



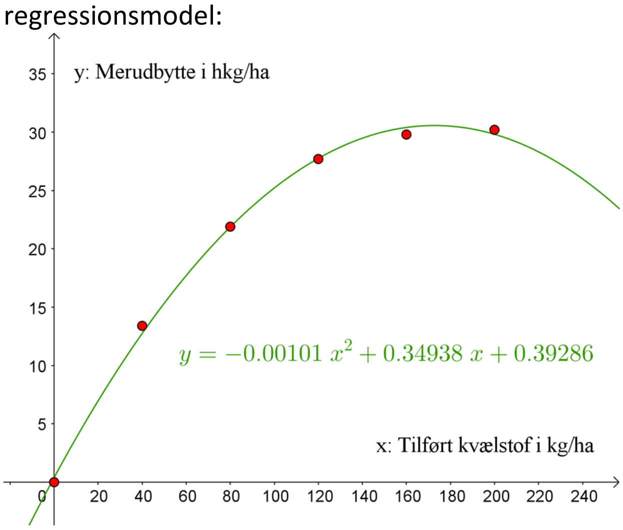
Merudbyttet stiger med øget kvælstoftilførsel, men mindre og mindre i takt med at kvælstoftilførslen bliver større.
d) Stigningen i merudbyttet bliver mindre og mindre, i takt med, at man anvender mere og mere kvælstof.

Øvelse 2.41

a) Hvis man kun bruger de fem punkter fra tabellen, får man følgende regressionsmodel:



Medtager man også punktet i (0,0), der svarer til den grundgødede mark med et merudbytte på 0, får man følgende regressionsmodel:

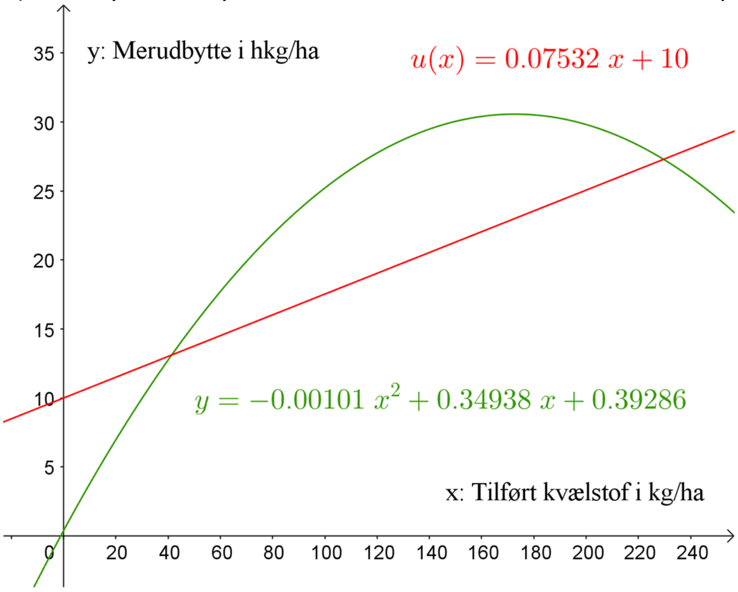


b) Toppunktet for parablen modelleret ud fra de fem punkter er $(178{,}4;30{,}5)$.
Toppunktet for parablen modelleret ud fra de seks punkter er $(172{,}8;30{,}6)$.
c) Ud fra de fem punkter skal man gøde med 178,4 kg N pr. ha for at maksimere udbyttet.
Ud fra de seks punkter skal man gøde med 172,8 kg N pr. ha for at maksimere udbyttet.
d) En lineær funktion.

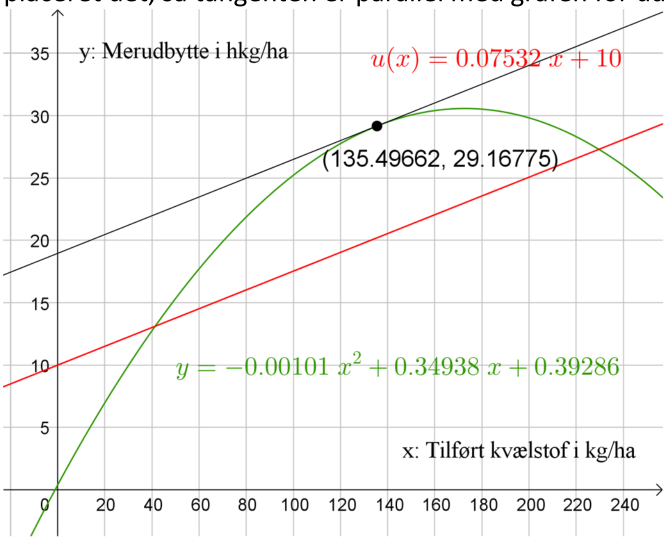
ISBN 9788770668699

e) Hvis vi modellerer udbyttet og dermed indtægterne med et andengradspolynomium og udgifterne med et førstegradspolynomium, er fortjenesten netop et andengradspolynomium minus et førstegradspolynomium, da den er differensen mellem indtægterne og udgifterne.
f) Et andengradspolynomium.

Øvelse 2.42
a) Vi benytter udbyttefunktionen vi bestemte ud fra de fem punkter i forrige øvelse.



b) I dette tilfælde stiger indtægterne hurtigere end udgifterne ved øget kvælstoftilførsel. Så det kan betale sig at hæve gødningsmængden.
c) I dette tilfælde stiger indtægterne langsommere end udgifterne ved øget kvælstoftilførsel. Så det kan ikke betale sig at hæve gødningsmængden.
d) Det optimale gødningsforbrug ligger hvor tangenthældningen er lig hældningen for grafen til udgiftsfunktionen.
e) På figuren har vi indtegnet en tangent i et variabelt punkt på grafen for indtægtsfunktionen, og efter bedste evne placeret det, så tangenten er parallel med grafen for udgiftsfunktionen.



Ifølge figuren er den optimale gødningsmængde på 135,5 kg N pr. ha.