**ISBN 9788770668699**



# Løsninger til øvelser i kapitel 0

**Øvelse 0.1**

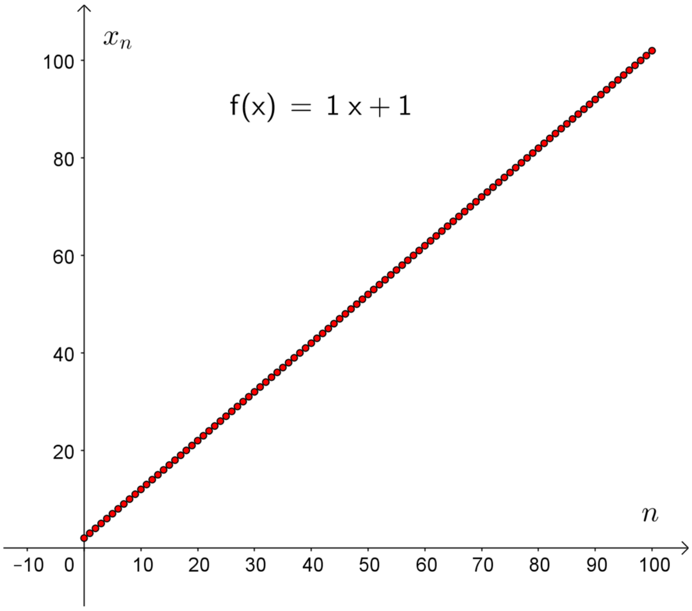
a) Tallene nærmer sig tallet $1{,}414213562$ eller mere præcist $\sqrt{2}$.

b) Hvis $a$ er positiv nærmer tallene sig $\sqrt{a}$.

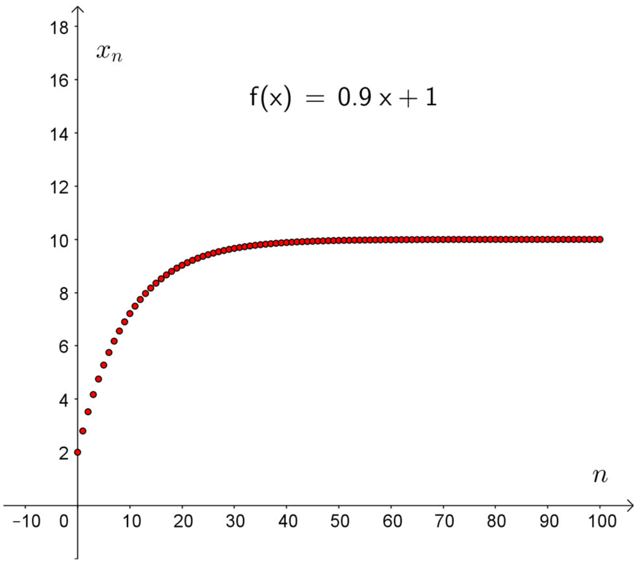
**Øvelse 0.2**

b) I alle eksemplerne er $x_0 = 2$ og $b = 1$.

$a = 1$:



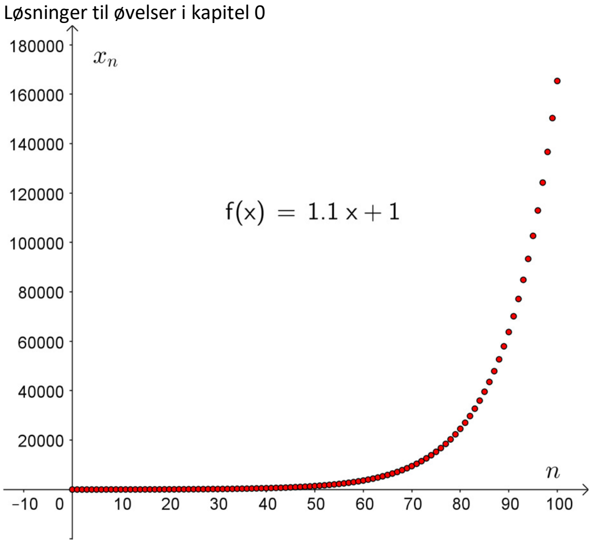

$0 < a < 1$:



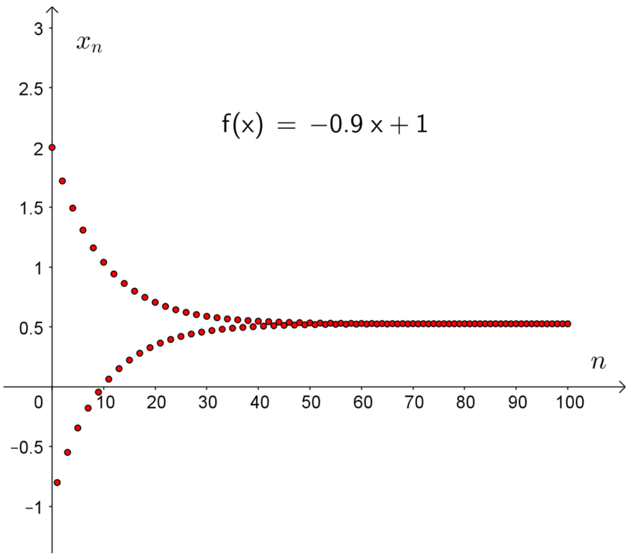

$a > 1$:

**ISBN 9788770668699**

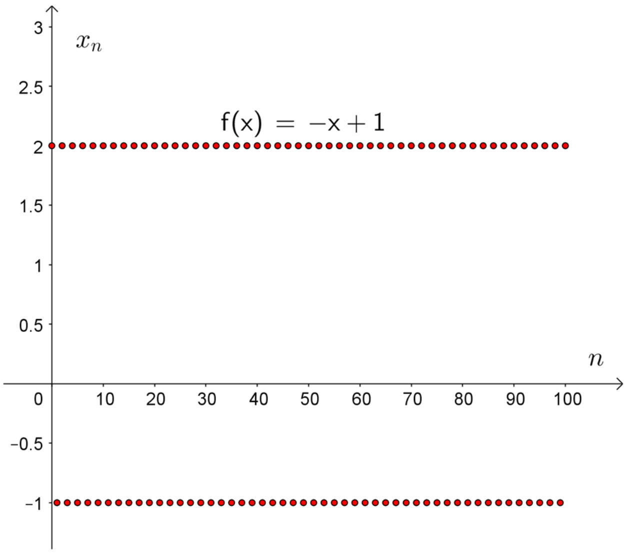
Løsninger til øvelser i kapitel 0




$-1 < a < 0$:



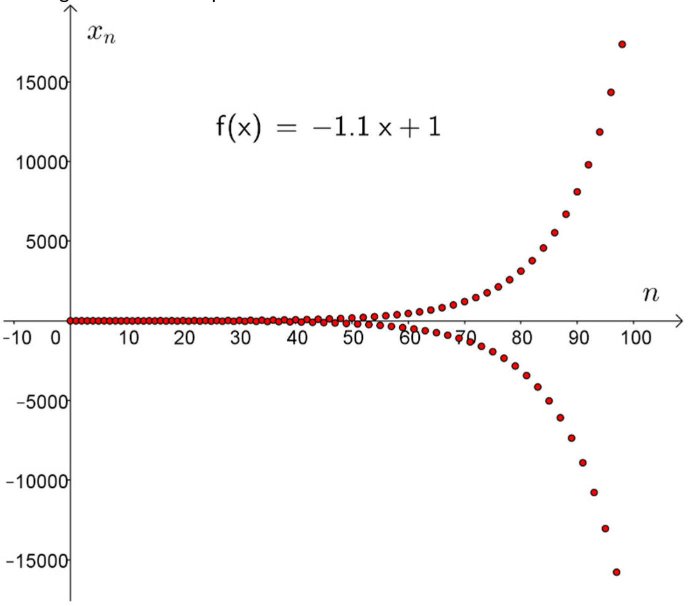

$a = -1$:



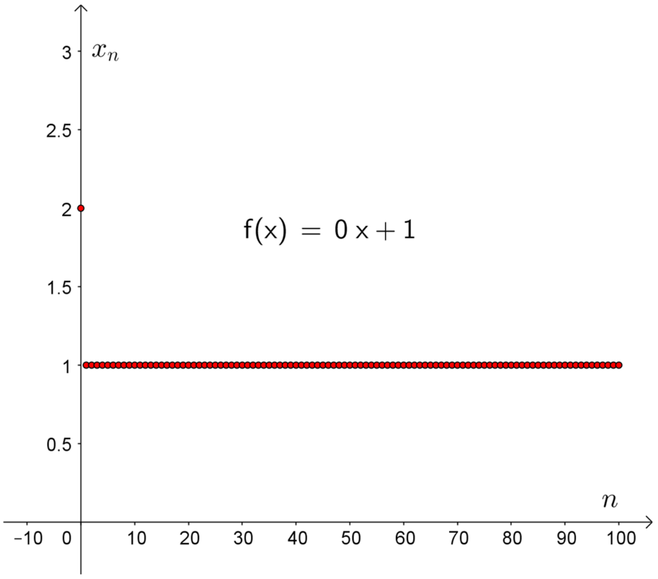

$a < -1$:

**ISBN 9788770668699**





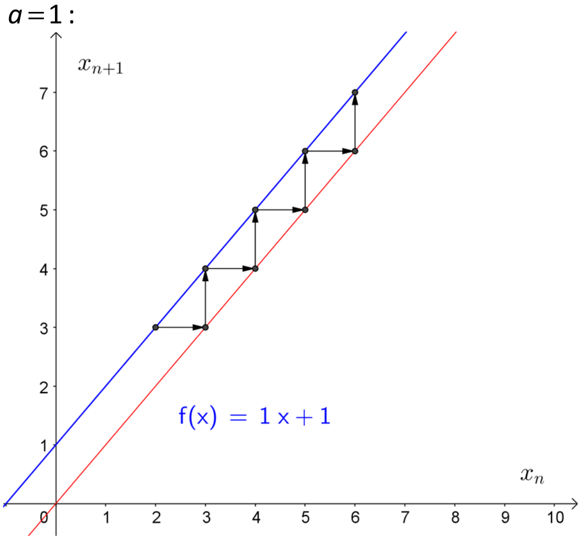

$a = 0$:




## Øvelse 0.3

b) $b$ er en form for skaleringsfaktor, mens $a$ afgør opførslen som illustreret ved de følgende billeder hvor vi har brugt $b = 1$ og $x_0 = 2$.

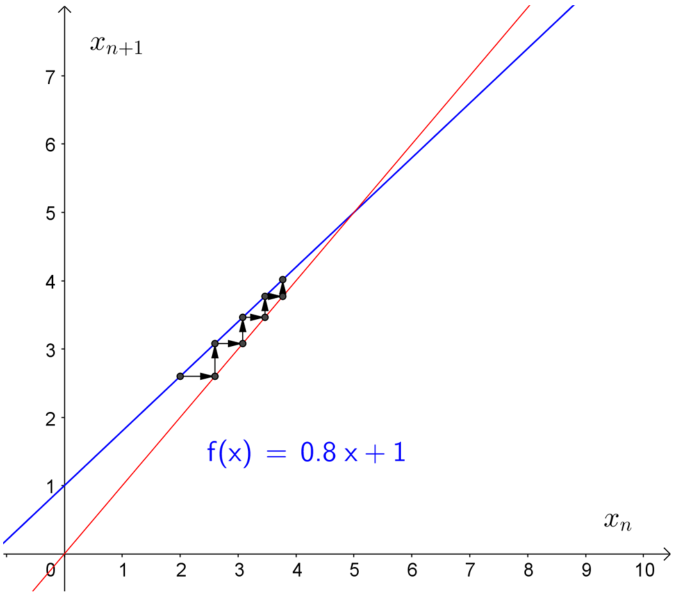
$a = 1$:



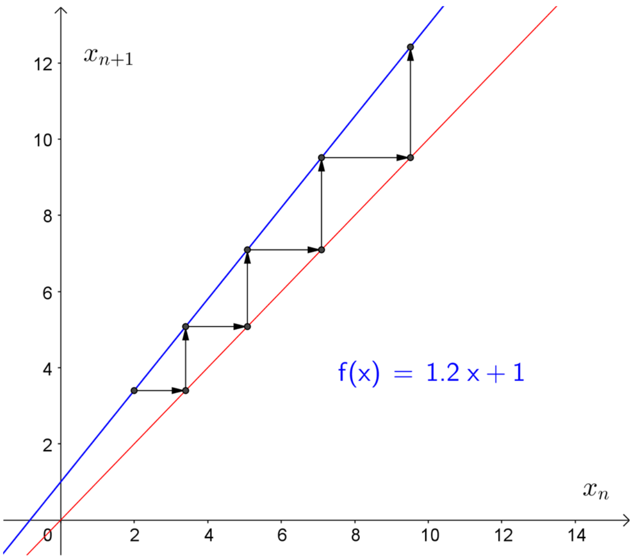
**ISBN 9788770668699**

Løsninger til øvelser i kapitel 0

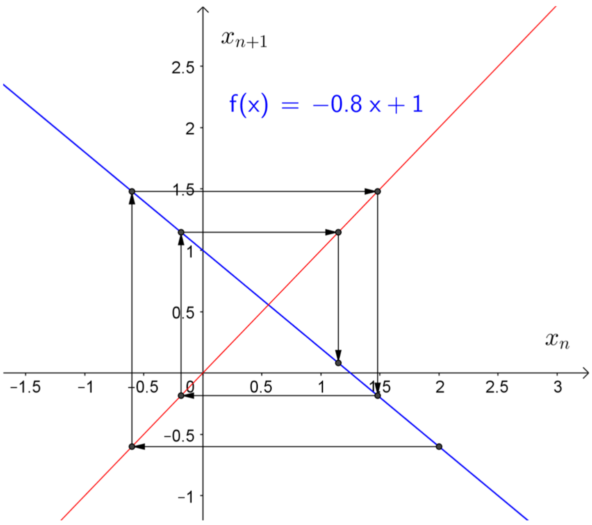
$0 < a < 1$:




$a > 1$:



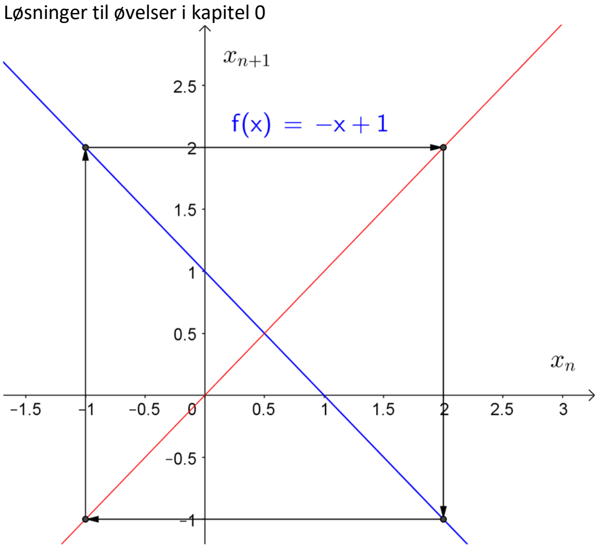

$-1 < a < 0$:



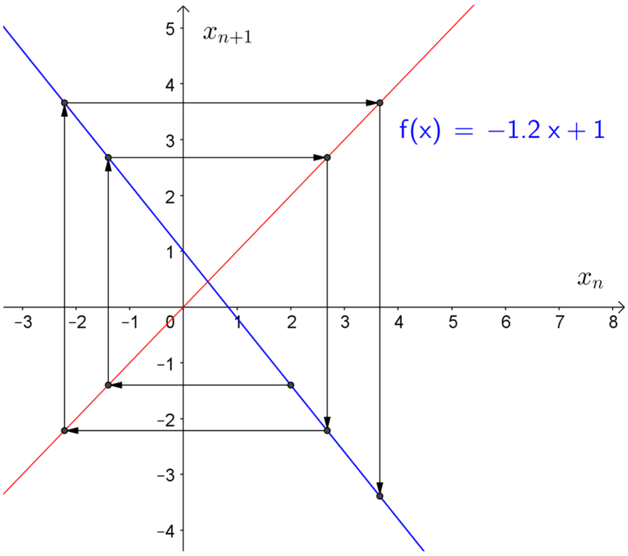

$a = -1$:

**ISBN 9788770668699**

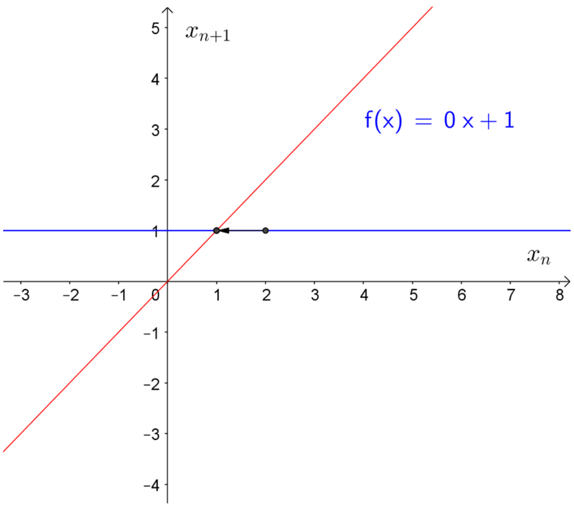





$a<-1$ :




$a=0$ :




## Øvelse 0.4

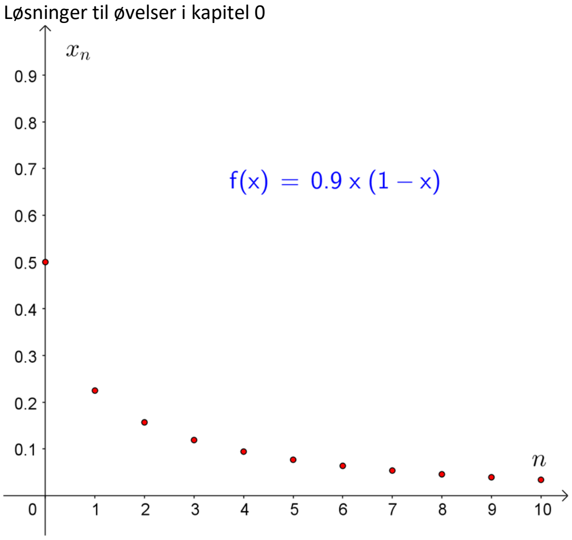
b) Vi bruger fast $x_0=0,5$. Hvis $x_0=0$ eller $x_0=1$ er følgen af tal konstant lig 0.

$a\leq 1$ : Her konvergerer tallene i følgen mod 0.

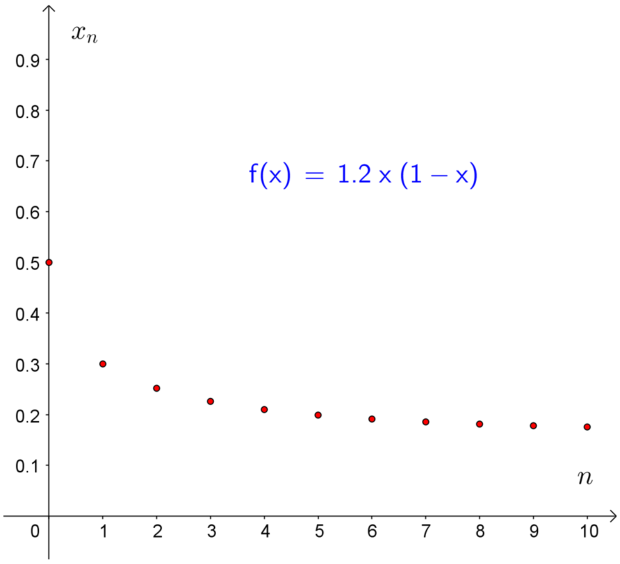
**ISBN 9788770668699**



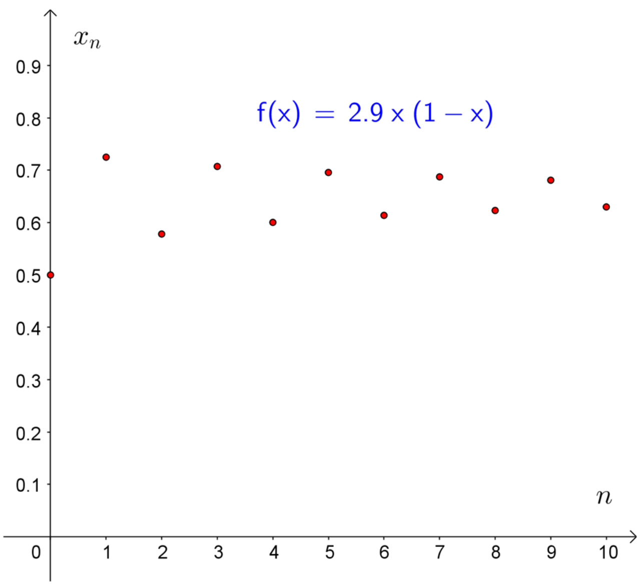





$1 \le a \le 2$ : Her konvergerer tallene i følgen mod fikspunktet $1-\frac{1}{a}$.



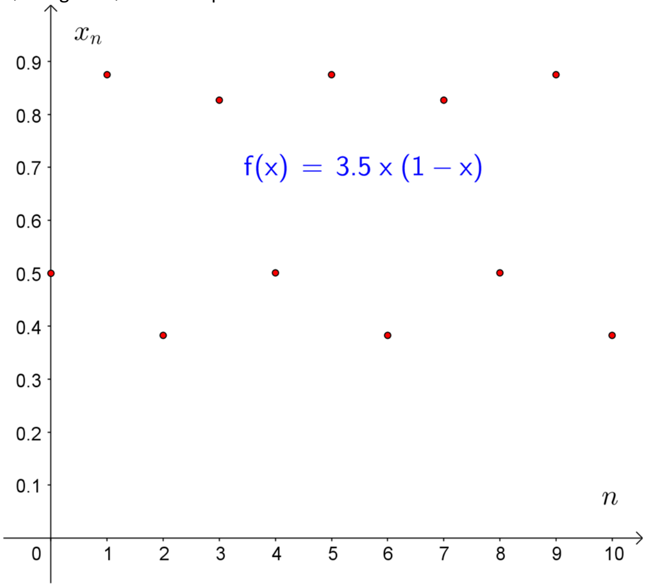

$2 \le a \le 3$ : Her konvergerer tallene i følgen mod fikspunktet $1-\frac{1}{a}$, men på en langsommere alternerende facon.




$3 < a < 4$ : Her opstår der periodisk opførsel, som f.eks. vist på nedenstående graf, hvor tallene alternerer mellem fire forskellige værdier. Opførslen ændrer sig ret kraftigt, afhængigt af valget af $a$ og $x_0$.

**ISBN 9788770668699**

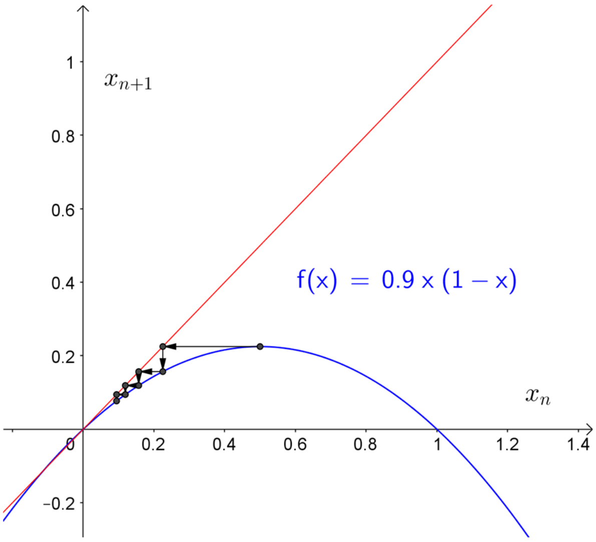




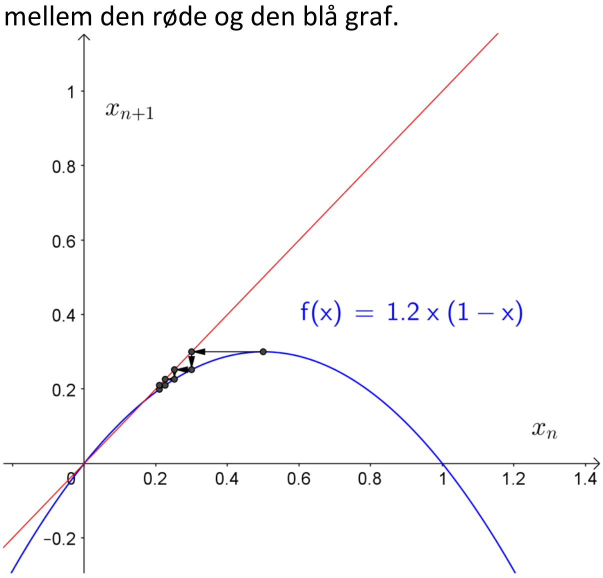

**Øvelse 0.5**

b) Vi bruger fast $x_0 = 0,5$. Hvis $x_0 = 0$ eller $x_0 = 1$ er følgen af tal konstant lig 0.

$a \leq 1$: Her konvergerer tallene i følgen mod 0. Grafisk går spindelvævet mod $(0,0)$.



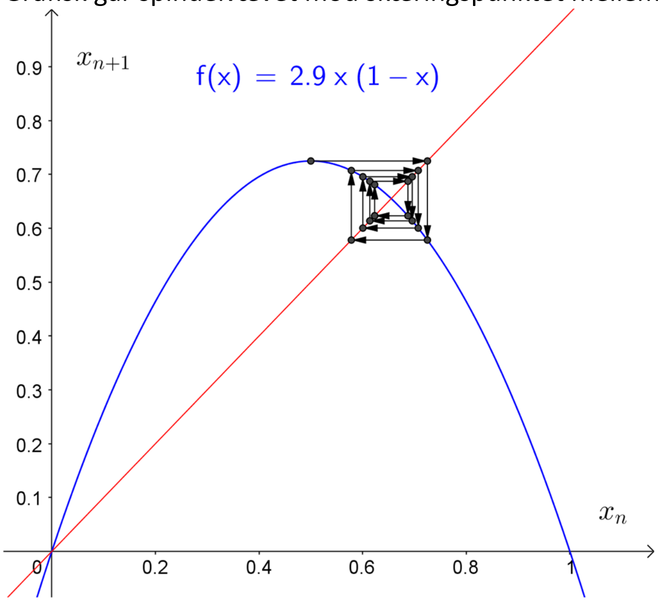

$1 \leq a \leq 2$: Her konvergerer tallene i følgen mod fikspunktet $1 - \frac{1}{a}$. Grafisk går spindelvævet mod skæringspunktet mellem den røde og den blå graf.



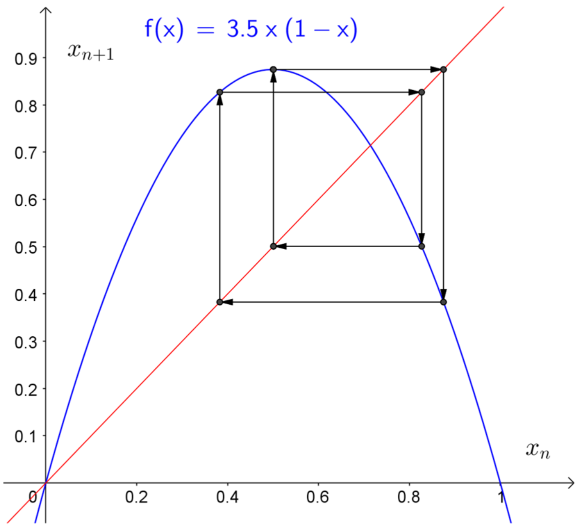
**ISBN 9788770668699**



$2 \le a \le 3$ : Her konvergerer tallene i følgen mod fikspunktet $1-\frac{1}{a}$, men på en langsommere alternerende facon. Grafisk går spindelvævet mod skæringspunktet mellem den røde og den blå graf.

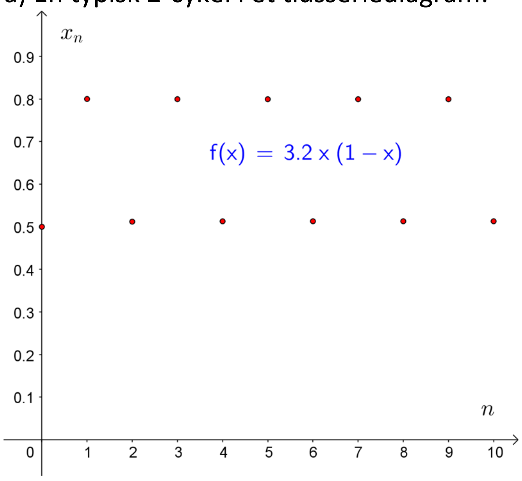



$3 < a < 4$ : Her opstår der periodisk opførsel, som f.eks. vist på nedenstående graf, hvor tallene alternerer mellem fire forskellige værdier. Opførslen ændrer sig ret kraftigt, afhængigt af valget af $a$ og $x_0$ .




**Øvelse 0.6**

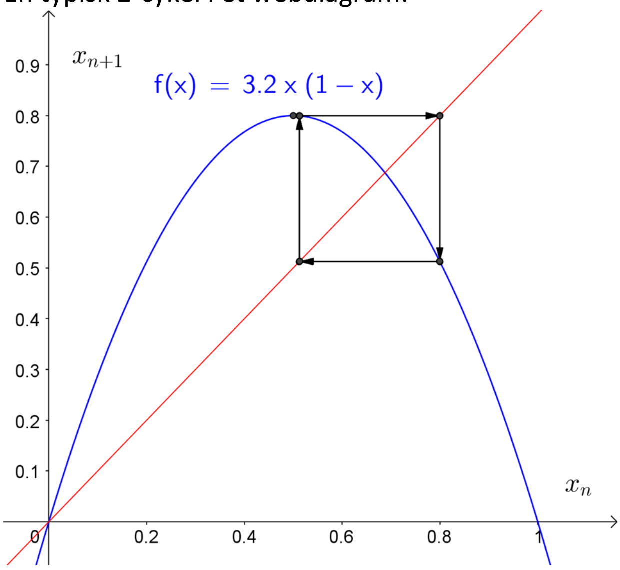
a) En typisk 2-cykel i et tidsseriediagram:



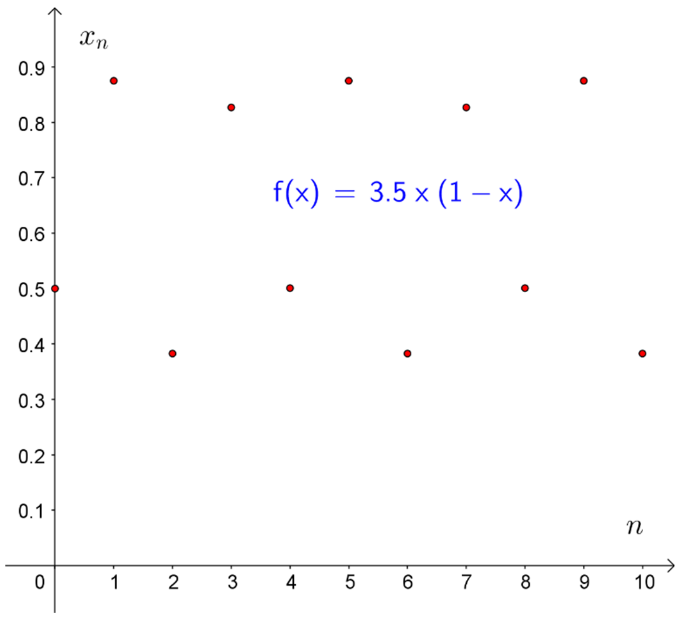
**ISBN 9788770668699**



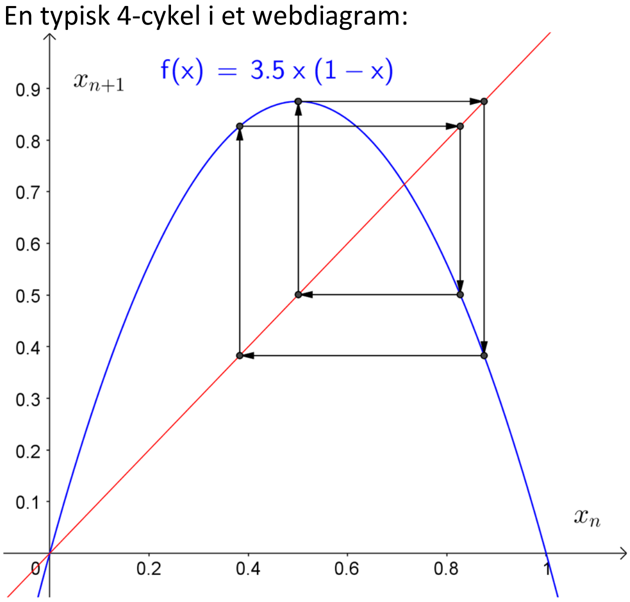
En typisk 2-cykel i et webdiagram:




b) En typisk 4-cykel i et tidsseriediagram:




En typisk 4-cykel i et webdiagram:



## Øvelse 0.9

a) For en supertiltrækkende 3-cykel får vi ligningen

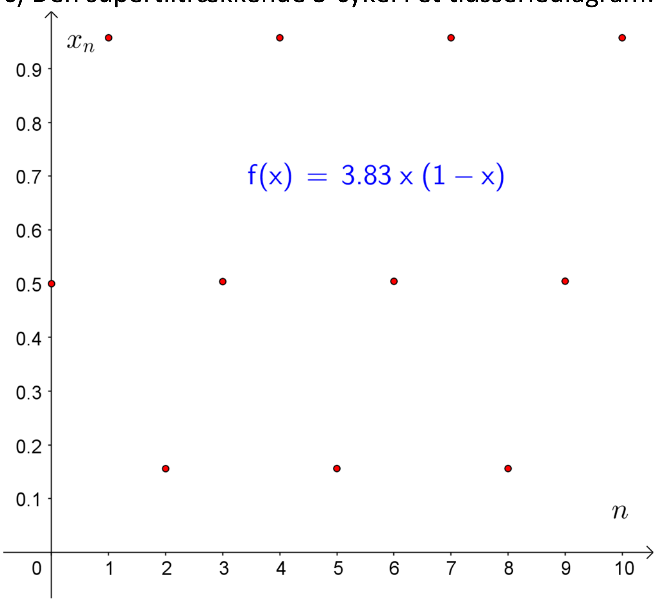
$$\frac{a^3}{4}\cdot\left(1-\frac{a}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{8}-\frac{a^4}{64}\right)=\frac{1}{2}.$$

For en supertiltrækkende 4-cykel får vi ligningen

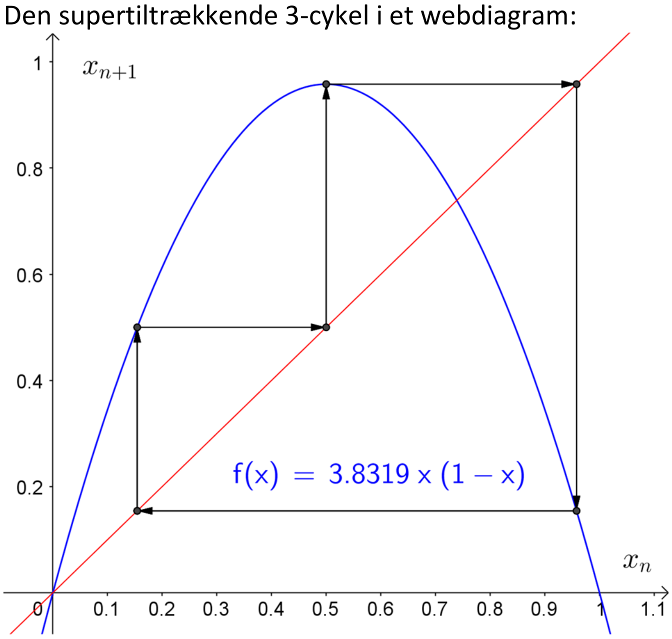
$$\frac{a^4}{4}\cdot\left(1-\frac{a}{4}-\frac{a^2}{4}-\frac{a^3}{8}+\frac{7a^4}{64}+\frac{7a^5}{64}-\frac{3a^6}{32}+\frac{a^7}{128}+\frac{7a^8}{512}-\frac{3a^9}{512}+\frac{a^{10}}{1024}-\frac{a^{11}}{16384}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Ligningen for 3-cykler har to løsninger i intervallet $0<a<4$. Den ene løsning er $a=2$, svarende til fikspunktet, og således ikke en 3-cykel. Der er derfor én supertiltrækkende 3-cykel svarende til $a\approx 3{,}831874$.
Ligningen for 4-cykler har fire løsninger i intervallet $0<a<4$. Den ene løsning er $a=2$, svarende til fikspunktet, og således ikke en 4-cykel. En anden løsning er $a=1+\sqrt{5}$ svarende til 2-cyklen, og derfor heller ikke en 4-cykel. Der er derfor to supertiltrækkende 4-cykler svarende til $a\approx 3{,}498562$ og $a\approx 3{,}960270$.

c) Den supertiltrækkende 3-cykel i et tidsseriediagram:



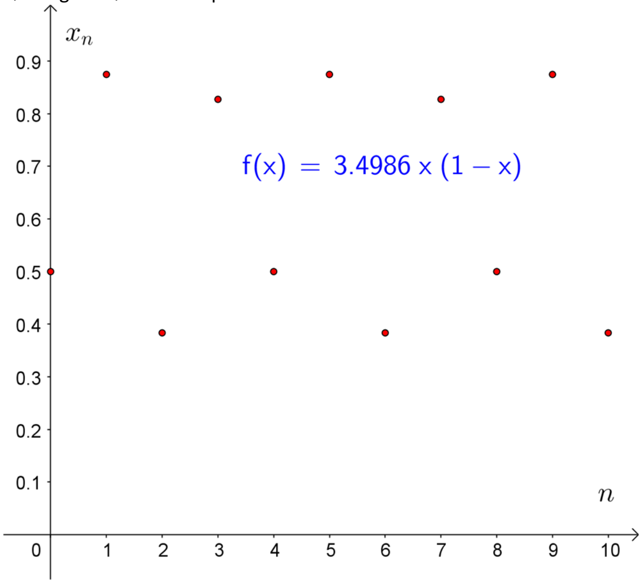

Den supertiltrækkende 3-cykel i et webdiagram:



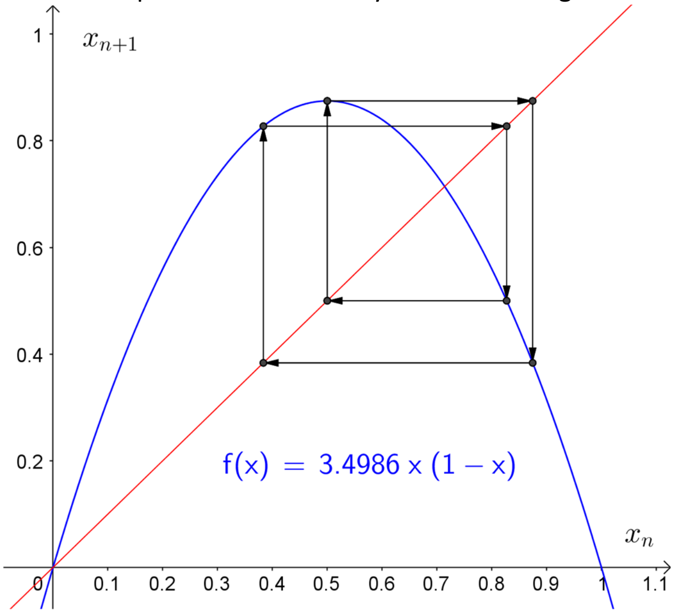

Den ene supertiltrækkende 4-cykel i et tidsseriediagram:

**ISBN 9788770668699**

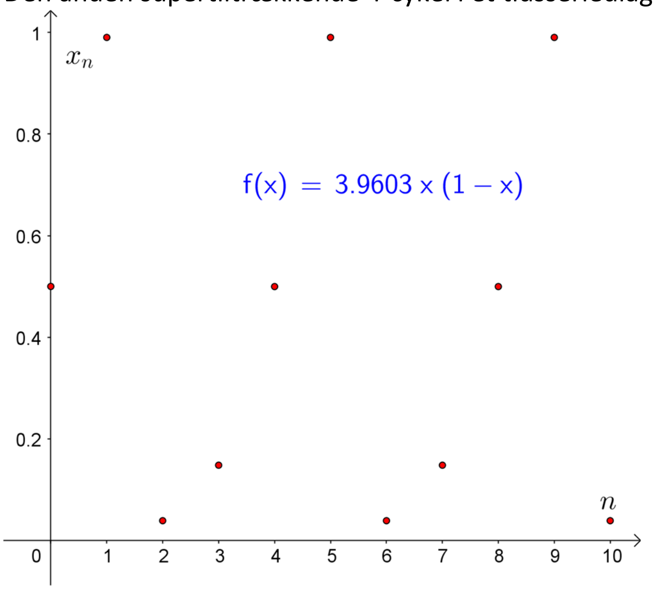
Løsninger til øvelser i kapitel 0




Den ene supertiltrækkende 4-cykel i et webdiagram:



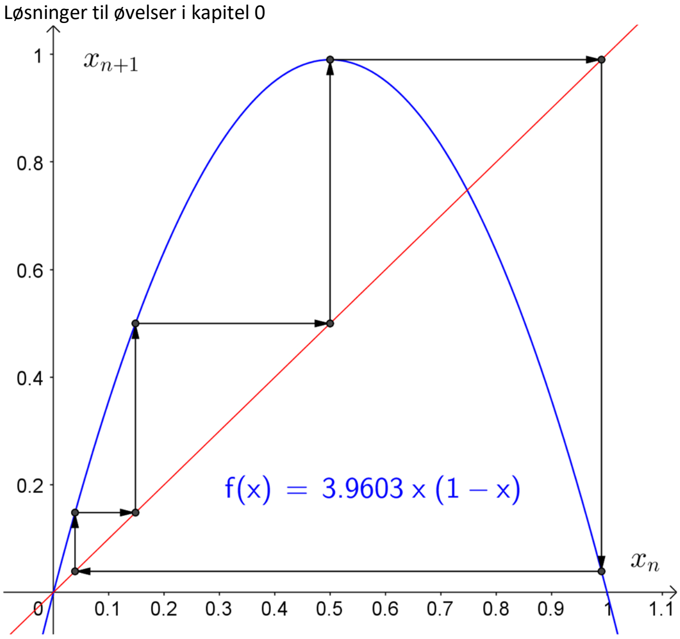

Den anden supertiltrækkende 4-cykel i et tidsseriediagram:




Den anden supertiltrækkende 4-cykel i et webdiagram:

**ISBN 9788770668699**






## Øvelse 0.10

a) Arealet af en trekant kan beregnes ved $\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ hvor $h$ er en højde og $g$ den tilhørende grundlinje. Hvis alle siderne bliver tre gange så store, bliver både $h$ og $g$ tre gange så store, altså er arealet nu

$\frac{1}{2} \cdot 3h \cdot 3g = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ og dermed 9 gange så stort.

b) Arealet af en trekant kan beregnes ved $\frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ hvor $h$ er en højde og $g$ den tilhørende grundlinje. Hvis alle siderne bliver $k$ gange så store, bliver både $h$ og $g$ $k$ gange så store, altså er arealet nu

$\frac{1}{2} \cdot k \cdot h \cdot k \cdot g = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ og dermed $k^2$ gange så stort.

c) En 7-kant (eller $n$-kant) kan inddeles i 5 (eller $n-2$) trekanter, og arealet af hele figuren er summen af arealerne af trekanterne. Da hver trekants areal skaleres op med $k^2$, bliver også hele figuren skaleret op med en faktor $k^2$.

## Øvelse 0.11

a) Med $\alpha = 1$ giver formlen $N = s^{-D}$. Anvendes logaritmen på begge sider får vi

$\log(N) = \log(s^{-D})$

Anvender vi nu en logaritmeregel får vi

$\log(N) = -D \cdot \log(s)$

Og videre

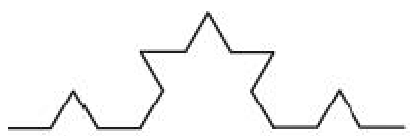
$$\frac{\log(N)}{\log(s)} = -D$$

$$-\frac{\log(N)}{\log(s)} = D$$

b) Det hænger sammen med, at $s$ er en "nedskaleringsfaktor", som derfor er mindre end 1. Logaritmen til et tal under 1 er et negativt tal. Så samlet bliver $D$ positiv.

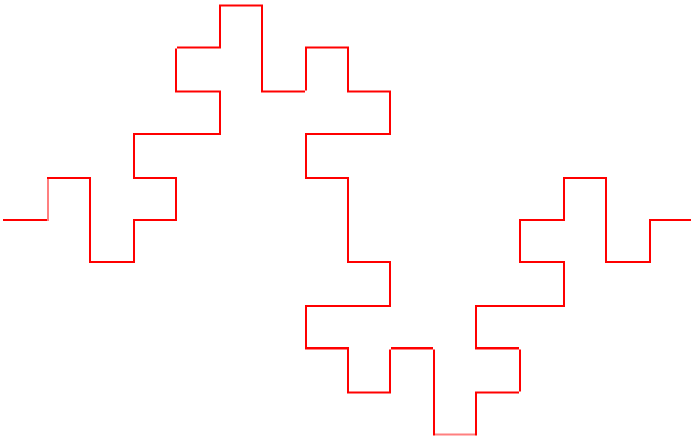
## Øvelse 0.12

a)



**ISBN 9788770668699**





Billeder taget fra: http://www.lr-web.dk/Lru/microsites/hvadermatematik/hem2download/kap0_QR7_Billeder_af_to_fraktaler.pdf

b) $s=\frac{1}{3}$ og $s=\frac{1}{4}$

c) $N=4$ og $N=8$

d) $D=-\frac{\log(4)}{\log(1/3)}=1{,}26$ og $D=-\frac{\log(8)}{\log(1/4)}=1{,}5$.

**Øvelse 0.13**

Længden nedskaleres med en faktor $s=\frac{1}{2}$. Antallet af linjestykker ganges med en faktor $\frac{70}{28}$. Nu bliver dimensionen $D=-\frac{\log(70/28)}{\log(1/2)}=1{,}32$.

**Øvelse 0.14**

Der er rod i nummereringen af spørgsmålene, b), c) og d) mangler.

a) $\frac{4}{3}a$.

e) $\frac{4}{3}b$.

f) 2. trin: $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$.

3. trin: $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$.

g) 10. trin: $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$.

$n$. trin: $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

h) Omkredsen er tre gange så stor, da vi starter med tre linjer.

10. trin: $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$.

$n$. trin: $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

i) Omkredsen er uendelig i grænsen, da udtrykket $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$ vokser mod uendelig, når $n$ vokser med uendelig.

**ISBN 9788770668699**

L&R Uddannelse
EGMONT



j) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

k) $\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$. (Sidernes nedskaleres til en tredjedel, så arealet nedskaleres til en niendedel.)

l) Der er tre nye små trekanter. Så det samlede areal af hele figuren er

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

m) $\frac{1}{9}$.

n) Der er fire gange så mange nye trekanter som i forrige trin.
Det samlede areal bliver

$$\left(1+3\cdot\frac{1}{9}+12\cdot\frac{1}{9^2}+48\cdot\frac{1}{9^3}+\cdots+3\cdot4^{n-1}\cdot\frac{1}{9^n}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Summen i parentesen er en kvotientrække som giver $1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}=\frac{9}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

Så samlet får vi arealet

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1+\frac{3}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right).$$

o) Lader vi $n\to\infty$ i arealformlen får vi $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1+\frac{3}{5}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.