

# Studieretningskapitel

## Hvad er matematik?

# 1

### Grundbog

### Kapitel 13

### Matematik og Biologi

Anne Krarup  
Mette Vedel

## Kapitel 13 – Matematik og Biologi

### Indhold

13. Fagligt samarbejde matematik og biologi .....	2
13.1 Det levende sat på formel .....	4
Eksempel 2: Vitale processer, der langt fra er ligevægt .....	6
Eksempel 3: Matematik, der helbreder .....	8
13.1.2 Eksperimenter og forklaring .....	12
13.1.3 At skrive matematik og biologi sammen .....	15
13.2 Variabelsammenhænge – celler, respiration og gæring .....	16
13.2.1 Variabelsammenhænge og doping .....	22
13.3 Beskrivende statistik – Gymnasieelevers sundhedstilstand .....	24
13.4 Beskrivende statistik – rygning, blodtyper og $\chi^2$ -test .....	30
13.4.2 Rygning og sundhed .....	31
13.4.3 Blodtyper og $\chi^2$ -test .....	37
13.5 Metoder i et projektsamarbejde mellem biologi og matematik .....	39
13.6 Opbygning af en matematik-biologi studieretningsrapport .....	40
13.7 Eksamensopgaver – kvalificering af de skriftlige besvarelser i begge fag .....	42
13.7.1 Øvelse: Eksamensopgave i matematik .....	44
13.7.2 Eksamensopgave i biologi .....	47

## 13. Fagligt samarbejde matematik og biologi

### Om brugen af og opbygningen af kapitlet

Dette kapitel om fagligt samarbejde mellem matematik og biologi bygger på kernestof i begge fag. Fagene er integreret i en række forskellige afsnit, der i første omgang skal illustrere, hvordan variabelsammenhænge, den beskrivende statistik samt dele af den bekræftende statistik ( $\chi^2$ -test) kan gennemgås ved fælles forløb og miniprojekter. Eleverne vil kunne tilegne sig kernestof i en læreproces, hvor matematikken er anvendt og forklaret sammen med biologien. Kapitlet vil kunne læses som repetition eller som supplerende læsning af de matematiske begreber gennemgået i kapitlerne 1, 2 og 9 i grundbogen *Hvad er matematik?* Kapitlet og de enkelte afsnit vil også kunne læses selvstændigt og hver for sig.

De enkelte afsnit er opbygget med udgangspunkt i forskellige faglige problemstillinger med tilhørende øvelser og forslag til eksperimenter med databehandling. Eksperimenterne kan udføres i biologi og efterbehandlingen af begge fag i fællesskab. Der lægges op til, at eksperimenter både kan udføres som en del af et projekt med en afsluttende matematik-biologi projektrapport, og som enkeltstående mindre samarbejder. Eksperimenterne og den tilhørende databehandling er tænkt med stigende sværheds- og kompleksitetsgrad, så lærere og elever i fællesskab kan vælge et forløb, der passer ind i netop deres studieretning. Samtidig kan temaer og eksperimenter også bruges i et studieretnings samarbejde med bioteknologi.

Kapitlet er målrettet C-niveau i begge fag samt den første del af en to- eller treårig progression med de to fag på B- eller A-niveau. I B- og A-bøgerne af *Hvad er matematik?* vil der være tilsvarende kapitler om fagligt samarbejde med målrettede forløb til B- og A-niveau i begge fag.

### Opbygning af kapitlet

I det indledende afsnit 1 præsenteres nogle af de områder, hvor matematik og biologi naturligt spiller sammen, og hvor der er gode muligheder for at lave fælles skriftlige produkter i de to fag. Dele af afsnit 1 kan understøtte et indledende forløb i en studieretning eller i naturvidenskabeligt grundforløb.

I afsnit 2 præsenteres eksempler på variabelsammenhænge, variabelkontrol samt kontrollerede forsøg i biologi. De forskellige repræsentationsformer vil blive præsenteret ved brug af biologiske eksempler. Afsnittet vil også kunne anvendes som en del af et forløb i naturvidenskabeligt grundforløb.

I afsnit 3 tages udgangspunkt i et tematisk undervisningsforløb om gymnasieelevers sundhedstilstand. Her vil den beskrivende statistik blive anvendt i forbindelse med en biologisk problemstilling inden for fysiologi, der hører til biologi på C-niveau.

I afsnit 4 inddrages den bekræftende statistik ( $\chi^2$ -test) ligeledes i forbindelse med temaet om gymnasieelevers sundhedstilstand samt emnet blod og arvelighed. Afsnittet er velegnet til en studieretning med matematik og biologi på B-niveau, men kan også anvendes allerede på C-niveau i begge fag.

Afsnit 5 er en opsummering af de metoder, der kan benyttes i et samarbejde mellem matematik og biologi.

Afsnit 6 er en oversigt over opbygningen af en matematik-biologi rapport.

Afsnit 7 indeholder eksempler på eksamensopgaver i biologi og matematik, hvor viden inden for de to fag kan kvalificere besvarelsene.

Da der efterhånden anvendes mange forskellige typer værktøjsprogrammer, har vi i forlængelse af grundbogen valgt i de enkelte øvelser ikke at gå ind i tekniske spørgsmål om brugen af værktøjsprogrammer, men blot anføre hvis et sådant kan anvendes.

## 13.1 Det levende sat på formel

Formålet med dette afsnit om matematik i en studieretning med biologi er, at det skal give dig indsigt i nogle af de vidensområder, hvor de to fag naturligt spiller sammen. Du vil blive inspireret til at se, hvordan matematik og biologi som fag supplerer hinanden på gymnasieniveau, men også med perspektiver frem mod fremtidens udfordringer inden for den naturvidenskabelige forskning og udvikling.

### 1.1 Matematik som en fantastisk gave i biologiens tidsalder

Op gennem det 20. århundrede blev matematikken betragtet som fysikkens tætte og naturlige samarbejdsfag. Fysikeren Eugene Wigner har engang udtalt følgende om matematik:

*"At matematikkens sprog er passende for formuleringen af fysikkens love er et mirakel og en vidunderlig gave, som vi hverken forstår eller fortjener. Vi skal være taknemmelige herfor og håbe, at det fortsat vil være gældende i fremtidig forskning."*

Den biologiske videnskab ændrer sig mere og mere mod at blive mere kvantitativ, computeriseret og matematisk. Historisk set har biologi været "et af de mindst matematiske" naturvidenskabelige fag. Men i nutidens naturvidenskabelige og matematiske forskning har biologien erstattet fysikken som det næste "store felt", et område med store muligheder for innovation og udvikling. Omvendt kan matematikken også betragtes som det næste "store felt" for biologien. De matematiske værktøjer er ved at indhente kompleksiteten i biologien, og biologerne taler i højere og højere grad lige så "klart" matematisk som fysikerne gør på mange områder. Udviklingen giver udfordringer for begge fag, og det er derfor vigtigt at skabe nye traditioner og samarbejder allerede i gymnasiet.

Matematikken, der kan beskrive studier af levende organismers genomer og foldningen af proteiner, er både dyb, elegant og smuk. Matematik og biologi i samspil skaber en helt ny spændende gren af forskningen, som udvikler sig eksplosivt.

### **Eksempel 1: Matematikken giver nye muligheder i biologisk forskning**

Følgende områder er eksempler hvor matematikken har skabt store nye muligheder i biologisk forskning:

- Evolutionsteori og -praksis i forhold til genomer
- Metabolisme
- Statistiske tilgange til opdagelsen af gener, der er involveret i kompleks adfærd
- Modellering af komplekse økosystemer
- Forklarende og forudsigende modeller på det cellulære niveau
- Populationsdynamik
- Nye algoritmer for fylogenetiske analyser
- Dynamiske systemer i udvikling og differentiering

I de følgende to eksempler kan du læse uddrag af to artikler der omhandler nye muligheder i forskningsfeltet mellem biologi og matematik. Dele af de emner, artiklerne omhandler, kan uddybes på B- og A-niveau.

### Eksempel 2: Vitale processer, der langt fra er ligevægt

*En række vitale processer i vores krop svinger med bestemte mønstre frem for blot at være i ligevægt. Forskerne forsøger at forstå, hvilken betydning disse svingninger har.*

Af Jens Christian Brasen og Lars Folke Olsen

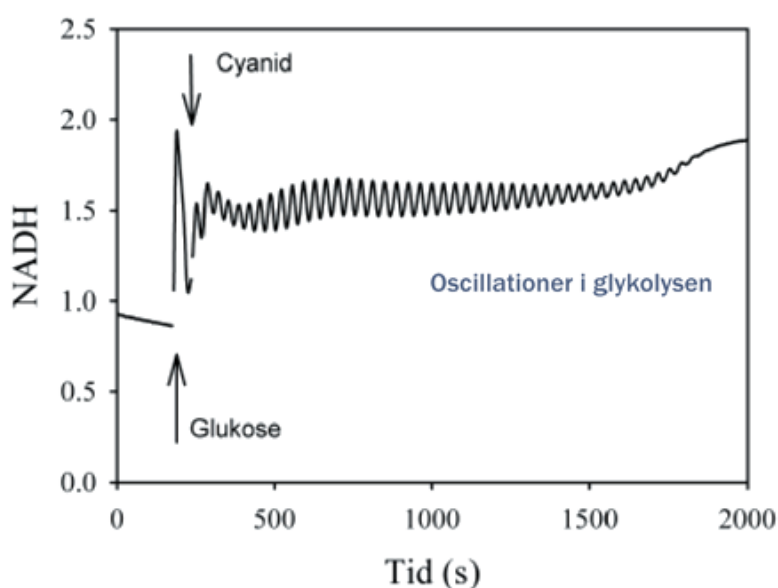


Normalt tænker vi på vores krop som et sted præget af ligevægt. F.eks. søger kroppen at holde en konstant temperatur omkring 37 grader ligesom en række andre faktorer såsom mængden af sukker og ilt i blodet holdes inden for snævre rammer. Man taler inden for biologien om, at kroppen befinder sig i homøostase. I virkeligheden dækker denne tilsyneladende stationære tilstand over, at mange stoffer i vores krop befinder sig langt fra ligevægt, og at koncentrationen af disse stoffer svinger med et bestemt mønster, der kan variere fra sekunder op til måneder. Disse svingninger kaldes i fagsproget for "oscillationer", og forskerne forsøger at afdække mekanismerne bag dem, og hvorfor de er så vigtige for vores organisme.

#### Systembiologien kommer til hjælp

Svingningerne i glykolysen og i calcium-ioner forekommer i mange slags celler udover gærceller og betaceller. På grund af kompleksiteten i glykolytiske oscillationer og deres store udbredelse er der mange, der har interesseret sig for dem, men man er først begyndt at forstå dem i det forgangne årti. Oscillationer forekommer også i mange andre processer i vores krop, blandt andet i vores immunsystem, i muskler, og i hormonsystemer. Men hvornår er oscillationerne opstået i vores evolutionære historie, og hvorfor er de så vigtige? Svaret på disse spørgsmål kender vi endnu ikke. Og vi kender kun den fysiologiske betydning af få af kroppens mange oscillerende processer. Vi ved f.eks., at hjertets rytmiske sammentrækning skyldes, at hjertet fungerer som en pumpe, der pumper blodet rundt i kroppen, men de fleste oscillerende processers funktion er stadig ukendt. For at kunne besvare spørgsmålet om, hvordan oscillationerne opstår, og hvad de betyder for vores krop, er det vigtigt at processerne bag oscillationerne er velbeskrevne, samt at koblingen til andre processer også kendes.

I erkendelse af, at biologiske processer sjældent kan undersøges isoleret fra det system, de er en del af, er der de senere år udviklet en gren af biologien kaldet systembiologi. Inden for systembiologien er der meget fokus på at kombinere eksperimentelle målinger med teoretiske metoder, og der er udviklet en række nye redskaber, teorier og arbejdsmetoder, der gør det muligt at undersøge komplekse biologiske systemer med mange variable. Mens matematiske modeller gennem årene har fundet udbredt anvendelse inden for fysik, meteorologi, geologi, geografi og senest inden for økonomi, er potentialet endnu ikke fuldt udnyttet inden for biologi og medicin. Det søger man nu at rette op på inden for systembiologien – bl.a. ved at forsøge at opstille en matematisk model for glykolysen.



Figuren illustrerer et forsøg med gærceller, hvor vi har fået gærens glykolyse til at oscillere. Vi måler svingningerne ved at måle på fluorescensen af NADH. Vi starter med at tilsætte glukose, som gæren begynder at omsætte til ethanol og kuldioxid. Derefter tilsættes cyanid, således at gæren stopper med at forbruge ilt, og kort tid efter starter oscillationerne.



## Eksempel 3: Matematik, der helbreder

*For uindviede lyder det lidt som science fiction produceret i Hollywood. Man kunne nemt tro, at man havde at gøre med et manuskript, hvor Tom Cruise eller måske Sigourney Weaver spiller en forsker, der kæmper mod tiden for at redde mennesket med tal og ligninger. Men det er ren og skær virkelighed, at matematiske formler kan redde menneskeliv.*

### Matematik, der helbreder



Kroppens mysterier belyst med tal. Tal, der giver viden om funktioner i kroppen, som man ellers ikke kan undersøge. Det er professor Johnny Ottesens dagligdag, når han som matematiker kaster sig over emner som narkose, diabetes, blodtryk og depression. Teknikken er matematisk modellering, som man også kender fra det store forarbejde, inden man bygger en bro. Men Johnny Ottesen beskæftiger sig ikke med betonpillers tykkelse eller stålwireernes udformning, men med det, han kalder matematisk fysiologi. De sidste tyve år har han arbejdet med matematisk modellering inden for medicin. Interessen begyndte, da han efter sin ph.d.-grad blev inviteret til at deltage i et projekt om at udarbejde en narkosesimulator, som i dag benyttes til uddannelsen af narkoselæger og -sygeplejersker.

Konceptet var matematiske modeller, der kørte på en computer, som blev koblet op i operationsstuen. Gennem ligninger kunne man simulere, hvad der skete under operationen, og hvad forskellige påvirkninger ville betyde for patienten. Det blev en succes, som blev brugt flere steder, og Johnny Ottesen var begejstret over, at hans matematiske viden kunne bruges så direkte. Siden har han bredt sig ud over flere områder, og han ser nærmest ingen begrænsninger for, hvad modellerne kan bruges til. "Grænsen for, hvad man kan med modellerne, er flydende og vil hele tiden flytte sig. I min levetid tror jeg ikke, vi kan modellere et helt menneske, men vi kan beskrive delsystemer i kroppen. Kunsten her er ikke kun rent matematisk faglig. Det handler i høj grad om at stille en model op, der præcist fanger det, vi skal, og undlader det uvæsentlige", siger han. (...)

“Vi laver for eksempel en matematisk model af det system, der regulerer blodkredsløbet. Modellerne kan indeholde et hav af informationer om kroppen, og her kan man se, hvad der sker, når man skruer på forskellige faktorer. Når vi laver ligningen, så er der nogle variable, som vi kender, fx blodtryk og blodstrømning. Der er også nogle konstanter, som vi ikke kender, og som er meget svære at måle på et levende menneske – det kunne fx være, hvor bløde vores årer er. Men gennem modellen finder vi konstanterne og kan på den måde få viden, som man ikke kan få gennem den traditionelle medicin. Jeg plejer at sige lidt sloganagtigt, at vi gør det usynlige synligt og det utilgængelige tilgængeligt”, siger Johnny Ottesen.(...)

### Den rette medicin

Johnny Ottesen giver som eksempel, at man vil have en definition på, hvor godt et hjerte er.

Ser man på de medicinske definitioner, er de ret vage, og undersøger man dem nærmere, er de tvetydige eller direkte matematisk inkonsistente, for de viser, at man kan have et godt hjerte, mens målet siger, det er dårligt, eller omvendt. Hjertet spiller sammen med sine omgivelser, og omgivelserne kan have justeret sig, så systemet samlet set virker fint, men det gør ikke selve hjertet godt. Matematikken kan skille tingene ad og vise, hvordan hjertet fungerer isoleret set, og den viden har hjertelæger brug for. (...)

*“Med matematikken kan man stille knivskarpt på ting, det ikke falder lægerne naturligt at fokusere på, og det er et godt eksempel på tværfaglighedens styrke”. (...)*

Når man forsker i fx depression eller skizofreni, så er modellerne en fantastisk genvej, som kan spare en masse ubehagelige forsøg med dyr, der først er gjort “psykotiske”. Også på mange andre områder kan man undgå, at dyr må lade livet, fordi man kan lave de indledende studier ved at regne sig frem. Der vil være veje, man hurtigt kan se, man ikke skal ofre tid, penge og forsøgsdyr på, mens modellerne peger i den retning, der ser lovende ud. (...)

### Øvelse 13.1

- a) Giv eksempler på variable og på variabelsammenhænge i eksempel 2 og eksempel 3.
- b) Find eksempler på artikler, der omhandler problemstillinger med både biologi og matematik.
- c) Hvilken rolle spiller biologien?
- d) Hvilken rolle spiller matematikken?

Du kan få hjælp til øvelsen af nedenstående praxis-tekst:

#### **Praxis: Hvor findes materialer om matematik og biologi**

Når du skal finde aktuelle problemstillinger med både biologisk og matematisk indhold, kan det være en god idé at:

- 1) Søge efter aktuelle artikler, der omhandler emner inden for biologien.
- 2) Læse artiklen igennem.
- 3) Prøve at vurdere, om der også er matematik med:
  - a. Er der fx grafer, der afspejler variabelsammenhænge? Hvilke variable indgår? Hvilke uafhængige og afhængige variable omtales?
  - b. Er der beskrevet noget om vækstmodeller? Hvilke?
  - c. Er der beskrevet noget om symmetriske/geometriske mønstre? Har de særlige velkendte matematiske former?
  - d. Indgår der statistiske overvejelser? Hvilke?
  - e. Indgår der noget om eksperimenter, der er opstillet på baggrund af en hypotese? Er der lavet en statistisk test?
  - f. Indgår der matematiske formler i artiklen? Hvilke?

Som en start kan du søge artikler på følgende hjemmesider (hvoraf nogle kræver skolelicens):

- a) <http://aktuelnaturvidenskab.dk/>

## Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi

Af Anne Krarup og Mette Vedel

- b) <http://www.naturens-verden.dk/>
- c) <http://skoda.emu.dk/omdatabaser/infomedia.html>
- d) <http://www.illvid.dk/>
- e) <http://www.biotechacademy.dk/>

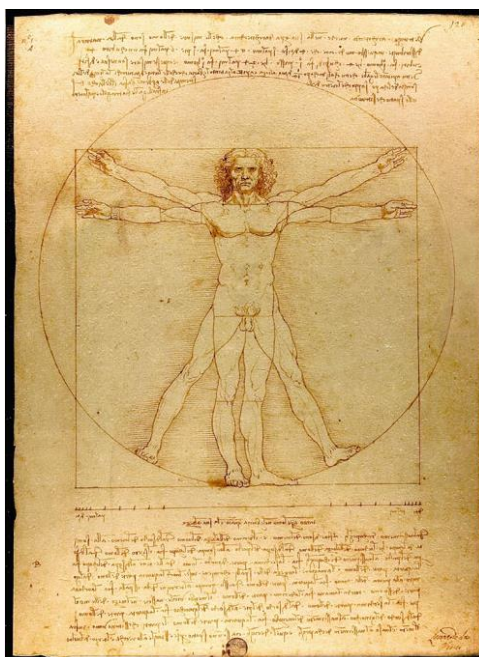
## 13.1.2 Eksperimenter og forklaring

Hvad skal vi bruge det til? Et spørgsmål der ofte bliver stillet i matematiktimerne, men ikke så ofte i biologitimerne. Hvorfor?

I biologi arbejder vi ved hjælp af naturvidenskabelige metoder, dvs. vi observerer, opstiller hypoteser, indsamler data, laver eksperimenter for at verificere eller falsificere vores hypoteser.

Matematikere laver ingen observationer og udfører ikke eksperimenter, som biologer gør. Matematik foregår kun i vores hjerner – det er abstrakt. Men alligevel har matematik stor betydning for den naturvidenskabelige forskning. Matematikken og særligt statistikken hjælper os med at holde styr på data, sandsynliggøre en hypotese og opstille modeller, der kan anvendes til at udforske de levende organismer yderligere. De levende organismer har gennem evolution udviklet mange indviklede geometriske og symmetriske former, der kan beskrives ved hjælp af matematikken. Matematikken kan altså forklare og beskrive biologien på en særlig systematisk måde, der gør, at vi kan genkende mønstre og sammenhænge i naturen. Vi kan således få indsigt i naturens matematik og lidt populært sagt også i matematikkens natur. Det er gennem de mange anvendelser, matematikken bliver spændende, unik og sjov at arbejde med. En kiselalge har, siden den blev udviklet gennem evolution, været en næsten perfekt cirkel – matematikeren er bare den første, der kan synliggøre netop det.

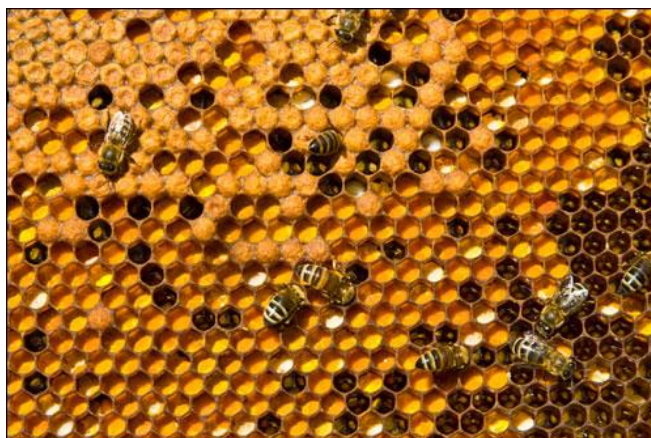
Figureerne, du ser her, er klassiske eksempler på interessante mønstre i naturen:



Menneskets symmetri – det gyldne snit.



Den almindelige søstjerne, der er et pentagram.



Bier laver bikager, der består af sekskantede celler. Sekskantede celler, der kan indeholde mest på et givet areal.



## Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi  
Af Anne Krarup og Mette Vedel

Tusindfryd og solsikke, hvor småblomsterne danner to spiraler – en med uret og en mod uret i overensstemmelse med Fibonaccirækker.

### Øvelse 13.2

- a) Find nogle andre eksempler på mønstre dannet i eller af levende organismer.
- b) Beskriv mønstret ved hjælp af matematiske symboler og formler.
- c) Vælg et eller flere mønstre og giv mulige forklaringer på, hvordan og hvorfor et sådant mønster kan være opstået og/eller udviklet.  
En del af matematikken vil vi først behandle på B- eller A-niveau.

### 13.1.3 At skrive matematik og biologi sammen

Studieforberedende skrivekompetencer i matematik og biologi handler blandt andet om at kende fagenes skriftlige genrer, at kunne anvende fagenes terminologi og formulere sig sprogligt korrekt, at kunne udarbejde og forklare grafer, datasæt, modeller og at beherske faglig argumentation.

Du vil arbejde med disse studieforberedende skrivekompetencer i både matematik og biologi, og når fagene samarbejder. Når du i biologi skal forklare forløbet af en graf, kan du kvalificere din forklaring ved at anvende din matematiske viden om grafen.

I samarbejdet mellem fagene skal du anvende faglige termer fra begge fag.

I samarbejdet mellem fagene vil du ofte komme ud for at skulle behandle et datamateriale fra et forsøg eller fra en artikel. Ved at lægge datamaterialet ind på et værktøjsprogram får du et første overblik. Men en grafisk fremstilling af datamaterialet kan i ét blik give dig indtryk af, hvordan sammenhængen er mellem de variable. I matematik lærer du både at håndtere datamaterialet og at anvende præcise begreber til at beskrive de grafiske forløb og de matematiske modeller.

Du demonstrerer en mere sammenhængende forståelse, hvis du fx med matematiske begreber kan redegøre for, hvad der karakteriserer en bestemt vækstmodel eller for hvad det vil sige, at vi anvender regression til at opstille en lineær model i en biologisk sammenhæng.

For at kunne udvikle evnen til at skrive en sammenhængende tekst i matematik og biologi er det vigtigt at kende og arbejde med det enkelte fags forskellige måder at skrive på. I biologi arbejdes med forskellige genrer. Du skal både kunne skrive en rapport og kunne besvare en mindre eller større biologisk opgaveformulering. I flerfaglige arbejder i studieretningen, i almen studieforberedelse og studieretningsprojektet skal du kunne skrive både i fagene og om fagene. I matematik skal du både kunne skrive en matematisk aflevering med den korrekte korte matematiske notation, men også kunne argumentere for valg af metoder og dokumentere anvendelsen af dem til at løse et konkret matematisk problem. Det er derfor vigtigt at få styr på fagenes særkender og fællestræk.

Når du skal lave projektrapporter i matematik og biologi, kan det være en udfordring at bruge fagene sammen i analyser og forklaringer. Ofte vil det være svært, fordi vi anvender forskellige sprog i de to fag. I biologi bruger vi et sprog, der er tæt knyttet til udførelse af eksperimenter, dataindsamling og hypotesetest. I studier af levende organismer er observationer af den "rigtige" verden eller data fra "rigtige" eksperimenter fundamentet. I matematik bruger vi ofte et mere abstrakt sprog, præcise definitioner og formler. Når vi arbejder i matematikkens verden, kan vi bare "opfinde" nogle tal og indsætte dem i en model for at illustrere egenskaber i modellen. Denne praksis eksisterer typisk ikke i biologi.

Når du skal skrive i fagene sammen, skal du udnytte matematikkens præcision, de forskellige repræsentationsformer og systematikken, og gøre dette i arbejdet med de "rigtige" data eller observationer i biologi og med inddragelse af de biologiske forklaringer.



## 13.2 Variabelsammenhænge – celler, respiration og gæring

### 2.1 Indledning



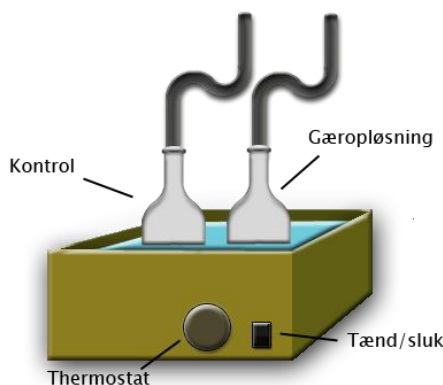
Som introduktion til biologiske arbejdsmetoder udførte en klasse et eksperiment med gærceller. Den biologiske viden om celler, respiration og gæring kan du læse i biologibøger. Den anvendte matematik i dette afsnit kan du finde i kapitel 1 og 2 i Hvad er matematik?

### 2.2 Introduktion til eksperiment

I eksperimentet skulle eleverne observere gærcellers aktivitet ved seks forskellige temperaturer, henholdsvis 10, 20, 30, 40, 50 og 60°.

Der blev opstillet seks forsøgspstillinger. Hver af forsøgspstillingerne bestod af et termostatreguleret vandbad, hvori der blev placeret to kolber. I hver kolbe blev tilsat 100 mL vand og 10 g glucose. I den ene af de to kolber blev opløst 5 g bagegær. Kolberne blev forsynet med en prop med et gærrør med vand, så gærcellernes aktivitet kunne måles ved at tælle antallet af bobler, der kom op gennem gærrøret. De seks vandbade blev indstillet til henholdsvis 10, 20, 30, 40, 50 og 60°.

Herefter startede eleverne et stopur, og efter fem minutter talte de hvert minut i de følgende 15 minutter, hvor mange bobler, der kom op gennem gærrøret i hver af kolberne.



### 2.3 Hypotesen

Inden forsøget skulle eleverne opstille en hypotese, der omhandlede deres forventninger til sammenhængen mellem gærcellernes aktivitet og vandets temperatur.

#### Øvelse 13.3

Opstil en hypotese, der omhandler gærcellers aktivitet og vandets temperatur.

### 2.4 Variabelsammenhænge og kontrollerede forsøg

I forbindelse med det enkelte eksperiment i biologi er det altid vigtigt at være opmærksom på variabelsammenhænge og kontrolforsøg.

I biologi siger vi, at der er tale om variabelkontrol, hvis der kun er to variable, der kan variere i eksperimentet, hvoraf vi kun varierer frit på den ene variabel, nemlig den uafhængige variabel. I dette eksperiment med gærcellers aktivitet varieres temperaturen, og antallet af bobler pr. minut tælles. Alle andre forhold i forsøget er konstante eller ens i alle seks opstillinger.

### 2.5 Kontrolforsøg

I hver opstilling indgik et kontrolforsøg. Kolben uden gæropløsning fungerede som kontrol. Hvis der var observeret bobler i en af kontrolkolberne, ville måling af bobler ikke kunne bruges som mål for gærcellers aktivitet.

#### Øvelse 13.4

- a) Hvilke variable indgår i dette eksperiment med gærcellers aktivitet?
- b) Hvilken variabel er den afhængige og hvilken er den uafhængige?
- c) Er der tale om variabelkontrol?
- d) Kan denne variabelsammenhæng beskrives ved hjælp af matematiske variable?
- e) Hvilken rolle spiller kontrolforsøgene?

## 2.6 Resultaterne

Eleverne opstillede deres resultater, dvs. rådata i en tabel. I kolberne uden gæropløsning kom der ingen bobler. I kolberne med gæropløsning fremkom følgende antal bobler:

Minut	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C
6	0	7	12	22	35	17
7	0	5	15	25	36	19
8	0	8	16	25	34	17
9	0	5	13	27	27	19
10	0	6	19	25	32	19
11	1	7	22	29	27	15
12	0	9	20	26	28	13
13	0	7	18	28	26	12
14	1	8	19	30	25	7
15	0	8	22	29	23	6
16	0	9	19	33	23	8
17	0	10	21	31	19	11
18	0	11	20	32	17	5
19	0	9	23	33	17	5
20	1	10	17	31	17	4

Resultaterne kan hentes i et regnearksformat [her](#).

## 2.7 Databehandling

Eleverne skulle herefter præsentere deres resultater på en passende måde, så deres data blev overskuelige.

### Øvelse 13.5

- a) Fremstil en passende graf, der viser gæraktiviteten som funktion af tiden for de forskellige temperaturer i et passende koordinatsystem. Overvej følgende:
  - a. I hvilke intervaller løber værdierne for de to variable?
  - b. Hvad er definitionsmængden?
  - c. Hvad er maksimum og minimum ved de forskellige temperaturer?
  - d. Hvor mange kvadranter er relevante at have med i den grafiske fremstilling?
  - e. Hvilken enhed har du på x-aksen og på y-aksen? Hvorfor?
- b) Beskriv og forklar grafen med din biologiske viden.
- c) Beskriv og forklar grafen med din matematiske viden, dvs. ved hjælp af matematiske begreber.
- d) Hvilke sammenhænge og forskelle er der i de to sidste svar?

### 2.8 Komprimering af data

I krydsfeltet mellem biologi og matematik vil der ofte opstå et behov for at komprimere data, så vi kan fokusere på datamaterialets niveau i stedet for datamateriales spredning. Til det kan anvendes dele af den beskrivende statistik (se kapitel 2 i *Hvad er matematik?*).

I øvelse 13.5 undersøgte du gærcellernes aktivitet som funktion af tiden ved forskellige temperaturer. I dette afsnit skal du arbejde med at komprimere datamaterialet på forskellige måder.

#### Øvelse 13.6

Vi arbejder i denne øvelse videre med datamaterialet fra afsnit 2.6.

- a) Bestem boblernes middeltal for hver temperatur.
- b) Afbild derefter boblernes middeltal som funktion af temperatur i et passende koordinatsystem. Overvej følgende:
  - a. I hvilke intervaller løber værdierne for de to variable?
  - b. Hvad er definitionsmængden?
  - c. Hvad er maksimum og minimum?
  - d. Hvor mange kvadranter er relevante at have med i den grafiske fremstilling?
  - e. Hvilken enhed har du på x-aksen og på y-aksen? Hvorfor?
- c) Beskriv og forklar grafen med din biologiske viden.
- d) Beskriv og forklar grafen med din matematiske viden, dvs. ved hjælp af matematiske begreber. Følgende begreber SKAL overvejes og indgå:
  - a. Uafhængig/ afhængig variabel
  - b. Definitionsmængde
  - c. Voksende/ aftagende
  - d. Globalt /lokalt maksimum/minimum

Få dit værktøjsprogram til at lave lineær regression (tendenslinjen) på datamaterialet i intervallet fra 10° til 40° og tegn grafen.

- e) Ligger grafen tilfredsstillende i forhold til de virkelige målepunkter?
- f) Kunne andre matematiske modeller være relevante? Hvilke?

Supplerende spørgsmål, hvis man har gennemgået andre vækstmodeller end den lineære:

Få dit værktøjsprogram til at lave andre regressioner.

- g) Diskuter hvilken model, der passer bedst.
- h) Sammenhold din biologiske og matematiske beskrivelse af grafen: Hvordan bidrager hvert af fagene?

### Øvelse 13.7 (især for B- og A-niveau)

- a) For hver temperatur i datamaterialet skal du bestemme det udvidede kvartilsæt (dvs. de fem karakteristiske værdier: største og mindsteværdi, øvre og nedre kvartil samt median).
- b) Fremstil i et passende koordinatsystem serien af bokspot, der fremkommer på baggrund af de udvidede kvartilsæt for hver temperatur. Indsæt også middeltallene for hver temperatur i den grafiske fremstilling.
- c) Hvilken forskel er der på grafen fremstillet i øvelse 13.5 og 13.6?
- d) Hvad fortæller de hver især om datamaterialet?
- e) Hvilken graf er efter din vurdering bedst egnet til at præsentere og vurdere datamaterialet ud fra?

### Øvelse 13.8 – diskussionsøvelse

Sammenhold øvelse 13.5 og 13.6 (og evt. 13.7) i en diskussion om følgende punkter, hvor det er nødvendigt at inddrage begge dine fag/lærere:

- a) Hvordan ser "rådata" ud i forhold til komprimerede data – hvilke informationer giver det ene og det andet datasæt?
- b) Hvad mister/skjuler vi ved at komprimere data?

- c) Diskuter anvendelsen af matematiske modeller i praksis, inddrag herunder de biologiske forklaringer.

## 13.2.1 Variabelsammenhænge og doping

### 2.9 Variabelsammenhænge og doping

I forbindelse med et tema om motion i biologi arbejdes ofte med doping. Det kan være doping med EPO, der fremmer iltoptagelsen og dermed udholdenhed, og det kan være doping med anabole steroider, der fremmer muskelstyrken. Du kan læse om doping i biologibøger, i artikler som Hæmatokrit -hvad er det? af Bengt Saltin, professor ved Rigshospitalet, som du kan finde [her](#), og på nettet i øvrigt.

I den næste øvelse undersøges effekten af EPO på den maksimale  $O_2$ -optagelse.

#### Øvelse 13.9

12 testpersoner fik målt deres maksimale  $O_2$ -optagelse før og efter en kur med EPO. Testen foregik som en cykeltest, hvor testpersonerne kørte på ergometercykel med kendte belastninger. Resultaterne ses herunder og findes som regneark [her](#).

Max $O_2$ -optagelse, L pr min. Før EPO-kur	Max $O_2$ -optagelse, L pr min. Efter EPO-kur
3,5	3,7
4	4,3
4,1	4,5
4,2	4,5
4,2	4,7
4,3	4,5
4,5	4,7
4,6	4,9
4,8	5,1
5	5,2
5,4	5,5
5,4	5,4

- a) Hvilke variable indgår i denne test?
- b) Hvilken variabel er den afhængige, og hvilken er den uafhængige?
- c) Giv forslag til, hvordan der kan udføres kontrolforsøg.
- d) Beregn ud fra datamaterialet den procentvise forøgelse af effekten af EPO for hver testperson, og beregn middeltallet og medianen.
- e) Fremstil et passende diagram over den procentvise forøgelse af effekten af EPO. Kommenter fordelingen og inddrag herunder middeltal og median.
- f) Afbild effekten af EPO ved at indsætte max  $O_2$ -optagelse efter EPO-kur som funktion af max  $O_2$ -optagelse før EPO-kur i et passende koordinatsystem. Overvej følgende:
  - a. I hvilke intervaller ligger værdierne for de to variable?
  - b. Hvad er definitionsområdet?
  - c. Hvad er minimum?
  - d. Hvad er maksimum?
  - e. Hvilken enhed har du på x-aksen og på y-aksen? Hvorfor?
- g) Kan du finde formeludtryk for grafen eller dele af grafen? I så fald hvordan?
- h) Indsæt grafen for  $y = x$  i samme koordinatsystem og sammenligning med grafen fremstillet i punkt g).
  - a. Beskriv og forklar graferne med din biologiske viden.
  - b. Beskriv og forklar graferne med din matematiske viden, dvs. ved hjælp af matematiske begreber.
  - c. Hvilke sammenhænge og forskelle er der i de to sidste svar?



- i) Konkluder på baggrund af en sammenhængende beskrivelse og forklaring af grafen med viden fra begge fag, hvilken effekt EPO har på max  $O_2$ -optagelse.

## 13.3 Beskrivende statistik – Gymnasieelevers sundhedstilstand

### 3.1 Indledning

I dette afsnit tager vi udgangspunkt i en problemstilling i biologi og beskrivende statistik (den deskriptive) i matematik.

Det biologiske indhold i dette afsnit handler om menneskets fysiologi - kredsløb, kost, motion og livsstil, som du kan læse om i biologibøger, artikler eller på nettet.

Ved hjælp af den beskrivende statistik vil vi beskrive og behandle kvantitative data, vi har indhentet og indsamlet i biologi samt drage konklusioner i forhold til problemstillingen. Du skal kunne fremstille dine data på en overskuelig og bearbejdet måde, så andre kan forstå og fortolke dem.

I biologi anvender vi ofte den beskrivende statistik til at kvalificere vores vurdering af et eksperiments resultater, dvs. til at afgøre, om vi kan bekræfte eller afkræfte vores hypotese i biologi. En egentlig statistisk test af en hypotese bliver præsenteret i afsnit 4 om den bekræftende statistik.

### 3.2 Problemstilling

I en studieretningsklasse med matematik, biologi og samfundsfag som studieretningsfag besluttede eleverne og lærerne at beskæftige sig med emnet Gymnasieelevers sundhedstilstand i Danmark.

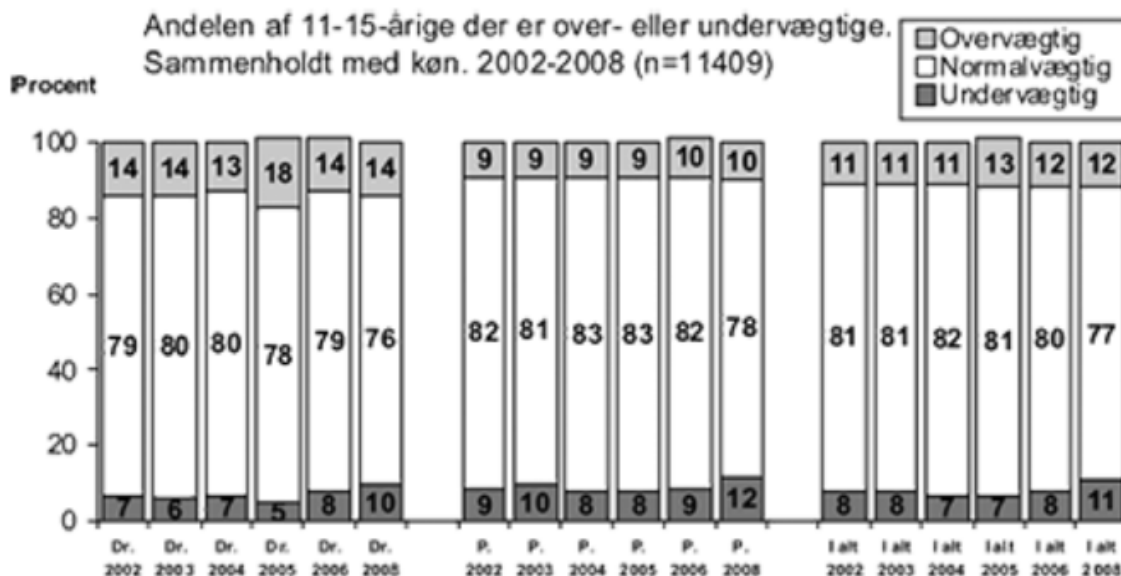
Eleverne blev præsenteret for en temarapport om Børn og overvægt udarbejdet af Sundhedsstyrelsen 2010. Rapporten kan du finde [her](#).

Rapporten tager afsæt i resultater fra en undersøgelse af 11-15-åriges livsstil og sundhedsvaner. Undersøgelserne er gennemført i perioden 1997 til 2008. Af resultaterne fremgår det blandt andet, at 14 % af de 11-15 årige drenge var overvægtige, mens kun 10 % af pigerne i samme aldersgruppe var overvægtige.

For at beregne børnenes grad af over- eller undervægt benyttede man Body Mass Index, BMI. BMI beregnes ud fra formlen:

$$BMI = \frac{\text{vægt i kg}}{(\text{højde i m})^2}$$

Eleverne i studieretningsklassen blev præsenteret for denne figur, der viser fordelingen af over- og undervægt blandt de 11- 15-årige.



Figuren viser andelen af over- og undervægtige blandt de undersøgte 11-15-årige.

Eleverne blev stillet følgende opgave: Hvilke spørgsmål giver figuren anledning til at stille omkring unges sundhedstilstand, og hvilke undersøgelser vil I foretage i jeres klasse med henblik på at afdække en eller flere faktoreres betydning for jeres sundhedstilstand?

**Øvelse 13.10**

Prøv at besvare opgaven, eleverne fik stillet.

### 3.3 Hypotesen

Eleverne besluttede at foretage forskellige fysiologiske målinger. De ville måle deres højde, vægt, hoft- og taljemål, puls i hvile og efter arbejde, blodtryk og muskelstyrken i hænderne.

Inden de foretog målingerne, opstillede de blandt andre følgende hypotese:

$H_0$ : Vi forventer, at middeltallet for drengenes BMI og middeltallet for pigernes BMI er ens i vores klasse.

### 3.4 Metodiske overvejelser

Allerede her skulle klassen foretage et par metodiske overvejelser i forbindelse med hypotesen: *Hvad var det, klassen gerne ville undersøge – og hvad var det så, der kunne undersøges med den beskrivende statistik? Hvilke variable indgik?*

Eleverne ville overordnet set gerne undersøge noget om gymnasieelevers sundhedstilstand i Danmark. De valgte at arbejde med en specifik måling, BMI, og inspireret af eksisterende data i sundhedsstyrelsens undersøgelse opstillede de en hypotese om BMI i klassen. Da eleverne af praktiske årsager havde svært ved at undersøge alle gymnasieelever i hele Danmark for at se, hvordan deres sundhedstilstand var i forhold til de 11-15 årige i undersøgelsen, valgte de at opstille en hypotese, der vedrørte et udsnit af danske gymnasieelever.

I dette eksempel udgør eleverne i klassen det, vi vil kalde stikprøven, og alle gymnasieelever i Danmark udgør det, vi kalder den sande population med hensyn til den biologiske egenskab, de ønskede at undersøge.

I hypotesen i eksemplet indgår den kategoriske variabel køn (dreng/pige) og den numeriske variabel BMI. Den statistiske deskriptor, de ville anvende for at sige noget om niveauet af BMI hos henholdsvis piger og drenge, er middeltallet. Men de vælger også at udregne medianen, fordi en sammenligning af median og middeltal kan sige noget karakteristisk om fordelingen af datamaterialet.

### 3.5 Resultaterne

Resultaterne af klassens målinger blev indtastet i et regneark, og kan hentes frem [her](#).

### 3.6 Bearbejdning af data

I det følgende skal du bearbejde datamaterialet, der er præsenteret i afsnit 3.5, så du kan kvalificere og vurdere elevernes hypotese præsenteret i afsnit 3.3.

#### Øvelse 13.11

- a) Udregn BMI for alle piger og drenge.
- b) Sorter data efter den kategoriske variabel køn.
- c) Sorter både drengene og pigerne efter størrelsen på BMI.
- d) Frembring et prikdiagram over BMI for både piger og drenge.
- e) Bestem middeltallet for pigernes BMI.
- f) Bestem middeltallet for drengenes BMI.
- g) Bestem medianen for pigernes BMI.
- h) Bestem medianen for drengenes BMI.
- i) Kan eleverne af- eller bekræfte deres hypotese i biologi?
- j) Hvad fortæller din databearbejdning om niveauet for drengenes og pigernes BMI?
- k) Sammenlign median og middeltal inden for hver af de to grupper. Hvad siger dette om fordelingen af data for hvert af de to køn.
- l) Kunne deres hypotese have været formuleret anderledes? I givet fald hvordan?

### Øvelse 13.12

- a) Opstil to forskellige hypoteser, som du kan undersøge ud fra resultaterne i tabellen fra afsnit 3.5, og som forholder sig til spredning af BMI.
- b) Udvælg og behandl de relevante datasæt – præsenter dem fx i et boksplot.
- c) Beskriv og forklar din grafiske fremstilling. Du kan evt. hente inspiration fra grundbogens tilsvarende afsnit om sammenligning af boksplot.
- d) Forhold dig til dine opstillede hypoteser.

### Øvelse 13.13

- a) Opstil endnu en hypotese. Hypotesen kan enten tage udgangspunkt i resultatet af din undersøgelse fra øvelsen, du lige har udført, eller omhandle en fysiologisk faktor, der ikke er registreret i tabellen fra afsnit 3.5.
- b) Design et eksperiment, du kan udføre i biologi, og som giver dig mulighed for at teste din hypotese. Husk at overveje variabelsammenhænge og kontrolforsøg.
- c) Skriv en materialeliste.
- d) Beskriv din fremgangsmåde.
- e) Udfør eksperimentet.
- f) Opsaml dine data og foretag efterfølgende databehandling.
- g) Præsenter resultaterne i relevant layout.
- h) Forklar resultaterne med anvendelse af din faglige viden i både matematik og biologi.
- i) Forhold dig til din hypotese.

# Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi  
Af Anne Krarup og Mette Vedel

  
Uddannelse  
EGMONT

## 13.4 Beskrivende statistik – rygning, blodtyper og $\chi^2$ -test

### 4.1 Indledning - rygning

I dette afsnit tager vi igen udgangspunkt i en biologisk problemstilling og den bekræftende statistik, der er gennemgået i kapitel 9 i Hvad er matematik? Den bekræftende statistik er nødvendig, fordi du skal kunne argumentere for *pålideligheden* af de konklusioner, du kommer frem til på baggrund af en *hypotese* formuleret i biologi. Den bekræftende statistik kan ikke bevise en hypotese, men *sandsynliggøre* (verificere) en hypotese eller *afkræfte* (falsificere) den.

I biologi arbejdes der ofte med tre typer af statistiske problemer, hvor der kan benyttes en  $\chi^2$ -test vedrørende kategoriske variable repræsenteret i antalstabeller. Problemtypen afhænger af den hypotese, der ønskes testet i biologi og dermed antallet af stikprøver, der er involveret. I nedenstående tabel er problemtyperne inddelt efter antallet af stikprøver, der indgår i det biologiske eksperiment eller dataindsamling.

Antal stikprøver	Problem
Én stikprøve	Vi ønsker at sammenligne en stikprøve med en forventet fordeling, dvs. en observeret antalsfordeling med en teoretisk antalsfordeling.
To stikprøver	Vi ønsker at sammenligne to forskellige stikprøver med hinanden for at undersøge, om de har samme fordeling, givet stikprøverne er uafhængige.
Tre stikprøver	Vi ønsker at undersøge flere end to forskellige stikprøver for at se, om de følger den samme fordeling, givet stikprøverne er uafhængige.

### Øvelse 13.14

Sammenlign de tre typer af statistiske problemer med de to typer af  $\chi^2$ -test, der er gennemgået i kapitel 9 i Hvad er matematik?. Overvej for hver type af problem i tabellen, hvilken type  $\chi^2$ -test, der er tale om.

## 13.4.2 Rygning og sundhed

I studieretningsklassen med matematik, biologi og samfundsfag (se forrige afsnit) stødte eleverne i rapporten *Undersøgelse af 11-15-åriges livsstil og sundhedsvaner 1997 - 2008 på emnet rygning*. Hele rapporten kan findes [her](#).

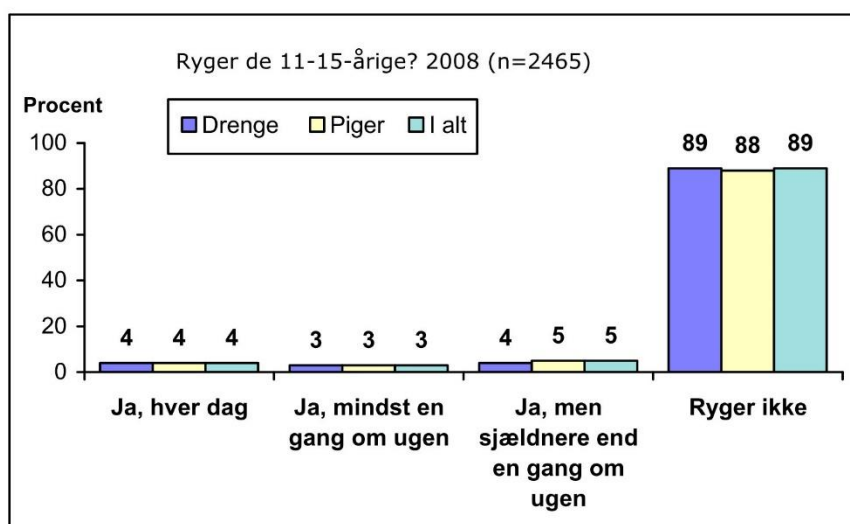
I rapporten kunne eleverne læse, at 2465 børn i alderen 11-15 år i 2008 var blevet spurgt, om de var ikke-rygere, lejlighedsviserygere eller dagligrygere. Af rapporten fremgår, at 89 % var ikke-rygere, og 11 % var rygere. Af de 11 %, der var rygere, røg 4 % dagligt, 3 % en gang om ugen og 5 % sjældnere end en gang om ugen.

Sundhedsstyrelsen



UNDERSØGELSE AF 11-15-ÅRIGES  
LIVSSTIL OG SUNDHEDSVANER  
1997 - 2008

2010



Eleverne i klassen ønskede herefter at undersøge, hvordan det så ud på deres eget gymnasium i forhold til denne undersøgelse. Rygning påvirker en række fysiologiske forhold bl.a. konditallet. Den biologiske teori vedr. rusmidler, herunder tobak og nikotin kan findes i diverse biologibøger eller på internettet.

Eleverne opstillede følgende to spørgsmål for at indkredse problemstillingen:

- Hvordan påvirker rygning den generelle sundhedstilstand?
- Ryger gymnasieelever mere, lige så meget eller mindre end de 11-15 årige, der er beskrevet i rapporten?

Problemstillingen kræver, at eleverne sammenligner to stikprøver:

- 1) De 11-15 årige i rapporten
- 2) Deres egen 1.g årgang på gymnasiet.



### 4.3 Hypotesen

Eleverne genkendte problemstillingen som en type 2 problemstilling, dvs. en  $\chi^2$ -test for to uafhængige stikprøver og opstillede følgende *nulhypotese*:

*H<sub>0</sub>: Der er ingen forskel på 1.g årgangen og de 11-15-årige mht. fordelingen af ikke-rygere, lejlighedsvisse rygere og dagligrygere.*

Samtidig formulerede de den alternative hypotese:

*H<sub>A</sub>: Der er forskel 1.g-årgangen og de 11-15-årige mht. fordelingen af ikke-rygere, lejlighedsvisse rygere og dagligrygere.*

Bemærk, at nulhypotesen er mere præcis end den alternative hypotese. Nulhypotesen siger, at de to stikprøver har en ens fordeling af ikke-rygere, lejlighedsvisse rygere og dagligrygere, hvor alternativ hypotesen blot siger, at der er en forskel mellem de to stikprøver, men ikke hvilken forskel.

### 4.4 Metodiske overvejelser

Inden eleverne gik i gang med dataindsamlingen og deres hypotesetest, gjorde de sig nogle metodiske overvejelser i forbindelse med hypotesen. De undersøgte om følgende forudsætninger for at udføre  $\chi^2$ -testen for to uafhængige stikprøver var opfyldt:

- 1) Data skal være stokastisk uafhængige, dvs. sandsynligheden for udfaldet af hver enkelt af observationerne er uafhængige af tidligere observationer.
- 2) Data skal være i form af kategoriske variable, dvs. data der kan indplaceres i kategorier, der er veldefinerede. Eksempler på kategoriske variable fra biologi er fx håndethed (venstre, højre), køn (mand, kvinde), øjenfarve (blå, brun, grøn), træning (ja, nej), farve på blomster (røde, hvide, lyserøde).
- 3) Der skal være to (fx køn) eller flere kategorier (fx blomsterfarve) for den kategoriske variabel, du vil undersøge.

#### Øvelse 13.15

Tjek om forudsætningerne i eksemplet med rygevaner er opfyldt:

- a) Er data stokastisk uafhængige?
- b) Er der tale om kategoriske variable? Hvilke?

c) Hvor mange kategorier indgår?

## 4.5 Valg af signifikansniveau

I biologi bruges i praksis et af de følgende tre signifikansniveauer, der bruges til at vurdere om nulhypotesen skal bekræftes (er sandsynlig) eller afkræftes (er usandsynlig):

0,1 % -niveauet: Nulhypotesen er særdeles upålidelig.

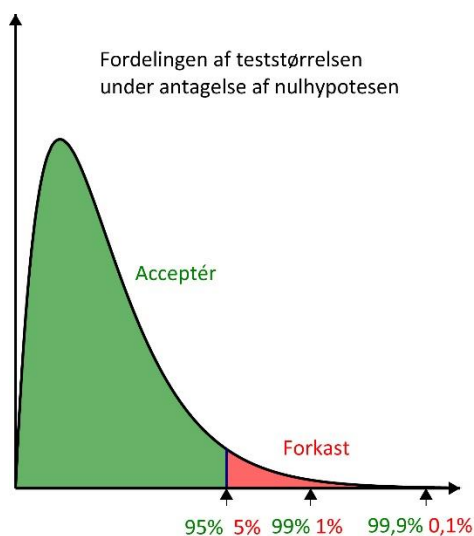
1 % -niveauet: Nulhypotesen er meget upålidelig.

5 % -niveauet: Nulhypotesen er ret upålidelig.

Vælges et meget lille signifikansniveau, er det meget svært at forkaste en nulhypotese. I dette tilfælde vil vi derfor meget sjældent forkaste en nulhypotese, der faktisk er sand. Det betyder omvendt, at vi ofte vil acceptere en nulhypotese, selv om den faktisk er forkert.

Vælges et højt signifikansniveau er situationen omvendt.

Valget af signifikansniveau afhænger derfor af situationen og formuleringen af nulhypotesen.



Eleverne valgte et signifikansniveau på 5 %.

**4.6 Dataindsamling**

Eleverne i studieretningsklassen udarbejdede et spørgeskema til alle 1.g-eleverne på deres gymnasium, og resultatet kan du se herunder:

Stikprøve	Ikke-rygere	Lejlighedsvis rygere. Sjældnere end 1 gang om ugen	Lejlighedsvis rygere. 1 gang om ugen	Dagligrygere	SUM
1.g årgangen	174	42	65	31	312

**4.7 Databearbejdning**

I øvelse 13.16 og 13.17 skal du bearbejde datamaterialet, der indgår i afsnit 4.2 og 4,6, så du kan kvalificere og vurdere elevernes hypotese præsenteret i afsnit 4.3.

**Øvelse 13.16 – udregning af teststørrelsen**

- Oversæt procenttallene for de 11-15-årige (afsnit 4.2) til rimelige hele antal.
- Fremstil cirkeldiagrammer til visuel sammenligning af de to stikprøvers fordelinger.
- Udfyld resten af nedenstående tabel, der kan give et overblik over elevernes undersøgelse af de to stikprøver:

Stikprøve – de observerede antal	Ikke-rygere	Lejlighedsvis rygere. Sjældnere end 1 gang om ugen	Lejlighedsvis rygere. 1 gang om ugen	Dagligrygere	SUM
1.g årgangen	174	42	65	31	312
11-15-årige					2465
SUM					2777

- d) Beregn de forventede antal i henhold til nulhypotesen, og udfyld de tomme felter. Vi har demonstreret udregningen af tallet i det første felt:

Stikprøve – de forventede antal observationer	Ikke-rygere	Dagligrygere	Lejlighedsvisere. 1 gang om ugen	Lejlighedsvisere. Sjældnere end 1 gang om ugen
1.g årgangen	$\frac{312}{2777} \cdot 2367 = 265,9$			
11-15-årige				

- e) Udregn teststørrelsen  $\chi^2$ . Teststørrelsen  $\chi^2$  beregnes som summen af de relative kvadratiske afvigelser mellem det observerede og det forventede antal (se kapitel 9 i Hvad er matematik?).

#### 4.8 Konklusion på testen

Eleverne analyserede derefter deres testresultat: Store værdier af  $\chi^2$  viser, at der er betydelig forskel mellem det observerede og det forventede antal observationer, og derfor kan store værdier af  $\chi^2$  føre til forkastelse af nulhypotesen. Hvis der er fuldstændig overensstemmelse mellem det observerede og det forventede antal inden for hvert udfald, vil tælleren i brøken give nul og  $\chi^2$  derfor også give nul.

#### Øvelse 13.17 – analyse af teststørrelsen

- Hvad er antallet af frihedsgrader i testen? Forklar.
- Find ved hjælp af dit eget værktøjsprogram p-værdien ud fra den fundne  $\chi^2$ -værdi fra øvelse 13.16 samt det antal frihedsgrader, du fandt i punkt a).
- Skal elever forkaste nulhypotesen på 5%-niveauet?
- Er der skjulte variable i denne test? Hvilke?
- Forklar med almindelige ord, hvad konklusionen på testen er.
- Giv et forslag til en ny hypotese, der kunne være interessant at teste i forlængelse af denne test.

# Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi  
Af Anne Krarup og Mette Vedel

  
Uddannelse  
EGMONT

### 13.4.3 Blodtyper og $\chi^2$ -test

En anden studieretningsklasse med biologi og matematik som studieretningsfag havde også beskæftiget sig med et tema om sundhed i biologi. I den forbindelse var de stødt på en udtalelse om, at man skal spise efter sin blodtype. Du kan læse mere om dette [her](#).

En gruppe af eleverne valgte at skrive projekt om netop denne påstand.

Gennem flere år havde alle 1.g klasser i biologi på C-niveau på gymnasiet fået testet deres blodtype. Resultaterne fra elevernes undersøgelse kan du se af nedenstående skema:

Blodtype	A rh +	A rh -	B rh +	B rh -	O rh +	O rh -	AB rh +	AB rh -	I alt
Antal	11	83	19	22	35	42	11	2	225

Som en del af projektet ville gruppen gerne anvende en hypotesetest til at sammenligne blodtypefordelingen for deres 1.g årgang med blodtypefordelingen i den samlede befolkning i Danmark. Denne kan man fx finde på hjemmesiden for givblod.dk. Du kan hente den her, hvor man også kan læse, hvad der karakteriserer de forskellige blodtyper.

#### Øvelse 13.18

- Opstil en nulhypotese, der passer til det, eleverne ville undersøge.
- Opstil den alternative hypotese.
- Hvor mange stikprøver har gruppen.
- Vurder, hvilken type problem dette svarer til.
- Vælg et signifikansniveau.
- Opstil en passende tabel, der kan benyttes til at lave en  $\chi^2$ -testaf hypotesen.
- Udregn teststørrelsen  $\chi^2$ .
- Hvad bliver konklusionen på testen.

#### Spis efter din blodtype - blodtypekost



Efter: Dr. Peter D'Adamo og Cathrine Whitney Læge Knut T. Flyde

##### Blodtype 0

bør fx. spise kød, men ikke hvide og visse grønne, og dyrke aktiv motion.  
Hvis blodtype 0 ikke spiser den rigtige kost, er der bl.a. risiko for infektionssygdomme og mavesår.

##### Blodtype A

bør være vegetar, dyrke blid motion som yoga og golf. Blodtype A har øget risiko for kræft og hjertekarsygdomme, hvis de ikke spiser kost til blodtypen.

##### Blodtype B

bør spise varieret og er den eneste blodtype, der tåler mælkeprodukter godt. Bør dyrke moderat sport. Blodtype B kan få langsomt-voksende virus sygdomme, som angriber nervesystemet, hvis blodtype-kosten ikke overholdes.

##### Blodtype AB

har stærke og svage sider fra blodtype A og B, og trives bedst på afspændingsøvelser. Blodtype AB har det mest tolerante immunsystem af alle blodtyper.

- i) Kommenter resultatet ved hjælp af begge fag.

**Øvelse 13.19**

- a) Opstil endnu en nulhypotese og den alternative, der omhandler to stikprøver eller flere stikprøver. Hypotesen skal tage udgangspunkt i resultatet af forrige øvelse, du lige har udført og skal kunne testes ved hjælp af en  $\chi^2$ -test
- b) Design et eksperiment, du kan udføre i biologi, og som giver dig mulighed for at teste din hypotese. Husk at overveje variabelsammenhænge og kontrolforsøg.
- c) Vælg et signifikansniveau.
- d) Skriv en materialeliste.
- e) Beskriv din fremgangsmåde.
- f) Udfør eksperimentet.
- g) Opsaml dine data og foretag efterfølgende databehandling.
- h) Præsenter resultaterne i relevant layout.
- i) Udregn teststørrelsen  $\chi^2$
- j) Forklar resultaterne med anvendelse af din faglige viden i både matematik og biologi.
- k) Forhold dig til din hypotese.

## 13.5 Metoder i et projektsamarbejde mellem biologi og matematik

I dette afsnit vil vi opsamle metoder, der ofte benyttes i et samarbejde mellem matematik og biologi. Når du skal i gang med et selvvalgt projekt indenfor begge fag, kan du benytte fremgangsmåden, der præsenteres i nedenstående skematiske oversigt. Rækkefølgen af de enkelte punkter kan variere alt efter hvilke problemstillinger, der skal undersøges.

Tværfaglig metode Matematik-Biologi	Indhold
Emne	Beskrivelse af det emne, du gerne vil beskæftige dig med i biologi
Observation	Beskrivelse af den observation, du har gjort dig i forhold til emnet
Formulering af problemstilling	Din observation skal formuleres som en problemstilling En god problemstilling kræver anvendelse af matematik
Opstilling af hypotese	Problemstillingen skal formuleres som en konkret hypotese, der kan testes eksperimentelt og ved hjælp af matematik
Kvalitetstjek af hypotese	Hvilke og hvor mange variable indgår? Overvej hvilke variable, der er de afhængige og hvilke, der er uafhængige. Hvad er årsag, og hvad er virkning? Kan der laves et kontrolleret eksperiment i biologi?
Valg af matematisk metode/statistik	Hvilken matematisk vækstmodel, geometrisk model eller statistisk model skal du anvende for at sandsynliggøre din hypotese? Hvorfor?
Design af eksperiment/valg af data	Hvordan vil du lave eksperimentet? Hvilke materialer og metoder i biologi og matematik skal anvendes? Hvilke typer af data skal du bruge/kan du indhente?
Udførelse af eksperiment/indsamling af data	Du skal udføre eksperimentet i laboratoriet, i felten eller finde de relevante data
Databehandling/anvendelse af matematikken	Du skal nu foretage beregninger, lave tabeller, tegne grafer eller andre relevante anvendelser af matematik
Konklusion	Giver dine resultater anledning til at forkaste eller til at acceptere hypotesen



Opfølgning: En tværfaglig rapport	Skriv alle dine overvejelser og argumenter ned i en matematik-biologi studieretningsrapport (se næste afsnit)
-----------------------------------	---

## 13.6 Opbygning af en matematik-biologi studieretningsrapport

Når du skal skrive en studieretningsrapport i matematik-biologi, kan du bruge følgende disposition:

Disposition	Indhold	Uddybende kommentarer
Forside	Titel Navn Dato og årstal Gymnasium Fag og niveau	Titlen skal afspejle, at rapporten omhandler et samarbejde mellem biologi og matematik
Indledning	Introduktion til emne Præsentation af problemstilling Hvorfor er matematikken nødvendig?	Emnet og problemstillingen kommer oftest fra biologi, men du skal skrive, hvorfor matematikken er nødvendig at have med i forhold til problemstillingen
Hypotese	Hypotese	Præsentation af den hypotese, du ønsker at undersøge
Teori	Biologisk teori Matematisk teori	Her skal du omtale/beskrive det relevante biologiske og matematiske kernestof/supplerende stof
Metode	Materialer Fremgangsmåde/eksperimentelt design Valg af matematisk/statistisk model Valg af data Variabelkontrol	Beskriv alle materialer og din fremgangsmåde, så en anden i klassen kunne bruge det som en opskrift. Skriv, hvilken matematisk vækstmodel, geometrisk model eller statistisk model fra matematik du anvender og argumenter for, at du netop har valgt den. Beskriv, hvilken type data du indsamler, og hvordan der er foretaget variabelkontrol

Resultater	Tabeller Grafer Særlige layout	Indsæt de relevante repræsentationsformer, der præsenterer dine resultater på den mest overskuelige og informative måde
Diskussion	Resultater i forhold til teori og hypotese Anvendelse af matematiske modeller/statistik i praksis	Hold dine resultater op mod teorien og hypotesen – stemmer det overens? Hvorfor? Hvorfor ikke? Fejkilder? Måleusikkerhed? Dataindsamlingens pålidelighed? I en diskussion kan du også formulere nye spørgsmål, der kunne være interessante at undersøge
Konklusion	Hypotesen accepteres eller forkastes	Kan du med dine resultater acceptere eller forkaste hypotesen
Litteratur	Litteraturliste	Den litteratur, hjemmesider mm du har anvendt
Underskrift	Din underskrift	Du skriver under på, at du har lavet rapporten og den er færdig

**Praxis: Skriv i et matematikprogram på pc**

Hvis du anvender et værktøjsprogram som fx Maple eller TI-interactive/TI-Nspire CAS kan det være en idé at skrive rapporten i dette. På denne måde får du lettere integreret de matematiske dele og tankegange i rapporten.

## 13.7 Eksamensopgaver – kvalificering af de skriftlige besvarelser i begge fag

I dette afsnit vil du blive præsenteret for eksempler på eksamensopgaver i henh. matematik og biologi for at vise, hvordan din viden i både biologi og matematik kan gøre dine besvarelser af skriftlige opgaver bedre.

### 7.1 Bedømmelse af den skriftlige eksamen i matematik

Til skriftlig eksamen i matematik på B-niveau og A-niveau indeholder alle opgavesæt en indledning, der beskriver og uddyber bedømmelseskriterierne ud fra fem kategorier:

#### Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene, der er beskrevet i følgende fem kategorier:

#### 1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

#### 2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

#### 3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

#### 4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

### 5. KONKLUSION

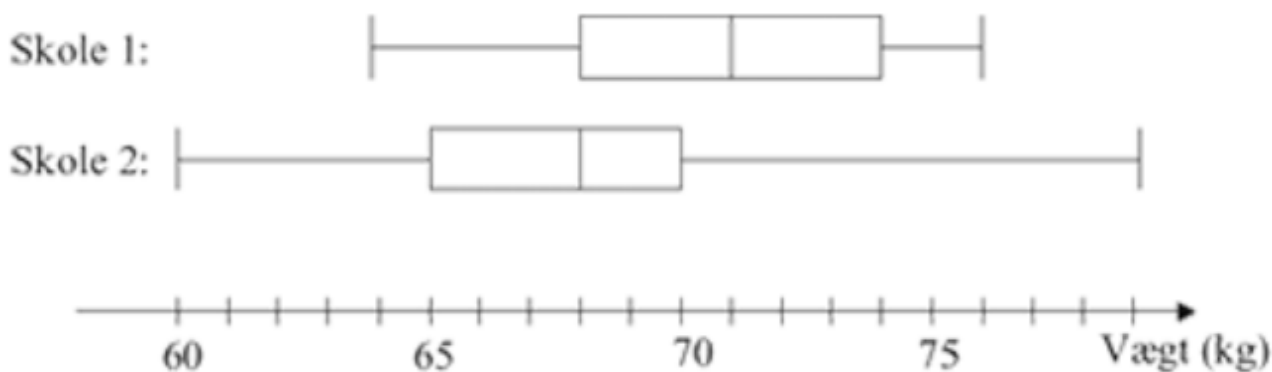
Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation. Når du skriver en biologirapport eller svarer på en eksamensopgave i biologi, vil du typisk skrive en sammenhængende tekst, der besvarer et konkret spørgsmål eller beskriver en fremgangsmåde. I nedenstående øvelse skal du besvare en matematikopgave ved brug af biologien og ovenstående fem punkter.

## 13.7.1 Øvelse: Eksamensopgave i matematik

Dette er en eksamensopgave fra skriftlig eksamen i matematik B. Du skal udarbejde en skriftlig besvarelse af opgaven med anvendelse af både biologi og matematik. Hvis ikke du allerede har læst om kropsvægt i biologi, kan du få brug for at læse om det i en biologibog. Efter opgaveteksten guides du igennem forskellige overvejelser i form af spørgsmål.

### Opgave 12

I en by har man undersøgt vægten af drenge i to klasser på to forskellige ungdomsuddannelser. Undersøgelsens resultat fremgår af følgende boksplot:



- a) Sammenlign de to klassers vægtfordeling ud fra de to boksplot ved at inddrage kvartilsættene.

### Trin for trin

#### 1. Tekst

- Hvad har de undersøgt i opgaven?
- Hvilken hypotese, der passer til undersøgelsen/opgaven, kunne du opstille i biologi?
- Hvilke variable indgår?
- Hvad skal du svare på i spørgsmålet? Hvad skal du bruge af matematik for at svare på spørgsmålet?
- Hvad kunne du uddybe med i biologi for at svare på spørgsmålet?

## 2. Notation og Layout

- a) Beskriv layoutet i et boksploot.
- b) Hvilken matematisk notation indgår i spørgsmålet?
- c) Hvordan vil du anføre kvartilsættet med en anden matematisk notation?

## 3. Redegørelse og dokumentation

- a) Forklar hvordan boksplottet i figuren kan være fremkommet:
  - a. Hvordan kan det eksperimentelle design have været i undersøgelsen?
  - b. Hvilke materialer har de brugt?
  - c. Hvordan kan deres resultattabel have set ud?
  - d. Hvordan har de bestemt kvartilsættet og derefter lavet boksplottet?

## 4. Figurer

- a) Beskriv hvordan du vil bruge figuren med de to boksploot – hvilken information kan du finde i figuren?
- b) Hvilke andre figurer kunne også være en del af opgaven? Hvorfor er de ikke med?

## 5. Konklusion

- a) Hvad er konklusionen, dvs. svaret på spørgsmålet? Hvilke forskelle er der på de to klasser og hvorfor? Hvilken matematisk notation skal være med i konklusionen? Hvad kunne en biologisk forklaring på forskellen mellem de to klasser være?

## 6. Refleksion

- a) Se dine svar på spørgsmål 1-5 igennem og overvej, hvilke dele du ville tage med, hvis det kun skulle være en besvarelse i matematik.
- b) Hvad har du lært ved at arbejde med opgaven på denne måde?

Fremgangsmåden kan anvendes i andre tilfælde, hvor du skal besvare lignende opgaver.

# Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi  
Af Anne Krarup og Mette Vedel

  
Uddannelse  
EGMONT

## 13.7.2 Eksamensopgave i biologi

Dette er en del af en skriftlig eksamensopgave i biologi på A-niveau fra 28. maj 2010. Opgaven handler om gæring, som du måske kan få brug for at læse om i en biologibog.

Du skal besvare de tre delspørgsmål i opgaven med anvendelse af både biologi og matematik:

### Opgave 2. Gæring

I et eksperiment til påvisning af gæringsprocessen anvendes en opstilling, som vist på figur 1. Kolben indeholder 20 g glucose opløst i 175 mL vand og tilsat 10 g bagegær.

Kolben placeres ved stuetemperatur og vejes jævnligt. Resultaterne fremgår af figur 2.

Tid (timer)	Vægt (g)	Akkumuleret vægttab (g)
0,0	360,74	0,00
1,0	360,74	0,00
2,0	360,27	0,47
3,0	359,81	0,93
4,0	359,18	1,56
5,0	359,01	1,73
6,0	358,24	2,5
7,0	357,14	3,6
8,0	356,67	4,07
9,0	355,95	4,79
10,0	353,80	6,94
11,0	353,51	7,23
21,5	353,43	7,31
24	353,40	7,34
25	353,38	7,36
26,5	353,35	7,39
27,5	353,35	7,39
28,5	353,31	7,43

Figur 2. Resultaterne af eksperimentet



Figur 1

1. Giv forslag til et kontrollforsøg til ovennævnte eksperiment.

Begrund dit svar.

2. Afbild resultaterne grafisk med akkumuleret vægttab som funktion af tiden.

Anvend regneark eller millimeterpapir.

3. Forklar din graf.

Tabellen kan findes i et regneark [her](#).



## Trin for trin

### 1. Tekst

- a) Hvad har de undersøgt i opgaven?
- b) Opstil en hypotese i biologi, der passer til undersøgelsen.
- c) Hvad er fremgangsmåden i undersøgelsen?
- d) Hvilke materialer har de brugt?

### 2. Resultaterne

- a) Hvilke variable indgår i forsøget? Numeriske eller kategoriske?
- b) Hvilken variabel er den uafhængige variabel? Hvilken er den afhængige variabel?
- c) Er der variabelkontrol? Hvorfor – hvorfor ikke?
- d) Hvilken sammenhæng ser der ud til at være mellem de variable, der indgår?

### 3. Graferne

- a) Besvar delspørgsmål 2 i opgaven. Lav et korrekt matematisk koordinatsystem med den uafhængige variabel på 1. akse og den afhængige variabel på 2. akse. Husk enheder på begge akser. Overvej: Hvilke værdier kan den uafhængige variabel antage? Hvilke værdier kan den afhængige antage?
- b) Beskriv hvordan grafen ser ud med ord.
- c) Opdel grafen i passende intervaller efter dens udseende – dvs. bestem og opskriv i hvilke intervaller grafen er voksende, aftagende eller konstant?
- d) For hvert interval, fundet i punkt c, skal du prøve at vurdere hvilken type vækst, der kan være tale om. Lav en passende regression på dit værktøjsprogram. Sammenlign og vurder forklaringsgraden for de forskellige modeller i hvert interval.
- e) For hvert monotoninterval skal du give en biologisk forklaring på, hvorfor grafen ser ud, som den gør.

### 4. Refleksion

- a) Læs dine besvarelser af spørgsmål 1-3 og overvej, hvad du vil tage med i en besvarelse af eksamensopgaven i biologi.
- b) Hvad har du lært ved at arbejde med opgaven på denne måde?

## Hvad er matematik? 1

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 13: Fagligt samarbejde – matematik og biologi

Af Anne Krarup og Mette Vedel

  
Uddannelse  
EGMONT

Fremgangsmåden kan anvendes i andre tilfælde, hvor du skal besvare lignende opgaver.