Studieretningskapitel

Hvad er matematik? 1

Grundbog

Kapitel 11
Matematik og Fysik

Michael Olesen
Dorthe Agerkvist

Lindhardt og Ringhof

Hvad er matematik? 1
ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Kapitel 11 – Matematik og Fysik

Indholdsfortegnelse

ISBN 9788770668279

11. Fagligt samarbejde matematik of fysik

Fagene matematik og fysik har meget til fælles og har nemt ved at finde fælles emner at samarbejde om. Da fysik i meget høj grad benytter sig af matematiske modeller, kan det i nogle tilfælde være svært at se, hvor det ene fag begynder, og det andet fag slutter. Det er der ingen overraskelse i, for siden renæssancen har udviklingen i de to fag ofte gået hånd i hånd. Eksempelvis var Newtons bidrag til udviklingen af differential- og integralregningen drevet af behovet for at kunne beskrive planeternes bevægelser. Differential- og integralregningen er det faglige hovedemne i *Hvad er matematik? B*. I moderne tid har en række faglige områder, der blev opfattet som rendyrket matematik, vist sig at være overordentlig brugbare til beskrivelse af naturen på det mest fundamentale niveau. Noget af dette vil vi berøre i *Hvad er matematik? A*.

Isaac Newton ydede også et stort bidrag indenfor optik. Bl.a. demonstrerede han som den første, at man med et prisme kunne spalte hvidt lys til et spektrum.

Før renæssancen var der ikke denne tætte forbindelse mellem udviklingen i matematik og fysik, men Galileo Galilei (1564-1642) begyndte som den første at lave den matematiske beskrivelse af fysikken, som vi kender i dag. Dette blev fulgt af andre videnskabsmænd, fx brugte Johannes Kepler (1571-1630) den matematiske teori om keglesnit til beskrivelse af planetbaner. Keglesnit var blevet beskrevet af de gamle grækere nogle hundrede år f.v.t., og var indtil Keplers tid blevet opfattet som ren matematik. Samarbejdet har for begge fag været meget frugtbart, og fagene kan hænge godt sammen, men der er dog også forskelle.

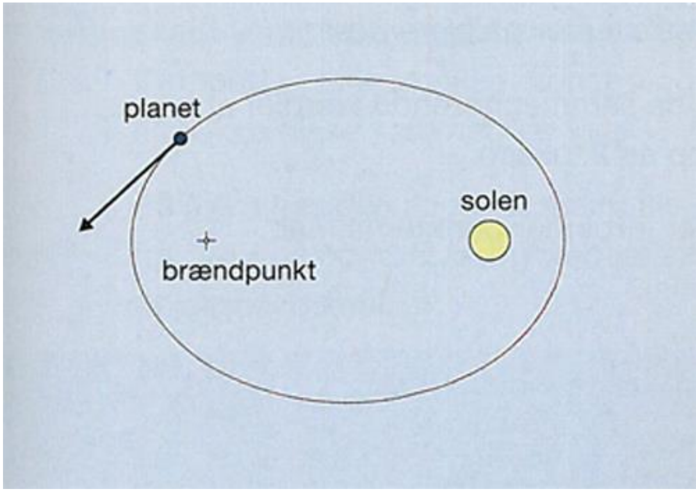
Galilei blev allerede i sin egen levetid en af de store helte i videnskabshistorien. Det skyldes både hans mange opdagelser, hans evne til at popularisere, så bredere kredse fik indtryk af, hvordan videnskaben arbejder og naturligvis kirkens proces mod ham med efterfølgende husarrest. Der opstod derfor også hurtigt mange myter om ham. En af dem er, at hans opdagelse af loven for pendul svingninger skete i domkirken i Pisa, hvor kirkens

store lysekrone blev sat i svingninger af blæsten, når dørene åbnedes. Historien er god, men der var ingen lysekrone i domkirken på den tid.

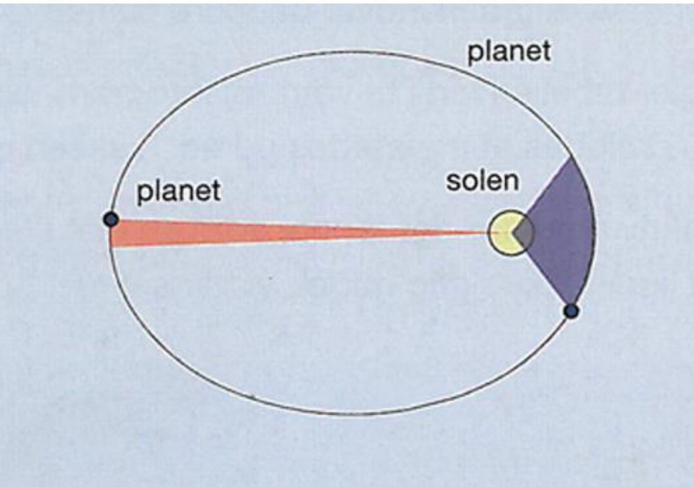
I fysik skelner man mellem *teoribaserede love* og *empiriske love*. En *empirisk lov* er alene baseret på eksperimenter og erfaring, og den er ikke en del af en større teori. Et eksempel er Hookes lov, der siger, at fjederkraften er proportional med forlængelsen af fjederen. Loven har vist sig at gælde i mange tilfælde, hvilket er efterprøvet ved gentagne eksperimenter, men den kan ikke udledes ud fra andre fysiske love. Hookes lov gælder dog også kun i et vist område; man må fx ikke forlænge fjederen for meget.

En *teoribaseret lov* er en del af en større fysisk teori og er måske udledt af andre love. Et eksempel på teoribaserede love er *Keplers tre love*. De startede godt nok som empiriske love, der alene var baseret på Tycho Brahes observationer, men man blev senere i stand til at udlede Keplers love ud fra *Newtons tyngdelov*. Så da Newton fremlagde sin tyngdelov, skiftede Keplers love status til at blive teoribaserede love, der var en del af en større teori. Den samme skelnen mellem empiriske love og teoribaserede love findes ikke i matematik.

ISBN 9788770668279



Keplers 1.lov: Planeter bevæger sig om Solen i elliptiske baner, og med Solen placeret i det ene brændpunkt.



Keplers 2. lov: Det areal, som linjen fra Solen til planeten stryger hen over i løbet af en bestemt tid, fx 1 time, er det samme, uanset hvor planeten er. For at opnå dette skal planeten bevæge sig over en længere strækning, når den befinder sig tættest på Solen, og derfor må den bevæge sig med størst hastighed netop her.

Dette kapitel er rettet mod undervisning i matematik og fysik på C-niveau, men stoffet egner sig også til klasser, der stiler mod et A- eller B-niveau i fagene. Kapitlet tager udgangspunkt i begge fags kernestof og faglige kompetencer, så et samarbejde med udgangspunkt i dele af dette materiale vil direkte kunne opfylde en del af såvel kernestof som faglige mål.

Kapitlet starter med et afsnit om udviklingen af verdensbilledet, samt geometriens og specielt trigonometriens betydning herfor. Derefter følger et afsnit om linearitet og siden et generelt afsnit om matematisk modellering. Alle afsnittene er bygget over forsøg og beregninger som udgangspunkt for undervisningen, og til nogle af eksperimenterne er der også vedlagt forsøgsdata, så den matematiske side af sagen kan belyses, hvis udførelsen af forsøgene af den ene eller anden grund ikke er mulig.

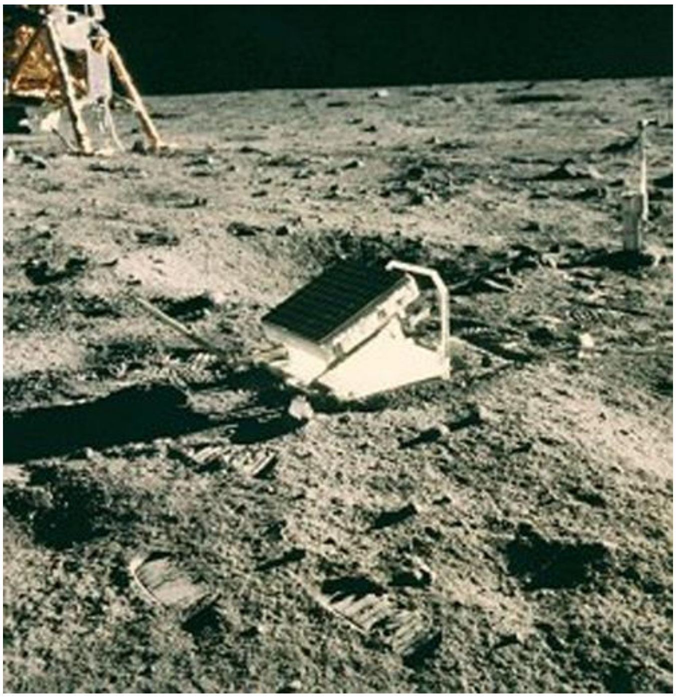
11.1. Geometrien i verdensbilledet

Geometri og specielt trigonometri er siden antikken blevet anvendt til at bestemme afstande henover svært tilgængeligt (evt. fjendtligt) terræn. For eksempel er det vigtigt ved bygning af stormstiger o. lign. at kende højden af den fjendtlige forsvarsmur. Traditionel opmåling med længdestokke vil være en ren selvmordsmission, så opmåling af en kendt distance i sikker afstand fra muren kombineret med måling af passende vinkler er vejen frem. Tilsvarende problemer møder man ved bestemmelse af bredden af en flod eller en sø.

Ser man på afstande udenfor Jorden, er anvendelse af geometri ofte vejen til at bestemme afstandene i Solsystemet, i Mælkevejen eller til andre galakser. En af de få undtagelser til reglen er brugen af radar/lasere til bestemmelse af afstande til Månen og de indre planeter.

Øvelse 11.1

Laserlys sendes mod Månen, reflekteres af et spejl anbragt under en af Apollo-missionerne og modtages igen på Jorden 2,564 s senere. Lysets fart er $2{,}998 \cdot 10^8$m/s. Beregn afstanden til Månen.



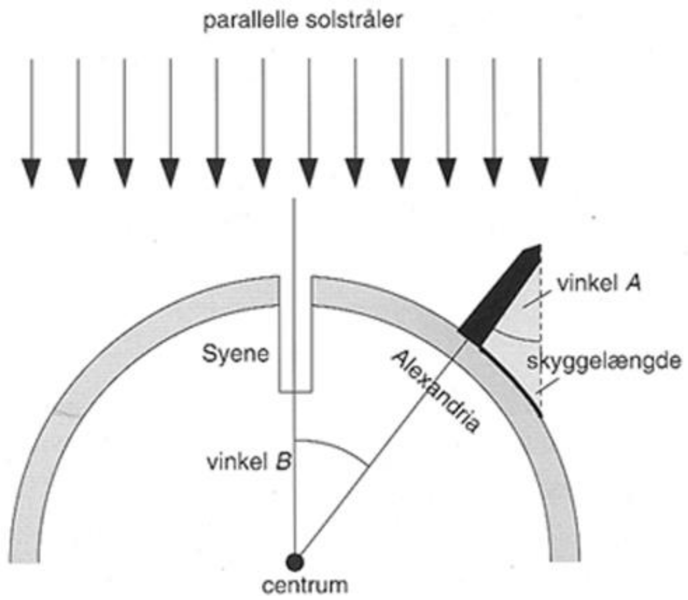
Panel med spejle efterladt af Apollo 11. Spejlene reflekterer laserlys fra Jorden.

ISBN 9788770668279

Studieretningskapitel 11: Fagligt samarbejde – matematik og fysik
Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

1.1 Afstande i Universet

Erathostenes var den første, der beregnede omkredsen af Jorden. Han kom fra Kyrene, der var en græsk by på Afrikas nordkyst (i det nuværende Libyen) og levede ca. 284 - 202 fvt. Hans måling byggede på, at han havde observeret, at Solen ved sommersolhverv ikke kastede nogen skygge i byen Syene (nær det nuværende Aswan i Egypten), mens han kunne måle en vinkel på $1/50$ af en fuld cirkel for en skygge i Alexandria ved Nilens munding. Afstanden mellem de to byer bestemte han til 5000 stadier ud fra rejsetiden mellem de to byer.



Erathostenes' observation af en rund model af Jorden.

Øvelse 11.2

a) Anvend den målte vinkel til at beregne omkredsen af Jorden målt i stadier

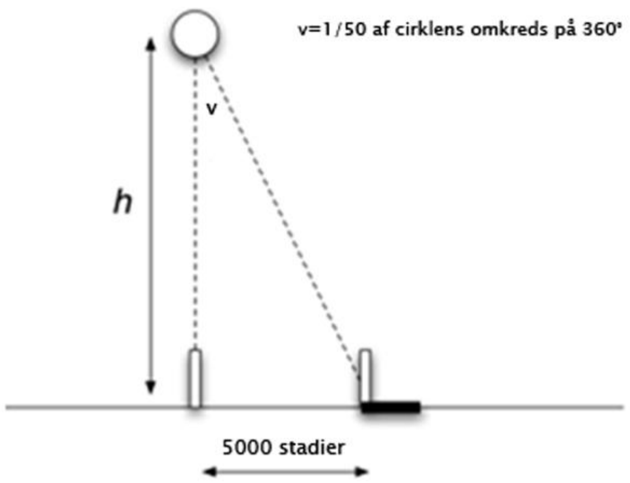
b) Den græske stadie var på 185 m, mens den egyptiske var 157,5 m. Der er en del uenighed om, hvilken af disse to enheder, Erathostenes brugte. Beregn jordens omkreds i meter vha. begge omregninger og sammenlign med den moderne værdi.

c) Diskuter hvilke fejl hans beregninger kan være behæftede med.

Øvelse 11.3

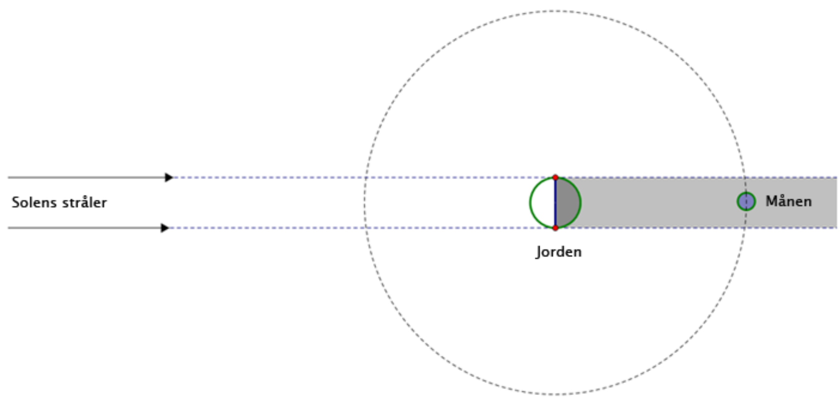
Man kunne i stedet antage, at Jorden er flad og at vinklen skyldes Solens placering over den flade jord. Hvor stor skulle afstanden til Solen være i denne model?

ISBN 9788770668279



Beregning for en flad model af Jorden.

Aristarchos og Hipparchos, der levede i det 3. og det 2. århundrede fvt., var nogle af de største astronomer i det gamle Grækenland med originale ideer om solsystemets indretning. De var overbeviste om, at Jorden er rund og at der er naturlige forklaringer på sol- og måneformørkelser. Under måneformørkelser kunne Aristarchos iagttage, at Månen kan være formørket i op til 3 timer. Hvis Solen er et punkt uendeligt langt væk, er Jordens skygge 2 jordradier bred i Månens afstand. Solen er hverken et punkt eller uendelig langt væk, så skyggen er lidt smallere, men lad os regne med de 2 jordradier.



Aristarkos simple model for en måneformørkelse.

Forholdet mellem de 3 timer og Månens omløbstid, vil så være lig med forholdet mellem 2 gange Jordens radius og omkredsen af Månens bane. Sætter vi afstanden til Månen lig med R, er omkredsen $2\pi R$. Der gælder altså:

$$\frac{27\ dage}{3\ timer} = \frac{2\pi R}{2R_{jord}}$$

På denne baggrund fandt de græske astronomer frem til, at afstanden til Månen var ca. 75 gange Jordens radius.

Øvelse 11.4

a) Udfør beregningen

b) Beregn på dette grundlag og med brug af Eratosthenes værdi for Jordens omkreds afstanden til Månen og sammenlign resultatet med den moderne værdi for Månens afstand, 384.400 km.

En anden metode er at måle *parallaksen* for Månen. To personer ser ikke Månen i præcis den samme retning, hvis de ikke står samme sted. Samme fænomen ser man, hvis man strækker sin arm, løfter tommelfingeren og ser på den med skiftevis det ene og det andet øje lukket. Den skiftende synsretning får det til at se ud som om fingeren flytter sig f.eks. i forhold til væggen i baggrunden. Hvis man måler den vinkel, fingeren flytter sig, og kender afstanden mellem øjnene, kan afstanden til fingeren beregnes.

Dette er *parallakseprincippet*: Lad to personer bestemme sigtelinjen til Månen i forhold til baggrundsstjernerne og mål afstanden mellem dem.

Øvelse 11.5

To personer er placeret, så den ene står lige under Månen (Månen er i zenit) mens den anden står, så Månens centrum lige akkurat kan ses i horisonten. Vinklen kan bestemmes som forskellen mellem personernes breddegrader. Overvej dette!

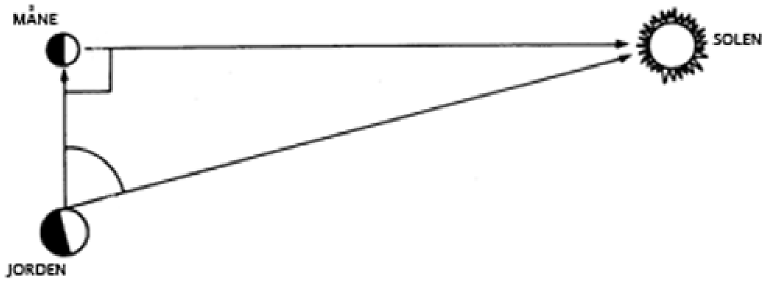
Med moderne udstyr kan vinklen bestemmes til 89,05°. Jordens radius er bestemt til 6371 km.

a) Beregn afstanden til Månen

b) Månens vinkeldiameter (vinklen fra kant til kant) er 0,528°. Bestem Månens radius i km.

Aristarchos anvendte en lignende betragtning til at bestemme hvor mange gange længere der er til Solen end til Månen. Ved halvmåne er vinklen mellem Måne-Jord og Måne-Sol præcis 90°, og fra en placering hvor Månen er i Zenith måles vinklen mellem Jord-Måne og Jord-Sol

ISBN 9788770668279



Øvelse 11.6

Vinklen blev af Aristarchos vurderet til 87°.

a) Beregn afstanden til Solen ifølge Aristarchos. Anvend Eratosthenes værdi for Jordens radius

b) Find den moderne værdi, og beregn hvilken vinkel, han skulle have fået.

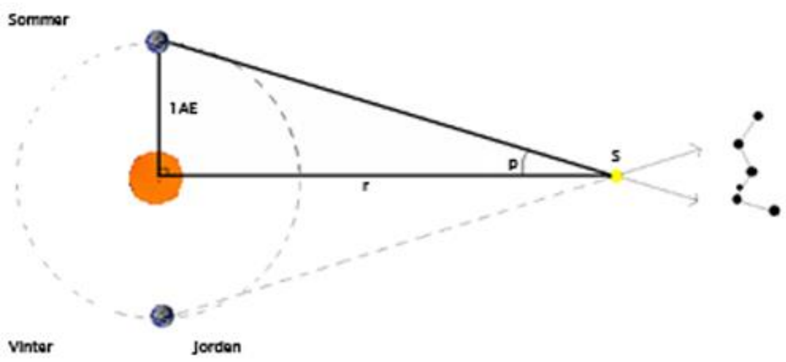
c) Værdierne for denne vinkel er meget tæt på hinanden. Overvej hvorfor den lille forskel betyder så meget for afstanden til Solen.

d) Solens vinkeldiameter er 0,536°. Beregn Solens radius.

e) Hvor mange gange er Solens radius større end Jordens? Hvor mange gange er Solens rumfang større end Jordens?

Ligesom man kan bestemme en parallakse for Månen ved at lade to personer observere den samtidigt, kan man også bestemme en parallakse for stjernerne. Se figuren. Bestemmelsen af stjerners parallakse blev meget vigtig i debatten om Jorden eller Solen var centrum for Solsystemet, men den diskussion udskyder vi til næste afsnit. Da stjernerne er meget længere væk end Månen, er Jordens diameter alt for lille som basislinje. I stedet anvendes afstanden til Solen som basislinje. Man måler vinklerne mellem Jord-Sol og Jord -Stjerne med et halvt års mellemrum. Vi får så trekanten, hvor afstanden til Solen er den ene katete, og parallaksen er den vinkel som radius i Jordens bane ses under fra stjernen.

ISBN 9788770668279



Årlig parallakse

Bestemmelse af den årlige parallakse. En stjernes position på himlen observeres med et halvt års mellemrum, og vinklen p bestemmes. Stjernen befinder sig ved S, men fordi vi bevæger os, ser den tilsyneladende ud til at være lidt forskellige steder på Stjernehimlen "bagved".

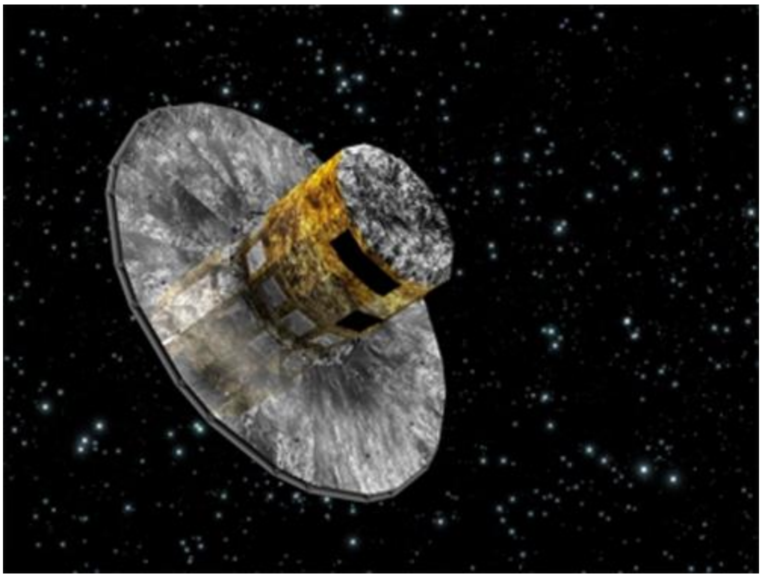
Øvelse 11.7

Parallaksen for den nærmeste stjerne, Proxima Centauri er bestemt til 0,000214 grader.

a) Bestem afstanden til stjernen i km.

b) Et lysår er den afstand, lyset kan tilbagelægge på 1 år. Lysets fart er $3{,}00 * 10^8 \frac{m}{s}$. Bestem længden af 1 lysår, og bestem hvor mange lysår, der er til Proxima Centauri.

ESA (European Space Agency) planlægger at opsende satellitten GAIA i 2013. Målet med missionen er at kortlægge ca. 1 % af alle stjerner i Mælkevejen i løbet af 5 år



Satellitten GAIA som ESA planlægger at opsende i 2013.

Øvelse 11.8
GAIA forventes at kunne måle stjernernes position med en nøjagtighed på $6{,}7 * 10^{-9}\ grader$.

a) Beregn den største afstand til en stjerne, man vil kunne bestemme med GAIA. Sammenlign med Mælkevejens udstrækning.
Den relative usikkerhed i bestemmelsen af en stjernes parallakse, Dp/p, er bestemt af forholdet mellem apparaturets nøjagtighed Dp (angivet ovenfor) og den målte parallaksevinkel p. Måler man f.eks. en stjernes parallakse til at være dobbelt så stor som satellittens målenøjagtighed, bliver usikkerheden altså 50 %. Den relative usikkerhed i parallaksen er med god tilnærmelse den samme som den relative usikkerhed på afstanden.

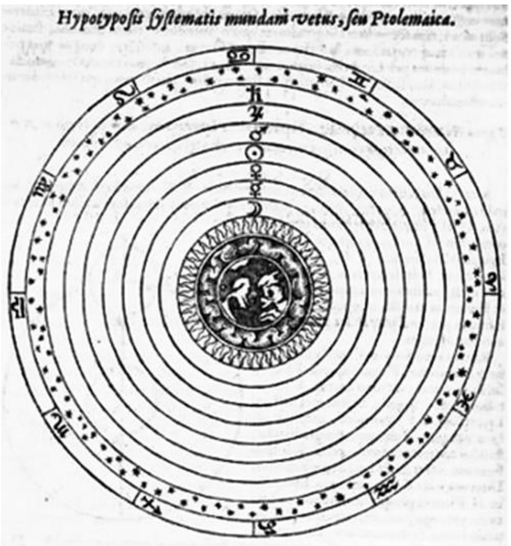
b) *Hvad er den maksimale afstand, hvis man vil kende den med 10 % nøjagtighed?*

c) *Hvor store/små ting vil man kunne se på Månen med denne satellit?*

Bemærk at alle afstande i sidste ende kan føres tilbage til bestemmelsen af Jordens radius, og i anden omgang til afstanden til Solen (den astronomiske enhed).

11.1.2 Debatten om verdensbilledet

Da Nikolaus Kopernikus (1473 - 1543) udgav sine tanker om, at Solen og ikke Jorden var centrum i Solsystemet, var det ikke første gang, det blev foreslået. Aristarchos fremsatte også ideen, men den vandt aldrig udbredelse i antikken. Argumenterne både for og imod modellen er mange, og vi vil her se på en række af dem. Vi skal huske, verdensbilledet dengang var noget anderledes end nu. De to yderste planeter Uranus og Neptun var endnu ikke blevet opdaget, og en afstand til stjernerne var ikke bestemt. Stjernehimlen var således i både det *geocentriske* (Jorden i centrum) og det *heliocentriske* (Solen i centrum) verdensbillede placeret som en skal rundt om Solsystemet (se figurerne).



Det geocentriske verdensbillede.
Den danske astronom Christen Sørensen Longomontanus' tegning af det geocentriske verdensbillede. Billedet findes i hans hovedværk Astronomia Danica fra 1622. Longomontanus var en af Tycho Brahes nærmeste medarbejdere.

Det heliocentriske verdensbillede.
Den danske astronom Christen Sørensen Longomontanus' tegning af det heliocentriske verdensbillede. Billedet findes i hans hovedværk Astronomia Danica fra 1622. Longomontanus var en

Et af de første argumenter, man støder på, er, at hvis Jorden ikke står stille, men derimod kredser om Solen og yderligere roterer om sin egen akse, vil det være med så store hastigheder, at vi alle ville falde af.

Øvelse 11.9

a) Beregn den hastighed, et punkt på ækvator bevæger sig med som følge af Jordens rotation.

b) Beregn Jordens og Saturns hastigheder rundt om Solen. Du kan finde en oversigt over planeternes afstande og omløbstider [her]

ISBN 9788770668279

Problemerne er på ingen måde løst blot ved at acceptere det geocentriske verdensbillede, hvad følgende opgave viser.

Øvelse 11.10

a) Beregn den hastighed, Månen skal have i det geocentriske system, hvis den skal kredse omkring Jorden på et døgn

b) Gentag beregningen for Saturn

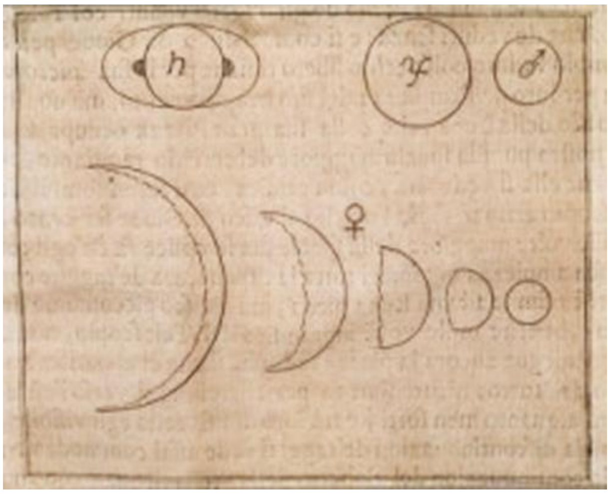
Den italienske videnskabsmand Galileo Galilei (1564 – 1642) argumenterede senere smukt for, at det ikke var et problem, at Jorden bevægede sig. Så længe alt på Jorden fulgte med i bevægelsen, ville den ikke kunne mærkes. Hans analogi var en passager på et skib, der sejlede på stille vand med en jævn hastighed. Lader man en genstand falde på skibet, vil den se ud til at falde lodret ned, da genstanden har samme vandrette hastighed som skibet, og derfor følger med skibet i den retning, skibet sejler.

Det er værd at bemærke, at Galileis argument på ingen måde er et bevis for, at Jorden bevæger sig rundt om Solen. Det fik man først i 1838, hvor astronomen Friedrich Bessel (1784-1846) som den første målte en parallakse for en stjerne. Dette vender vi tilbage til senere.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Galilei var den første til at anvende kikkerten til at observere himlen. Han opdagede bl.a., at Venus havde faser ligesom Månen.



Galileis håndtegning af Venus' faser, sammen med moderne billeder af det samme. Det er en serie af optagelser. Bemærk, at der også kan optræde "fuld-Venus", ligesom vi kender fuldmåne. Hvornår vil det indtræffe?

Øvelse 11.11

Venus' faser i det geocentriske verdensbillede.

a) Markér Jorden på et stykke papir eller i et dynamisk geometriprogram. Tegn Venus' bane som en cirkel rundt om Jorden, og Solens bane som endnu en cirkel med lidt større radius.

b) *Placér Solen i banen lige over Jorden*

c) Venus observeres aldrig mere end 46,3° fra Solen. I det geocentriske verdensbillede var man derfor nødt til at indføre en kunstig binding mellem Venus og Solen. Med Jorden og Solen i de indtegnede positioner kan Venus altså kun være indenfor en vinkelafstand på 46,3° på hver side af retningen til Solen. Indtegn Venus i de to yderpositioner samt i midten som en lille cirkel.

d) *Markér på Venus' cirkelskive, hvor sollyset vil falde.*

e) *Hvilke faser vil man kunne se fra Jorden?*

f) *Stemmer det overens med Galileis observationer?*

Øvelse 11.12

Venus' faser i det heliocentriske verdensbillede.

a) Markér Solen på et stykke papir eller i et dynamisk geometriprogram. Tegn Venus' bane som en cirkel rundt om Solen, og Jordens bane som endnu en cirkel med en radius, der er 1,383 gange større.

b) *Placér Jorden i banen lige under Solen*

c) *I denne model er Venus ikke bundet, men kan bevæge sig frit. Vis at vinklen mellem Solen og Venus aldrig vil overstige 46,3°.*

d) *Indtegn en lille cirkel i Venus' bane øverst, nederst, helt til venstre, helt til højre samt i de 4 positioner mellem disse.*

e) *Markér på de 8 cirkelskiver hvor sollyset vil falde*

f) *Hvilke faser vil man kunne se fra Jorden?*

g) *Stemmer det overens med Galileis observationer?*

Som det ses af øvelse 11.12, er der en sammenhæng mellem de observerede vinkler og forholdet mellem planetbanernes radier. Det gør det muligt at beregne størrelsesforholdene i Solsystemet, og det var en af de ting, der for Kopernikus gjorde den heliocentriske model tiltrækkende. Ud fra andres observationer af såvel de indre som de ydre planeter, var han i stand til at beregne radierne i planeternes baner. Han fik således beregnet størrelsesforholdene i Solsystemet, men ikke de absolutte afstande.

Øvelse 11.13

Udover Venus faser opdagede Galilei også Jupiters fire største måner, og han så landskaber på Månen. Diskuter, hvordan disse opdagelser harmonerer med det antikke verdensbillede.

Allerede inden Galilei gjorde sine opdagelser med kikkerten var det antikke verdensbillede i alvorlige problemer. Tycho Brahe (1546-1601) observerede i år 1572 en ny stjerne på himlen. Det, han så, var en supernova – en massiv stjernes sidste fase, hvor stjernen slynger de ydre dele ud i en gigantisk eksplosion. Dengang kendte man ikke til begrebet supernova, men opdagelsen af en ny stjerne på himlen, på et sted hvor der ikke før havde været en, var stadigvæk epokegørende. Ifølge Aristoteles var himlen over Månens bane uforanderlig, så Tychos observation var i direkte modstrid med antikkens lære, idet det lykkedes ham at bevise, at den måtte være længere væk end Månen.

Der var gennem historien af og til blevet observeret kometer. Eftersom man antog, at alt over Månens bane var evigt og uforanderligt, måtte man placere kometer i Jordens atmosfære. I 1577 observerede Tycho en komet på himlen, og også her fandt han en modstrid. Ikke bare var kometen længere væk end Månen; dens afstand varierede også, så den passerede gennem flere af de krystalsfærer, man mente planeterne sad på.

I forrige afsnit så vi, at man kunne bestemme afstanden til en stjerne ved at måle stjernens parallakse. Her var det egentlig den *årlige* parallakse vi målte. Der findes også en *daglig* parallakse, hvor man udnytter, at en observatør på Jorden, som følge af Jordens rotation, befinder sig forskellige steder med f.eks. 6 eller 12 timers mellemrum. Et himmellegemes *daglige parallakse* er den vinkel, som *Jordens radius* ses under set fra det pågældende himmellegeme.

Øvelse 11.14

a) Beregn Månens daglige parallakse. Undervejs gør I de antagelser, der er nødvendige.

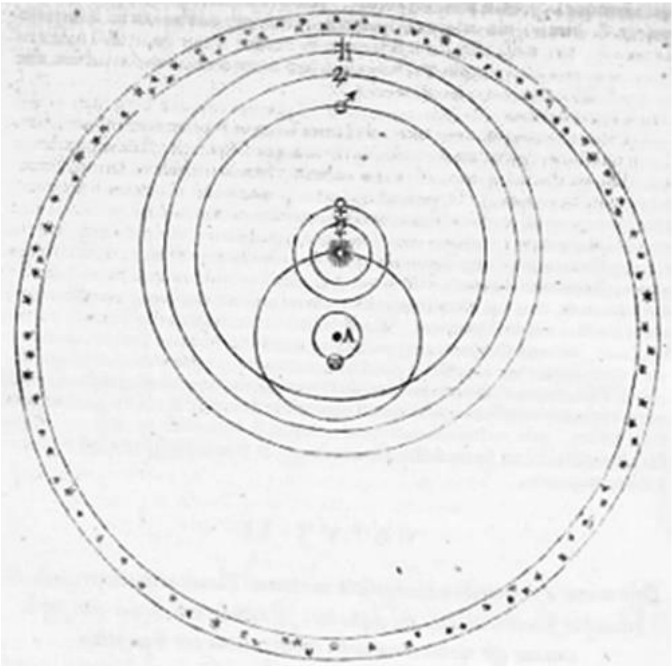
b) Tycho Brahe havde ikke en kikkert til rådighed. Den mindste vinkel, man kan se med det blotte øje, er ca. 0,5 bueminut. (1 grad svarer til 60 bueminutter, og et bueminut svarer til 60 buesekunder). Vurder hvor fjerne objekter, han var i stand til at bestemme afstanden til med denne metode.

Alle disse forskellige observationer bidrog til at underminere det geocentriske verdensbillede, men det var Galileis observation af Venus' forskellige faser, der endeligt falsificerede det. Det betød omvendt ikke, at man havde bevist, at Kopernikus' model var den rigtigt.

Faktisk opstillede Tycho Brahe en model, hvor Jorden var i centrum, Solen og Månen kredsede om Jorden,

ISBN 9788770668279

og de øvrige planeter kredsede om Solen. Modellen kan synes unødig kompliceret, men den er ikke urimelig.



Det tychoniske system.
Den danske astronom Christen Sørensen Longomontanus' tegning af det tychonske verdensbillede. Billedet findes i hans hovedværk Astronomia Danica fra 1622. I Tycho Brahes verdensbillede er Jorden i centrum, Månen og Solen kredser om Jorden og alle planeter kredser omkring Solen og dermed også om Jorden. Longomontanus var en af Tycho Brahes nærmeste medarbejdere.

Planeterne kredser om Solen, og derved undgår man kunstigt at skulle binde Merkur og Venus til Solen. At Jorden står stille i midten af Tychos verdensbillede skyldtes bl.a. at han ikke var i stand til at observere en årlig parallakse for stjernerne.

Øvelse 11.15

a) Beregn afstanden til det fjerneste objekt, man kan måle en årlig parallakse for med det blotte øje. (Øjet kan som sagt se vinkler ned til ca. 0,5 bueminut).

b) Hvor mange gange længere ud end Saturns bane kan man se. (På Tycho Brahes tid var Saturn den yderste kendte planet)

c) Sammenlign med afstanden til Alfa Centauri.

Så længe man kun har observationer indenfor Solsystemets grænser til rådighed, er det umuligt at skelne mellem Tycho Brahes og Kopernikus modeller, så selv om de fleste antog Kopernikus model, var det først med Friedrich Bessels målinger i 1838 af parallaksen for en stjerne, at det endeligt blev afgjort, hvilken model for Solsystemet, der var den rigtige.

ISBN 9788770668279

11.1.3 Model af Solsystemet

I skal nu prøve at lave en model af Solsystemet, som man i dag mener, det ser ud. Ønsker man en helt tro kopi, skal alle afstande skaleres ned med den samme faktor. Det giver selvfølgelig det bedste billede af vores solsystem, men ulempen er, at planeterne bliver meget små, medmindre man accepterer at have de yderste planeter liggende nogle kilometer væk. I bør derfor overveje, om skalaforholdet for afstandene i Solsystemet og skalaforholdet for planeternes radier skal være det samme.

Et himmellegemes position på himlen er givet ved to koordinater, længde og bredde, der svarer til længde- og breddegrader målt langs ekliptika (dvs. Solens bane på himmelkuglen). Vi ser her bort fra bredden, idet alle planeter stort set ligger i samme plan som Jordens bane om Solen (ekliptika). Planeterne bevæger sig, og data i sådan en tabel er fra en bestemt dag.

Placer jeres model for Jorden et passende sted. Placer så de øvrige i den angivne retning og afstand.

	Længde	Afstand fra Jorden (AE)	Radius (km)
Solen	90°40'14"	1,02	695990
Merkur	101°48'58"	1,27	2439
Venus	75°38'09"	1,65	6052
Mars	60°56'15"	2,24	3397
Jupiter	33°27'10"	5,43	71492
Saturn	190°30'59"	9,41	60268
Uranus	4°26'26"	20,12	25559
Neptun	330°49'44"	29,49	24764
(Pluto)	276°20'45"	31,04	1151

1 AE (astronomisk enhed) svarer til 149,6 mio. km. Jordens radius er 6378 km. Data i tabellen er for 22. juni 2011 kl. 12 i København. Aktuelle data kan f.eks. findes på Sky View Cafe.

På deres hjemmeside kan man fremstille tabeller over de sande ekliptiske koordinater (dvs. som set fra Jordens centrum) ved at gå ind i Tables > Ephemeris Options.

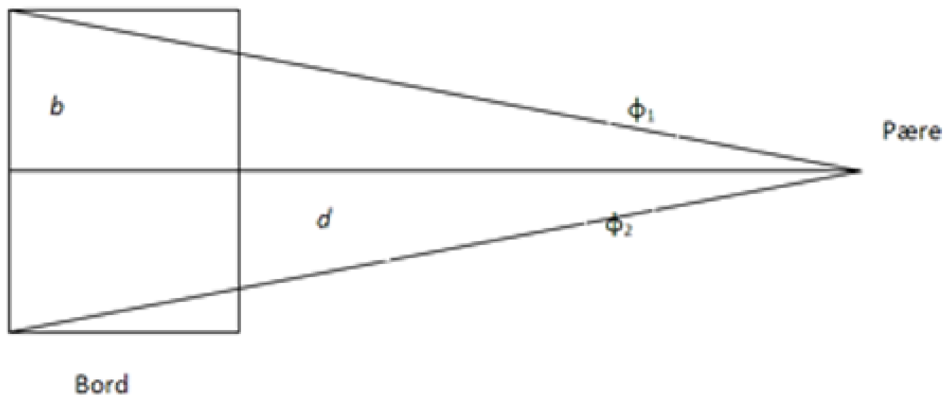
ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

1.4 Eksperiment: Parallakse-metoden

Sæt en tændt pære i en kendt afstand fra et rullebord (en afstand på ca. 3-4 meter er passende). Rullebordet stilles, så kanten nærmest pæren står vinkelret på retningen til pæren, og så pæren er lige i midten. Mål parallaksen fra begge siden (ϕ1 og ϕ2) samt halvdelen af bordets bredde *b* (det svarer til den astronomiske enhed). Mål til sidst afstanden fra bordets bagkant til pæren, *d*.

Beregn pærens afstand ud fra den målte parallakse samt bordets bredde. Sammenlign med den målte afstand.



ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

11.2 Linearitet

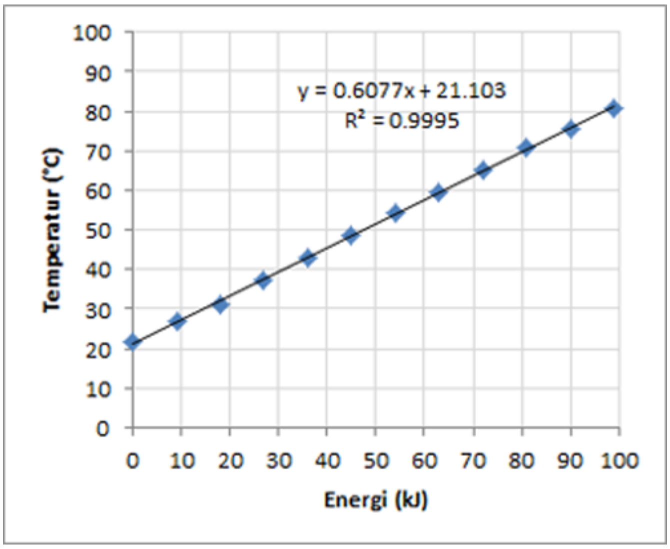
Den første vækstmodel, man møder, er som regel den lineære model. Denne model er den simpleste, og den viser sig at være god i rigtig mange sammenhænge. Hvis man har data fra nogle målinger eller observationer, vil man derfor ofte starte med at undersøge, om denne model kan beskrive ens data. Dette gælder også i fysik, hvor den lineære model er meget brugt. Man har tit et skema over to samhørende størrelser og ønsker at teste, om der er tale om en lineær sammenhæng.

Eksempel: Sammenhængen mellem temperatur og tilført energi

En elev har lavet et forsøg, hvor hun har varmet vand op med en dyppekoger. Hun har målt samhørende værdier af tilført energi, *E,* i kJ og temperatur, *T,* i °C.

E (kj)	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99
T (°C)	21,6	26,8	31,0	37,2	42,0	48,6	54,1	59,7	65,2	70,7	75,6	80,8

Eleven indtegner resultaterne i et koordinatsystem med energien på 1. aksen og temperaturen på 2. aksen. Hun vurderer, at punkterne ser ud til at ligge på en ret linje og laver derfor en lineær regression på punkterne.
Resultatet bliver $y = 0{,}61x + 21{,}1$, med r^2=0,9995.
Grafen og punkterne ses nedenfor. De understøtter tydeligvis hendes formodning:



Oversat til de variabelnavne, vi anvender i forsøget, fås altså umiddelbart sammenhængen:
$T = 0{,}608 \cdot E + 21{,}1$.

Men i fysik vil man gerne have enheder på alle størrelser, både variable og konstanter, hvis de kan angives med en enhed. Det er i modsætning til matematik, hvor man ofte udelader enhederne, mens man regner, og først tager enhederne med i svaret.

I dette tilfælde bliver enheden på konstantleddet *b* det samme som enheden for *y*, dvs. temperaturen, altså °C. Konstantleddet med enhed får derfor værdien 21,1 °C. Enheden på hældningskoefficienten er lidt sværere. Hældningskoefficienten fortæller, hvad *y* vokser med, når *x* vokser med 1. Det svarer til, hvad temperaturen *T* vokser med, når energien *E* vokser med 1 kJ. Men når energien *E* vokser med 1 kJ, må temperaturen *T* vokse med 0,608 °C. Hældningskoefficienten får derfor værdien 0,608 °C/kJ. Der gælder åbenbart generelt, at enheden på hældningskoefficienten bliver enheden for *y* divideret med enheden for *x*.

Konklusion: Den fysiske sammenhæng er givet ved $T = 0.608\ \frac{°C}{kJ} * E + 21.1\ °C$.

Praksis: Om brugen af enheder i matematik og fysik

I matematik arbejder man typisk med variable uden enheder. I fysik arbejder man derimod typisk med variable med enheder. Man omdanner en fysisk variabel til en matematisk variabel ved at dividere enheden bort, fx $y = \frac{T}{°C}$ og $x = \frac{E}{kJ}$.

En lineær sammenhæng mellem to matematiske variable angives på formen:

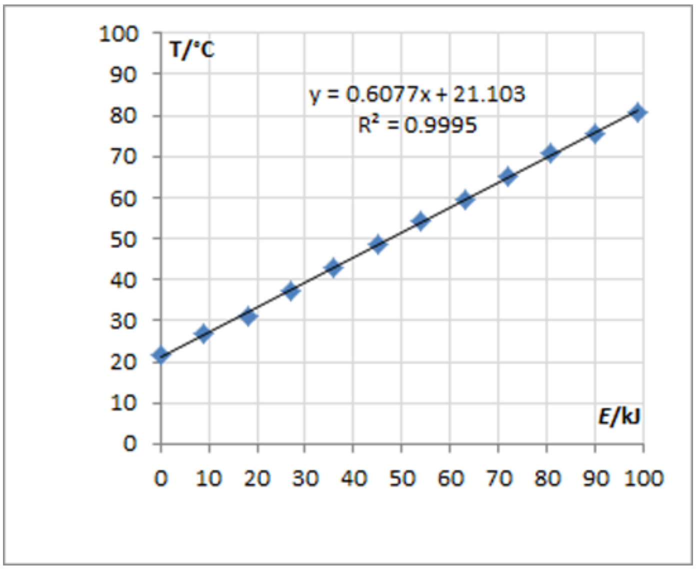
$$y = 0{,}608 * x + 21{,}1$$

Den lineære sammenhæng mellem de tilsvarende fysiske variable er givet ved:

$$T = 0{,}608 \frac{°C}{kJ} * E + 21{,}1°C$$

hvor enheden for konstantleddet er den samme som enheden for y og enheden for hældningskoefficienten er det samme som enheden for y divideret med enheden for x i overensstemmelse med formlen for hældningskoefficienten $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Når man afbilder sammenhængen mellem energi og temperatur i et diagram, vil man derfor ofte angive aksevariablene således:



Øvelse 11.16

Mange værktøjsprogrammer kan håndtere fysiske enheder. Undersøg de muligheder, dit eget værktøjsprogram har for at regne med enheder.

Øvelse 11.17 (især for A-niveau)

I eksperimentet blev der brugt 0,3673 kg vand. Benyt denne oplysning samt sammenhængen mellem tilført varme Q og temperaturstigning ΔT

$$Q = m_{vand} * c_{vand} * \Delta T$$

til at bestemme den specifikke varmekapacitet c_{vand} for vand. Sammenlign med tabelværdien for vands specifikke varmekapacitet.

Eksempel (Især for A-niveau): Lineær sammenhæng med brug af enheder

Man omdanner en lineær sammenhæng uden enheder til en lineær sammenhæng med enheder ved at udskifte de matematiske variable *x* og *y* med de tilhørende fysiske variable *E* og *T*. Sammenhængen

$$y = 0{,}608 * x + 21{,}1$$

omdannes derved til

$$\frac{T}{°\mathrm{C}} = 0{,}608 * \frac{E}{kJ} + 21{,}1$$

Ved at gange igennem med enheden °C fås da netop den ønskede ligning

$$T = 0{,}608 \frac{°\mathrm{C}}{kJ} * E + 21{,}1°\mathrm{C}$$

Processen kan automatiseres i et værktøjsprogram

$$solve(y = 0.608 * x + 21.1, T)\,\Big|\, y = \frac{T}{°\mathrm{C}}\ and\ x = \frac{E}{kJ}$$

Dette vil give:

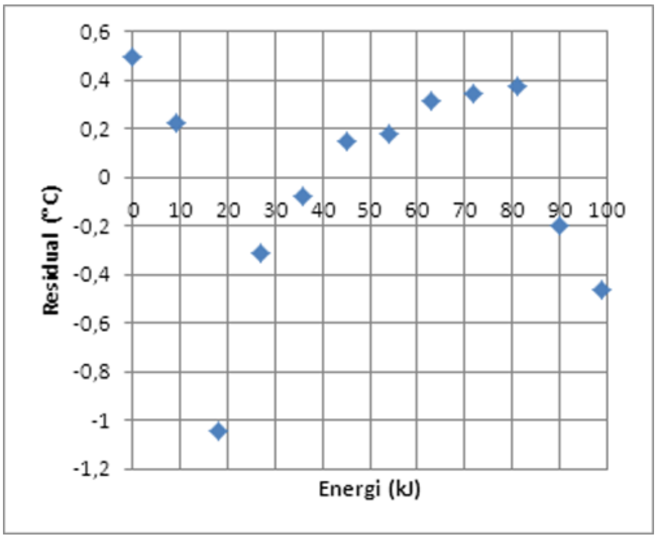
$$T = 0{,}608 \frac{°\mathrm{C}}{kJ} * E + 21{,}1°\mathrm{C}$$

(hvor det dog kan være nødvendigt at anvende en expand-kommando til sidst).

ISBN 9788770668279

Eksempel: Residualplot

De fleste værktøjsprogrammer kan også afbilde modellens residualer, dvs. afvigelserne mellem de observerede *y*-værdier og modellens *y*-værdier. Det ser således ud:



Residualplottet viser, at den typiske usikkerhed ligger på under 0,5 °C. Residualplottet viser også, at restvariationen ser rimelig tilfældigt ud. Alt i alt er det altså en rimelig lineær model med en indbygget usikkerhed på en halv grad. Det er derfor ikke rimeligt at tage flere cifre med i ligningen, da måleusikkerheden på temperaturen tydeligvis ligger på den første decimal. Residualplot er både nyttige til at vurdere den indbyggede usikkerhed i modellen og til at fange eventuelle systematiske afvigelser fra modellen, der går ud over den lineære sammenhæng.

2.1 Eksperimenter

Anvend eksemplet ovenfor, hvor vi undersøgte sammenhængen mellem temperatur og tilført energi, som en slags manual til arbejdet med et eller flere af følgende fire eksperimenter:

1) Densitet

2) Tyngdekraft

3) Opvarmning af vand og sand

4) Frysepunktet for saltvand

L&R Uddannelse
EGMONT

Eksperiment 1. Densitet

I dette forsøg skal I måle densiteten for vand ved to forskellige temperaturer.

Fremgangsmåde
I skal bruge en præcisionsvægt (0,1g), et måleglas, et termometer, samt en elkedel og nogle isterninger for at skaffe vand ved den ønskede temperatur, samt en beholder til vandet med den ønskede temperatur henholdsvis tæt på frysepunktet og mellem 30˚C og 60˚C.

1) Fremstil vand ved den ønskede temperatur. Notér temperaturen.

2) Nulstil vægten uden glas.

3) Vej (uden at nulstille vægten) massen (*m*) af glas med indhold for forskellige rumfang (*V*) vand og udfyld et skema som nedenstående:

V (mL)									
m (g)									

Skemaet kan hentes som excelark her.

4) Gentag forsøget med vand med den anden temperatur

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

L&R Uddannelse EGMONT

Databehandling (laves for hvert delforsøg):

1) Indtegn i jeres værktøjsprogram målepunkterne i et koordinatsystem med rumfanget (V) på 1. aksen og massen (m) på 2. aksen.

2) Beskriv graferne med ord. Ser det ud som om der er tale om en lineær sammenhæng mellem masse og rumfang i de to tilfælde?

3) Udfør i bekræftende fald en lineær regression på målepunkterne

4) Hvad er enheden på b? Hvordan kan dette tal tolkes i de to tilfælde?

5) Hvad er enheden på hældningskoefficienten a? Hvordan kan dette tal tolkes i de to tilfælde?

6) Hvilken værdi finder du så for densiteten for vand ved de to temperaturer?

7) Hvad er tabelværdierne for vands densitet ved de to temperaturer? (Se fx ”Databog fysik kemi”, 10. udgave, F&K forlaget, 1998)

8) Find procentafvigelsen mellem de målte og de teoretiske værdier:

$$procentafvigelse = \frac{målt\ værdi\ - tabelværdi}{tabelværdi} = 100\%$$

Er resultatet som forventet, eller kan du give en forklaring på eventuel afvigelse - inddrag gerne residualplottene?

Giv en kortfattet konklusion på, om forsøget gik som forventet og et kortfattet resumé af ovenstående.

ISBN 9788770668279

Her er et eksempel på data fra forsøget:

Koldt vand: Temperatur: 8°C – Tabelværdi: 0,99986 g/mL

V (mL)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
m (g)	59,3	82,5	105,2	129,3	155,5	179,0	206,0	230,1	255,9

Varmt vand: Temperatur: 60°C – Tabelværdi: 0,98320 g/mL

V (mL)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
m (g)	59,3	86,2	107,5	128,7	156,2	181,1	204,8	228,0	255,7

Skemaerne kan hentes som excelark her.

Saltvand med forskellig koncentration vil også have forskellig densitet. For saltvand med en kendt koncentration kan man lave et tilsvarende eksperiment, hvor man bestemmer densiteten og sammenligner med tabelværdien fra databogen.

Eksperiment 2. Tyngdekraft

I dette forsøg skal I undersøge sammenhængen mellem tyngdekraften på en genstand og massen af genstanden.

Et dynamometer (en kraftmåler) hænges op i et stativ. Mål med dynamometeret tyngdekraften på lodder med varierende masse og noter resultatet ned i skemaet.

Masse (kg)									
Tyngdekraft (N)									

Skemaet kan hentes som excelark **her**.

I afsnit 3 er der forslag til en videre statistisk behandling af klassens måledata. Sørg derfor for at gemme data til senere brug.

Databehandling

1) Indtegn målepunkterne i et koordinatsystem med massen på 1. aksen og tyngdekraften på 2. aksen

2) Ser det ud, som om der er tale om en lineær sammenhæng?

3) Udfør i bekræftende fald en lineær regression på målepunkterne.

4) Overvej enhederne på *a* og *b*, samt betydningen af disse to tal.

5) Benyt den fundne model til at beregne tyngdekraften på dig selv

6) Benyt den fundne model til at beregne, hvor stor massen skal være for at tyngdekraften på genstanden er 500.

Hældningskoefficienten i dette forsøg kaldes *tyngdeaccelerationen*. Symbolet for den er *g*, og tabelværdien er $g = 9{,}82\ \frac{N}{kg}$. Hvor mange procent afviger jeres værdi fra tabelværdien?

Kan I forklare en evt. afvigelse – inddrag gerne residualplottet.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Eksperiment 3. Opvarmning af vand og sand

Den specifikke varmekapacitet for vand og sand er forskellig. I dette forsøg skal I undersøge, hvad dette betyder for opvarmningen af henholdsvis vand og sand.

Overvej på forhånd, hvilket stof I tror, har den største varmekapacitet, samt hvilken kurve, der så vil være henholdsvis stejlest og fladest.

Fremgangsmåde

To reagensglas vejes. Det ene fyldes med sand og det andet med vand. Begge glas vejes igen og massen af vand og sand beregnes og noteres. I hvert reagensglas placeres en termoføler, der forbindes til et termometer eller til et dataopsamlingsprogram.

En kraftig lampe placeres i lige stor afstand fra de to glas. Starttemperaturen noteres ned. Lampen tændes og temperaturen måles fx hvert 30 sekund. Mål indtil temperaturen af det ene stof bliver 90 °C.

Efter lampen er slukket, kan man evt. måle afkølingen af de to stoffer. Se afsnit 4, eksperiment nr. 3.

Databehandling

1) Benyt dit værktøjsprogram til at indtegne målepunkterne i et koordinatsystem med tiden på 1. aksen og temperaturen på 2. aksen. Tegn punkterne for vand og sand i samme koordinatsystem, men gerne med forskellig farve.

2) Udfør en lineær regression for punkterne for begge stoffer.

3) Vurdér dine resultater, herunder hvor god regressionen er – inddrag gerne et residualplot.

4) Hvad er enheden for b? Hvad betyder dette tal?

5) Hvad er enheden for hældningskoefficienten a? Hvad betyder dette tal?

6) Masserne af vand og sand er ikke ens. Hvad betyder dette for forsøget?

7) Hvilket stof har den højeste varmekapacitet ud fra dine målinger?

8) Er der nogen fejlkilder ved forsøget? Hvordan kan man evt. forbedre forsøget?

Hvad fortæller jeres forsøg om et besøg på stranden om sommeren?

Hvad fortæller jeres forsøg om forskellen på klimaet, hvis man bor tæt på havet eller hvis man bor langt fra havet?

Eksperiment 4. Frysepunktet for saltvand

I dette forsøg skal I undersøge frysepunktet for saltvand med forskelligt saltindhold.

Beskriv, hvad du tror, der sker med vands frysepunkt, når saltindholdet stiger, og giv en begrundelse for dette.

Fremgangsmåde

I skal nu udføre forsøget og teste jeres hypotese. Det er vigtigt, at I noterer væsentlige detaljer vedr. forsøget. Selv om det er et simpelt forsøg, kan der godt være detaljer, som er væsentlige i forhold til talbehandlingen.

I skal måle frysepunktet af rent vand og af vand, hvori der er opløst forskellige mængder salt. Undervejs skal I beregne, hvor mange procent salt, der er i jeres opløsninger – tænk derfor over, hvordan I sikrer jer det.

Konstruktion af standard saltholdigheder: Jeres gruppe skal konstruere en kendt saltopløsning inden for intervallet 0,5 % – 5 %. Bemærk, at I skal låne hinandens (de andre gruppers) saltopløsning til jeres målinger. Derfor er det vigtigt, at I er præcise og markerer tydeligt, hvilken saltholdighed I har konstrueret.

I får udleveret et bægerglas til jeres saltopløsninger. Derudover får I også et bægerglas, hvori I skal lave en kuldeblanding efter følgende opskrift: Knus 5–6 isterninger, hæld dem ned i koppen og hæld en god sjat salt i (ca. 20 % af isterningernes masse). Rør rundt i kuldeblandingen (men ikke med fingrene!). Hvis I måler temperaturen af kuldeblandingen nu, skulle den gerne ligge omkring –15 °C eller derunder.

Denne kuldeblanding kan I bruge til at nedkøle jeres saltopløsninger med. Fyld lidt saltvand med en bestemt saltholdighed i et reagensglas og mål ved hvilken temperatur, saltvandet fryser til is. Udfør mindst 5 målinger med forskelligt saltindhold og meget gerne flere. Husk at rengøre reagensglasset imellem målingerne. I kan skrive jeres resultater i skemaet.

Saltindhold (%)									
Frysepunkt (±°C									

Skemaet kan hentes som excelark **her**.

ISBN 9788770668279

I afsnit 3 er der forslag til en videre statistisk behandling af klassens måledata. Sørg derfor for at gemme data til senere brug.

Databehandling

I skal nu se på sammenhængen mellem saltindhold og frysepunkt.

1) Frembring en graf med frysepunktet som funktion af saltindholdet.

2) Udfør en lineær regression.

3) Diskutér jeres resultater i forhold til jeres hypotese. Stemmer resultaterne overens med jeres hypotese? I givet fald, hvorfor ikke?

4) Hvad fortæller jeres eksperiment om den ”virkelige verden”, fx om hvor der dannes havis? Hvorfor strør man salt på fortovet om vinteren?

5) Vurdér forsøgets metode og resultater. Hvilke fejlkilder er der? Kan man undgå dem?

Her er et eksempel på data fra forsøget:

Saltindhold (%)	0	1	2	3	4	5
Frysepunkt (°C	0	-0,7	-1,2	-1,6	-2,7	-3,2

Skemaet kan hentes som excelark **her**.

ISBN 9788770668279

11.3. Modellering

I fysik benytter man sig af mange forskellige matematiske modeller. Den vigtigste sammenhæng er den lineære, som vi behandlede i afsnit 2. I bogens kapitel 4 og 5 behandles eksponentielle og potens sammenhænge. Begge disse er også meget anvendt til modellering i fysik. Hvis man har et datamateriale fra et eksperiment, vil der ofte være en af disse tre sammenhænge mellem størrelserne.

Når man i fysik laver et eksperiment, kan det være for at eftervise en lov, som er del af en større fysisk teori. I dette tilfælde vil man vide, hvilken sammenhæng man vil forvente. Så kan man teste, om det passer ved at udføre en passende regression.

Andre gange laver man et eksperiment uden at vide hvilken sammenhæng, der vil være. I det tilfælde kan man teste alle tre sammenhænge for at finde ud af, hvilken der passer bedst. Man starter her med at indtegne punkterne i et koordinatsystem og vurdere hvilken sammenhæng, man vil teste for. Her er det derfor vigtigt at have et vist kendskab til det grafiske udseende af de forskellige sammenhænge. Dernæst vil man udføre en eller flere regressioner for at undersøge dette.

3.1 Eksperimenter

I det følgende præsenteres forskellige eksperimenter, hvor der er en lineær sammenhæng $y=b+a\cdot x$, en eksponentiel sammenhæng $y=b\cdot a^x$ eller en potens sammenhæng $y=b\cdot x^a$. I nogle af eksperimenterne får man at vide hvilken sammenhæng, der er. I andre eksperimenter skal man selv finde ud af det.

Oversigt over eksperimenter

1) Masse og diameter for en stålkugle
2) Penduler
3) Afkølingskurver
4) Kratere
5) Statistik og tyngdekraft
6) Statistik of frysepunkt for saltvand
7) Tykkelsen af en laserstråle
8) Temperatur og udstråling
9) Solarkonstanten

ISBN 9788770668279

10) Afstandskvadratloven

Eksperiment 1. Masse og diameter for stålkugle

Stålkugler med forskellig diameter vil have forskellig masse. I skal undersøge, hvilken sammenhæng, der er mellem diameter og masse af stålkugler.

1) Først skal i lave en hypotese om forsøget. Forventer I, at massen som funktion af diameteren til stige lineært, eksponentiel eller potensielt?

2) For at teste jeres hypotese, skal I måle samhørende værdier af diameteren *d* og massen *m* for forskellige stålkugler. Resultaterne skrives i skemaet.

d (m)									
m (kg)									

Skemaet kan hentes som excelark **her**.

3) Afsæt punkterne i et koordinatsystem med diameteren på 1. aksen og massen på 2. aksen. Undersøg jeres hypotese ved at lave en passende regression.

4) Hvor godt passer jeres hypotese med forsøget?

5) Hvilken betydning har konstanterne? Konstanten *b* afhænger af en bestemt fysisk størrelse for stålkuglerne. Hvad er dette? Kan denne størrelse bestemmes ud fra forsøget?

Eksperiment 2. Penduler

Et pendul er en genstand, der er hængt op, så det kan drejes om en akse. Aksen må dog ikke gå gennem tyngdepunktet. Sættes pendulet i gang, kan det udføre svingninger.
Et helt simpelt pendul, der består af et lille kompakt lod ophængt i en snor, kaldes et matematisk pendul. Man regner her med, at snoren ikke vejer noget, og at loddet har en meget lille udstrækning. I skal undersøge sammenhængen mellem svingningstiden og snorlængden for et pendul.

For svingningstiden gælder følgende formel: $T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$

hvor T er svingningstiden, l er snorens længde og g er tyngdeaccelerationen. Denne sættes til 9,82 m/s^2.

1) Hvilken type sammenhæng er her tale om? Lav en omskrivning, så du kan se hvilken type sammenhæng, der er tale om mellem svingningstiden og længden af snoren, herunder hvilke udtryk, der gælder for konstanterne *a* og *b* i denne sammenhæng.

2) Lav en serie af målinger, hvor du bestemmer svingningstiden for forskellige længder for et matematisk pendul. Svingningstiden bestemmes ved, at du måler tiden for fx 10 svingninger og derefter dividerer tiden med 10.

l (m)									
T (s)									

Skemaet kan hentes som excelark her**.**

3) Tegn en graf med længden på 1. aksen og svingningstiden på 2. aksen i dit værktøjsprogram.

4) Udfør en potensregression.

5) Sammenlign dit resultat med den teoretiske formel fra før. Passer potensen? Passer konstanten?

6) Udregn procent-afvigelsen for begge størrelser.

L&R Uddannelse EGMONT

Nu skal du undersøge et andet pendul. Du kan selv vælge, hvad det skal være. Det vigtigste er, at du kan variere længden af pendulet. Det kan fx være en træstok, du kan save af efterhånden eller et pendul lavet af papirclips.

1) Lav en serie af målinger, hvor du bestemmer svingningstiden for forskellige længder for dit pendul.

L (m)									
T (s)									

2) Tegn igen en graf med længden på 1. aksen og svingningstiden på 2. aksen.

3) Udfør en potensregression.

4) Sammenlign dit resultat med resultatet fra før. Passer potensen? Passer konstanten?

5) Giv en forklaring på evt. forskelle.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Eksperiment 3. Afkølingskurver

I dette forsøg skal I undersøge afkølingen af to forskellige stoffer. Eksperimentet kan laves som en forlængelse af eksperiment 3 i afsnit 2 med opvarmning af vand og sand. I skal undersøge om temperaturen vil falde lineært med tiden, eller om der er en eksponentiel eller potens-sammenhæng mellem temperaturen og tiden.

Fremgangsmåde

To reagensglas fyldes med henholdsvis vand og sand. En temperaturføler placeres midt i hvert reagensglas. Føleren forbindes til et termometer eller et dataopsamlingsprogram. Reagensglassene opvarmes til omkring 80 °C vha. en kraftig lampe. Lampen slukkes og temperaturen måles fx hvert 30 sek., indtil man er tæt ved stuetemperaturen.

Stuetemperaturen skal også måles.

Behandling

I jeres værktøjsprogram afbildes temperaturen som funktion af tiden. Beskriv grafen med ord.

Tegn yderligere to grafer med de samme data, så I har 3 grafer i alt. Den første graf bruges til at undersøge, om der er en lineær sammenhæng. Den næste til at undersøge, om der er en eksponentiel sammenhæng og den sidste bruges til at undersøge, om det er en potens sammenhæng.

Hvilken af graferne passer bedst? Kan I give en fysisk forklaring på, hvorfor denne sammenhæng er bedst?

I virkeligheden passer ingen af modellerne helt. Man kan stadig sige, at temperaturen aftager, men temperaturen vil ikke nærme sig nul. Derimod vil den nærme sig stuetemperaturen T_{stue}. I stedet for temperaturen T vil vi derfor nu afbilde *temperaturforskellen* $T\text{-}T_{stue}$ som funktion af tiden.

Lav et fit til en sådan funktion og sammenlign resultatet med dine grafer fra før.

Eksperiment 4. Kratere

Mange steder rundt på Jorden kan man finde kratere efter nedslag af meteorer. Et af de mest berømte kratere er Barringer krateret i Arizona. Det har en diameter på ca. 1,2 km og er 50.000 år gammelt. Meteoren, der lavede krateret var en jern-nikkelmeteorit med en udstrækning på ca. 50 m. Energien ved ved slaget vurderes til at være ækvivalent til ca. 10 megatons TNT (ca. $4{,}2\cdot10^{16}$J), svarende til ca. 800 Hiroshima-atombomber. Det meste af meteoren fordampede ved nedslaget, men der findes stadig lidt tilbage. Resterne af meteoren kaldes Canyon Diablo.

Billede af Barringer krateret i Arizona.

Det menes, at dinosaurerne uddøde som følge af et kæmpe nedslag i Mexico for ca. 65 mio. år siden. Krateret efter dette kaldes Chicxulub-krateret og har en diameter på ca. 180 km.

Generelt for nedslag og kraterdannelse gælder, at jo større kinetisk energi meteoren har ved nedslaget, jo større diameter får krateret. Sammenhængen mellem kraterdiameteren og energien af meteoren er en potens sammenhæng

$$E=k\cdot D^3,$$

hvor *E* er den kinetisk energi af meteoren, *D* er kraterdiameteren og *k* er en konstant.
I dette eksperiment skal I undersøge denne sammenhæng.

Fremgangsmåde

Man skal bruge en papkasse eller plastikkasse med sand i. Desuden skal man bruge sten eller kugler i forskellige størrelser (helst runde). Stenene vejes og derefter laves to forsøgsserier. Anvend skemaerne nedenfor til at registrere forsøgsdata.

1) Samme sten falder fra forskellige højder, og man måler krater-diameter. Der laves mindst 3 gentagelser af forsøget for hver højde pga. usikkerheden, og gennemsnittet af kraterdiameteren beregnes.

2) Forskellige sten falder fra samme højde, og man måler kraterdiameteren igen. Dette gentages også mindst 3 gange med hver sten.

Databehandling

Den kinetiske energi af hvert nedslag beregnes normalt som $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, hvor m er massen af meteoren og v er hastigheden. I stedet for stenens hastighed måler vi her den højde, som stenen falder fra.

Hvis man antager, at den mekaniske energi er bevaret, vil stenens kinetiske energi ved nedslaget være lig den potentielle energi af stenen, når denne slippes i en vis højde. Den potentielle energi beregnes som $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$, hvor *g* er tyngdeaccelerationen, og *h* er højden.

1) Tegn energien som funktion af kraterdiameteren (gennemsnittet) i jeres værktøjsprogram. Beskriv grafen med ord.

2) Udfør en potensregression. Sammenlign den fundne potens med teorien om, at energien vokser som den 3. potens af kraterdiameteren.

Chicxulub-krateret i Mexico har en diameter på ca. 180 km.

3) Hvilken energi svarer det til ifølge jeres model?

4) Videnskabsmænd har estimeret energien til at være $4 \cdot 10^{23}\ J$ eller svarende til 10^{14} tons TNT. Sammenlign jeres resultat

Den energi, der skabte Chicxulub-krateret svarer til 5-10 milliarder Hiroshima atombomber.

Her kan man finde en tabel over alle kratere, som man kender til her på Jorden. Udvælg selv et krater i denne tabel

5) Beskriv krateret og forklar, hvorfor du valgte netop dette krater.

6) Bestem den frigivne energi for dette krater vha. din model ud fra diameteren.

7) Hvordan kan man forbedre forsøget? Er der noget man kunne tage hensyn til, som vi ikke har gjort?

8) Giv et bud på usikkerheden af kraterdiameteren ud fra dine målinger.

9) Lav en konklusion over dit forsøg. Kom herunder ind på hvad du fandt ud af, og om formålet er opfyldt?

Du kan her finde et excelark med en tabel klar til udfyldning af ovenstående.

Eksempel på data:

Serie 1: Masse af stenen/kuglen m=9,4 g

Højde	Kraterdiameter					Kraterdiameter	Energi
m	cm	cm	cm	cm	cm	Gennemsnit (m)	(j)
1,0	5,0	4,0	4,2	4,5	4,0		
0,5	3,5	3,5	4,0	4,0	4,0		
0,2	2,5	2,5	2,3	2,2	2,5		
0,7	4,5	4,0	4,5	4,5	4,2		
2,85	6,5	6,2	6,4	6,0	6,3		
5,0	7,0	6,8	6,9	7,0	6,9		
6,0	7,2	7,3	7,0	7,4	7,1		

Serie 2: Højden er h=2,85 m

Højde	Kraterdiameter					Kraterdiameter	Energi
g	cm	cm	cm	cm	cm	Gennemsnit (m)	(j)
32,9	8,0	8,1	7,8	7,9	7,0		
200	13	13,2	13,1	13,0	14,5		
100	9,0	12,0	11,0	11,0	11,9		
721	18,0	18,2	18,1	18,2	18,3		
16,6	6,54	6,0	6,4	6,2	6,0		
46,7	8,0	8,5	9,0	8,2	9,0		

ISBN 9788770668279

Ovenstående tabeller kan hentes i excel-versioner her.

Eksperiment 5. Statistisk of tyngdekraft

Dette eksperiment er en videre bearbejdelse af eksperiment 2 fra afsnit 2, hvor I bestemte værdien af g, tyngdeaccelerationen. Hvis man samler alle klassens målinger, kan man få en bedre værdi for g.

1) Saml alle klassens resultater. Bestem middelværdi og kvartilsæt

2) Sammenlign middelværdien og medianen med tabelværdien for g. Passer den ene bedre end den anden? Hvad kan være forklaringen på en evt. forskel? Normalt vil man bruge middelværdien som resultat. Hvad kan fordelen være ved at bruge medianen i stedet for?

3) Tegn et boxplot over resultaterne. Hvor ligger tabelværdien for g i forhold til boxplottet?

4) Ud fra boxplottet, hvor mange cifre er det så rimeligt at anvende til jeres værdi af g?

Eksperiment 6. Statistik og frysepunkt for saltvand

Dette eksperiment er en videre bearbejdelse af eksperiment 4 fra afsnit 2, hvor I bestemte sammenhængen mellem saltindholdet i vand og frysepunktet. Hvis man samler alle klassens målinger, kan man få en bedre lineær sammenhæng, hvor man tager hensyn til måleusikkerhed.

1) Saml alle klassens resultater for hver af de anvendte saltkoncentrationer. For hver saltkoncentration bestemmer I kvartilsættet for frysepunktet.

2) Indtegn på samme måde som før frysepunkt som funktion af saltkoncentration, men i stedet for kun at anvende jeres egen værdi, så indtegner I et boxplot lodret over hver saltkoncentration.

3) Udfør en ny lineær regression, hvor I tager hensyn til alle resultaterne. Vurder jeres resultater i forhold til den første graf, som I selv lavede.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Eksperiment 7. Tykkelsen af en laserstråle

I dette forsøg skal I undersøge, hvordan bredden af strålen fra en laser vokser med afstanden fra laseren.

Stil laseren på et passende, fast underlag. Hold et stykke hvidt papir vinkelret på strålen i en given afstand og mål diameteren af lysstrålen. Forsøget gentages 5-10 gange.

Det er vigtigt, at lokalet er tilstrækkeligt mørkt til, at afgrænsningen af strålen er tydelig.

Databehandling

Hvilken sammenhæng forventer I? Test om jeres forventninger holder stik ved at undersøge om dataene passer både med en lineær, en eksponentiel og en potensmodel.

Eksempel på et typisk datasæt fra et forsøg:

Afstand (m)	Diameter (mm)
1	3
2	5,5
3	9
4	12
5	14
6	16
7	19
8	22
9	24
10	26

Tabellen kan hentes som excelark **her**.

Eksperiment 8. Temperatur og udstråling

Når man opvarmer jern, kan man opvarme det til jernet fx er rødglødende. Man kan også opvarme det, til det er hvidglødende. Udtrykkene rødglødende og hvidglødende fortæller, at jernet har forskellig udstråling og farve i de to tilfælde. Dette skyldes, at jernet har forskellige temperaturer. Temperaturen bestemmer både udstrålingen, samt hvilken farve legemet vil have.

Det gælder generelt for alle legemer, at der er en sammenhæng mellem udstrålingen fra et legeme og legemets temperatur. Intensiteten af udstrålingen F er proportional med temperaturen *T* i fjerde potens, altså:

$$F = \sigma \cdot T^4$$

hvor *F* måles i målt i W/m^2 og *T* måles i K (Kelvin).

Konstanten σ kaldes Stefan-Boltzmanns konstant og har værdien $5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$.

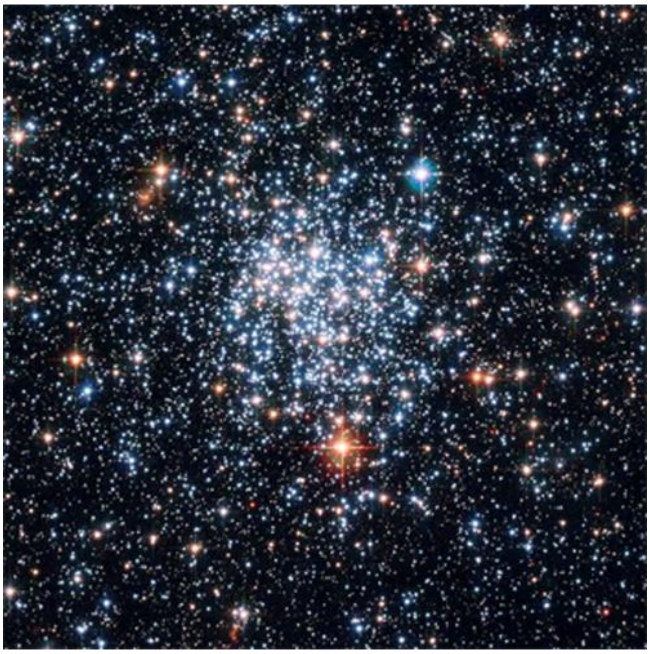
Sammenhængen kaldes Stefan-Boltzmanns lov.

Udstrålingen fra Solen og andre stjerner følger også denne lov. Da farven også hænger sammen med temperaturen ser nogle stjerner derfor rødlige ud, mens andre stjerner er gullige eller blålige. Vores egen sol har en overfladetemperatur på ca. 5800 K.

På billedet ses dobbeltstjernen Albireo fra stjernebilledet Svanen. Den gule stjerne har en overfladetemperatur på ca. 4100 K, mens den blå stjerne er ca. 11.000 K.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist



Stjernehoben NGC 265 Her ses tydeligt de forskellige farver af stjernerne alt efter deres overfladetemperatur.

I dette eksperiment skal I undersøge, hvordan udstrålingen fra en glødepære ændrer sig, mens den varmes op.

Fremgangsmåde

I skal undersøge udstrålingen fra en glødepære. En termosøjle placeres derfor ved pæren og forbindes til et følsomt voltmeter, der kan måle spændinger i μV. Pæren forbindes til et amperemeter og et voltmeter. De forskellige værdier indføres efterhånden i skemaet.

Alternativt kan man beregne effekten $P=U\cdot I$, der også vil være proportional med T^4 og benytte P i stedet for i databehandlingen.

1) Mål først resistansen R_{20} af glødetråden i pæren ved stuetemperatur (20 °C). Start med at lade glødelampen gløde ganske svagt, mens I indstiller amperemetret og voltmetrene på de rigtige måleområder. I skal starte med så lav strømstyrke som muligt gennem pæren. Det tager nemlig rigtig lang tid at afkøle pæren, efter den først har været varm.

2) Mål nu sammenhørende værdier af strømstyrken I igennem pæren, spændingen U over pæren og spændingen U_{termo} over termosøjlen. Utermo er proportional med intensiteten af lyset, dvs. $U_{termo}=k\cdot T^{4}$.

3) Resistansen R af glødetråden ved de forskellige temperaturer beregnes ud fra U og I vha. Ohms lov $(U = R\cdot I)$.

4) Den afsatte effekt i glødetråden P ved forskellige temperaturer beregnes ud fra effektloven $P = U\cdot I$.

5) Temperaturen t bestemmes dernæst ud fra ligningen: $R(t) = R_{20}\cdot(1 + a(t - 20°\mathrm{C}))$

   hvor t er temperaturen i °C, R_{20} er resistansen ved stuetemperaturen 20 °C, $R(t)$ er resistansen ved temperaturen t og a er temperaturkoefficienten for materialet, glødetråden er lavet af. Fx er a 0,00481/°C for wolfram.

6) Til sidst beregnes temperaturen T i kelvin

$R_{20} =?$

U(V)	I(A)	U_{termo} (μV)	R(Ω)	P(W)	t(°C)	T(K)

Du kan hente et excelark med tabellen **her**.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

Uddannelse
EGMONT

Databehandling

1) Indtegn i jeres værktøjsprogram en graf med temperaturen T på 1. aksen og U_{termo} på 2. aksen. Ser det ud til, at punkterne følger en potens sammenhæng?

2) Udfør en potensregression på målepunkterne. Sammenlign jeres resultat med det forventede.

3) Konstanten k kan ikke direkte sammenlignes med Stefan - Boltzmanns konstant σ. Hvorfor ikke?

4) Lav et residualplot. Er der nogen systematiske afvigelser?

5) Hvilke fejlkilder kan der være ved forsøget? Er der fx nogle fejlkilder eller antagelser, man kunne undgå?

6) Brug jeres model til at svare på følgende:

    a. Hvor meget vokser udstrålingen, hvis temperaturen stiger med 50 %?

    b. Hvis temperaturen vokser til det dobbelte. Hvor meget stiger udstrålingen så?

    c. Hvor meget skal temperaturen stige for, at udstrålingen stiger til det dobbelte?

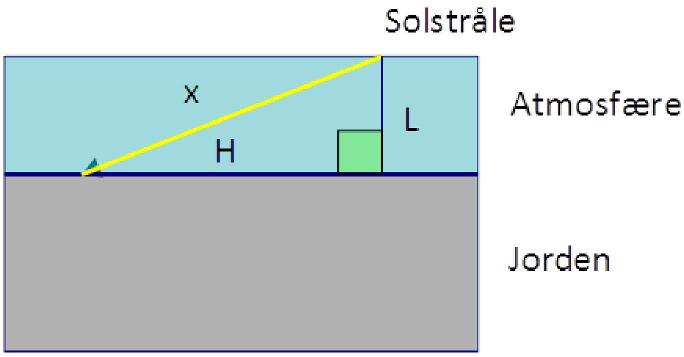
U(V)	I(A)	U_{termo} (μV)	R(Ω)	P(W)	t(°C)	T(K)
4,06	0,389					
3,405	0,3511					
2,63	0,3033					
1,87	0,2501					
1,28	0,2025					
0,71	0,1499					

Du kan hente et excelark med tabellen **her**.

Eksperiment 9. Solarkonstanten

I dette forsøg skal I måle solarkonstanten S_0, som er intensiteten af solstrålingen ovenover atmosfæren.

Når Solens stråler trænger gennem atmosfæren vil noget af strålingen blive absorberet, og jo længere vej gennem atmosfæren, jo mere vil blive absorberet undervejs. Derfor føles Solen også koldere om morgenen/aftenen end om middagen, selv om man begge gange vender ansigtet direkte mod den.



Solstrålingen gennem atmosfæren.

Antag at Jorden med god tilnærmelse er flad. Antagelsen er god her, da atmosfærens højde er meget lille sammenlignet med Jordens radius. Atmosfærens højde betegnes *L*. Solhøjden (den vinkel der angiver Solens højde over horisonten) kaldes *H*, og længden af solstrålingens vej gennem atmosfæren betegnes *x*.

Argumenter for, at der gælder, at $x = \frac{L}{\sin(H)}$.

Da hver meter atmosfærisk luft må forventes at absorbere den samme procentdel af solstrålingen, må vi forvente, at intensiteten *I* af strålingen er en aftagende eksponentiel funktion af længden *x*.

Argumenter for dette.

Den eksponentielle sammenhæng mellem *I* og *x* kan skrives på formen (se evt. nærmere i kapitel 4, afsnit 5):

$$I(x) = S_0 \cdot e^{-k \cdot x}$$

hvor S_0 er solarkonstanten og *k* er en konstant. Denne ligning kan omskrives til

$$I(H) = S_0 \cdot e^{-k \cdot L \cdot \frac{1}{\sin(H)}}$$

Altså: Hvis vi afbilder intensiteten af strålingen som funktion af $\frac{1}{\sin(H)}$ vil vi få en eksponentielt aftagende funktion, hvor solarkonstanten vil svare til *b*-tallet.

Fremgangsmåde

Optag med ca. en halv times mellemrum intensiteten af solstrålingen (husk at måleapparatet holdes vinkelret på retningen til Solen), og mål samtidigt solhøjden. Her kan man fx anvende en sekstant, hvis man har sådan en. Alternativt kan man tage et af fysiksamlingens stativer, måle højden af dette *h* samt længden af skyggen *l* og så finde solhøjden ud fra $\tan(H) = \frac{h}{l}$. Det er vigtigt, at stativet står på et vandret underlag, og at I måler den vandrette længde af skyggen!

Databehandling

1) Beregn solhøjden og dernæst størrelsen $\frac{1}{\sin(\mathrm{H})}$.

2) Afsæt intensiteten som funktion af $\frac{1}{\sin(\mathrm{H})}$ i et koordinatsystem.

3) Udfør en eksponentiel regression. Solarkonstanten kan da findes som konstanten *b* i forskriften.

I eksemplet nedenfor (tabellen) er højden af stativet 60 cm. Intensiteterne vokser og aftager derefter, fordi målingerne blev startet om formiddagen og afsluttet om eftermiddagen.

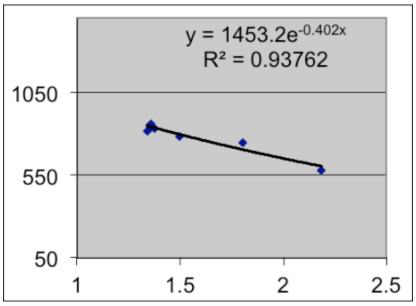
Eksempel på data

Længde af skyggen (cm)	Intensitet (W/m^2)
116,5	585
55	861
56,5	834
53,5	822
54,5	841
66,5	787
90	750

Du kan hente tabellen som excelark her.

Eksponentiel regression på disse data giver grafen på figuren samt regneforskriften: $y = 1453{,}2 \cdot e^{-0{,}402 \cdot x}$.

Solarkonstanten aflæses her til 1453 W/m^2. Det giver en afvigelse på $\frac{1453-1367}{1367} \cdot 100\% = 6{,}3\%$.



Overvej til sidst om mindre skyer hele dagen, først på dagen eller sidst på dagen giver anledning til fejl, og i givet fald hvad de betyder.

Eksperiment 10. Afstandskvadratloven

I dette forsøg skal I lave et eksperiment, der efterprøver afstandsloven. Denne udtaler sig om, hvordan intensiteten *I* af lyset aftager, når vi fjerner os fra en stjerne eller en anden ’punkt-formig’ lyskilde. Intensiteten måles i Watt pr. kvadratmeter (W/m^2) og fortæller noget om, hvor koncentreret lyset er. Efterhånden som lyset fjerner sig fra stjernen, spredes det ud over et stadigt større areal, nemlig overfladen af en kugle med radius lig afstanden til stjernen. Intensiteten, som er effekten, der rammer 1 m^2, bliver derfor mindre og mindre.

En kugles overfladeareal er $4\pi \cdot r^2$, hvor *r* er kuglens radius, så intensiteten i afstanden *r* er givet ved

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot r^2}$$

hvor *P* er stjernens effekt.

Forsøget:

Til forsøget skal I bruge en pære og en lysmåler.

Pæren stilles i en række afstande fra lysmåleren. Det er vigtigt, at lysmåleren i hvert tilfælde peger direkte imod pæren, samt at I måler afstanden så præcist som muligt. Mål afstanden fra kanten af lysmåleren til midten af pæren.

Det er vigtigt, at pæren ikke er så tæt på lysmåleren, at denne bliver overmættet. Flyt pæren fra lysmåleren indtil I kan se, at intensiteten begynder at falde. Lad dette være den mindste afstand, I bruger.

Skriv jeres måleresultater ind i skemaet her:

Intensitet I	Afstand r	P=$I \cdot 4\pi \cdot r^2$

Du kan hente tabellen som excelark her.

ISBN 9788770668279

Af Michael Olesen og Dorthe Agerkvist

L&R Uddannelse EGMONT

Databehandling

Metode 1:

For hver måling ganger man intensiteten med arealet af kugleoverfladen. Hvis afstandsloven er korrekt, skulle man så finde *P*; dvs. vi skal få det samme tal hver gang!

Bliver værdien konstant? Hvis ikke, er det så fordi afstandsloven ikke passer, eller skyldes det, at jeres målinger ikke er tilstrækkeligt nøjagtige. Prøv at vurdere hvor præcist I har målt, når I konkluderer på forsøget.

Metode 2:

Tilpas den bedst mulige potensfunktion. Potensen skal gerne være -2, og *b*-tallet giver så effekten ud fra $b = \frac{P}{4\pi}$.

Metode 3:

En lille omskrivning giver $I = \frac{p}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2}$. Dvs. at intensiteten er en lineær funktion af $1/r^2$. Lineær regression er da også en mulighed. Hvordan finder man effekten i dette tilfælde?

Metode 4 – Korrektion af mulig systematisk fejl:

Ofte vil man i dette eksperiment opleve, at hvis man bruger metode 1, vil den beregnede effekt ikke blive konstant, men derimod vokse med afstanden. De to andre metoder vil have tilsvarende afvigelser.

Dette skyldes, at strålingen ikke registreres i den forreste del af intensitetsmåleren, men et stykke inde. Man bør derfor lægge en ukendt længde r_o til alle afstande, så ligningen i stedet bliver

$$I = \frac{P}{4\pi \cdot (r + r_0)^2}.$$

En omskrivning giver, at

$$\sqrt{\frac{p}{4\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{I}} - r_0.$$

Konklusion: Afstanden *r* skulle være en lineær funktion af

$$\frac{1}{\sqrt{I}}$$

P og r_0 kan bestemmes ud fra regressionen.

Eksempel på forsøgsdata

Afstand (cm)	10	15	20	25	30	35	40
Lysintensitet (mW/cm^2)	0,631	0,399	0,255	0,178	0,134	0,107	0,095

Du kan hente tabellen som excelark **her**.