Studieretningskapitel

Hvad er matematik?

1

Grundbog

Kapitel 10
Matematik og Kulturfag

Bjørn Grøn
Bjørn Felsager
Bodil Bruun
Olav Lyndrup

Lindhardt og Ringhof

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Kapitel 10 – Matematik og kultur

Indhold

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10. Matematik og kultur

Matematikkens udvikling er flettet sammen med hele den kulturhistoriske udvikling. Bestræbelser på at forstå en kaotisk og ofte truende omverden førte til, at vi med tankens magt prøvede at skabe orden, at systematisere vores iagttagelser og at fastholde disse ved at genskabe naturens mønstre og selv skabe geometriske varianter.
Vi har skabt orden i vores egne forestillinger ved at tegne og måle, og regler og manualer blev til geometrisk teori og til praktiske hjælpemidler og maskiner. De matematiske teorier fik deres egen indre udvikling, men blev også uundværlige for navigation og opmåling af verden, for den arkitektur, vi omgiver os med, og den kunst, der forbinder os med verden.

Kapitlet om matematik og kultur rummer forslag til samarbejde med andre fag på mange felter og illustrerer samtidig de 5 spor i matematikkens lange udvikling:
1) Mønster- og kunstsporet
2) Bevægelses- og maskinsporet
3) Det aksiomatisk deduktive spor
4) Navigations- og astronomisporet
5) Bygge- og arkitektursporet

Et samarbejde i **almen studieforberedelse** om temaer som *Erkendelsesteori – Argumentationsteknik i fagene – Videnskabsteori* kan hente inspiration, materialer og forslag til forløb i afsnit 2.

Et samarbejde i **almen studieforberedelse** om *Verdensbilleder* kan hente inspiration, materialer og forslag til forløb i afsnit 3.5 og afsnit 4.2

Et samarbejde med faget **historie** om *Opdagelsesrejser* kan hente inspiration, materialer og forslag til forløb i afsnit 4.3

Et samarbejde i **almen studieforberedelse** om *De lange linjer i kulturhistorien* kan hente inspiration, materialer og forslag til forløb i afsnit 1.3 om den græske tanke og i afsnit 5.2 om arkitektur.

Kapitlet rummer materialer til forberedelse af **studieture**, fx i afsnit 3 om billedkunst og skulptur og i afsnit 5 om *Akvædukter*, *Arkitektur* og indretning af byernes *Pladser*.

Kapitlet rummer materialer til et samarbejde med faget **religion** om *Erkendelsesteori* og *Uendelighed* og til et samarbejde med faget **oldtidskundskab** om *Den græske tanke*, om *Græsk kunst, litteratur og arkitektur*.

Kapitlet rummer i afsnit 6 en række oplæg til, hvordan man i samarbejde med faget **historie** kan arbejde med *Kildematerialer*.

Kapitlet rummer i afsnit 7 samt i en række øvelser gennem hele kapitlet oplæg til, hvordan man i samarbejde med faget **dansk** kan arbejde med *Formidling*.

10.1 Indledning. De lange linjer i kulturhistorien

Grækerne er et indoeuropæisk folk, der kom nordfra i flere bølger, og som omkring år 1000 f.v.t. havde gjort sig til herrer over det græske fastland, de omliggende øer og Lilleasiens vestkyst. De organiserede sig i små uafhængige bystater, både hjemme i »moderlandet«, og hvor de i øvrigt slog sig ned. De udgjorde således en kulturel, men kun sjældent politisk enhed, i modsætning til de meget centralistiske flodriger i Ægypten og Mesopotamien.

Vi kender ikke meget til den tidligste historie før og omkring 1000-tallet, den, der danner baggrund for de store fortællinger *Iliaden* og *Odysséen*, som Homer skrev ned ca. år 800 f.v.t. Der har været et tæt samkvem med andre folkeslag i regionen, og fra fønikerne og de semitiske folk overtog de *skriften* og skabte det græske alfabet, som resten af Europa siden eftergjorde. Grækerne brugte også bogstaverne som *talsymboler*. De skrev utrolig meget, men vi har kun meget lidt originalt skriftligt materiale fra denne tidlige periode. Og selv fra højdepunkterne i den græske kultur er det beskedent, hvad der er bevaret af originaltekster.

Et af de ældste bevarede fragmenter af Euklids elementer (Bog 2, sætning 5) fundet i Oxyrhynchus 150 km syd for Cairo og dateret til ca. 100 e.v.t.

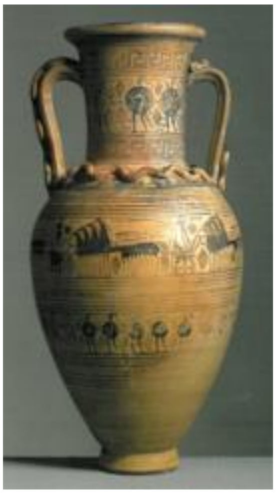
I antikkens Grækenland kender vi således en masse personer, men kun lidt af, hvad de skrev, er bevaret i en form, så vi kan være 100 % sikre på, at det, vi har foran os, er lig med det oprindelige. Fra oldtidens Ægypten og ikke mindst fra Mesopotamien har vi derimod et væld af skriftlige overleveringer, men vi aner ikke hvem, der skrev det ned, eller hvem, der tænkte tankerne.

ISBN 9788770668279

Påvirkninger fra den minoiske kultur

Det første store kulturrige i Europa opstår på Kreta nogenlunde samtidig med, at den ægyptiske kultur vokser frem. Den kaldes den *minoiske kultur*, opkaldt efter sagnkongen Minos, men af og til betegnes den også *paladskulturen* pga. de imponerende paladser, der blev skabt i det forholdsvis lille øsamfund. Paladset i Knossos havde fx et areal på 20.000 m^2 og havde både kloakker og rindende vand. De havde et skriftsprog, som det lykkedes at tyde i 1950'erne, men vi har ikke fundet skriftlige overleveringer om deres matematiske kunnen.

Ved at studere deres arkitektur og deres kunstneriske udtryk får vi imidlertid et klart indtryk af en tænkning, der var systematisk og havde et højt abstraktionsniveau. De dyrkede symmetrier og spejlinger og udviklede abstrakte mønstre, ikke mindst spiraler. Når vi tegner mønstre, er det næppe en direkte gengivelse af noget, vi ser i naturen. Men vil vi forstå verden, har vi behov for at skabe orden i kaos, og det gør vi ofte med mønstre. Mønstre er abstrakte, og derved kan tilsyneladende forskellige fænomener illustreres med samme mønster. Mønstergenkendelse er en helt grundlæggende måde, vi erkender verden på, og sådanne abstrakte modeller er forløbere både for vores talbegreb og for matematikkens geometriske modeller af verden.



Den minoiske kultur går under omkring 1300 f.v.t. og den beslægtede mykenske kultur på fastlandet gik til grunde et par hundrede år senere. Vi kender ikke årsagerne, og vi ved heller ikke, hvilke folkeslag de var, men deres myter og deres kunstneriske udtryk blev båret videre af de græske stammer, og det i en sådan grad, at man kalder tiden 900-700 for den geometriske tid. Det er let at forstå, når man ser eksempler som disse, såkaldte *amforaer*. Mønstrene er nu blevet mange og komplicerede, som det illustreres af dette udvalg.

Øvelse 1
Udvælg fx 5 mønstre fra illustrationerne, og forklar, hvordan man kunne tegne sådanne mønstre.
Hvilke redskaber skulle du evt. bruge? Vi vender tilbage til tegning af spiraler i afsnit 5.2.

Det er også i denne periode, at de mundtlige fortællinger om store bedrifter og om myter bliver nedskrevet. Herved fastholdes en lang række ikoniske fortællinger, og de bliver så også gengivet på krukker og vægge af kunstnere og kunsthåndværkere, der udnytter deres tekniske kunnen – *at beherske stramme regler giver en større frihed til kreativ udfoldelse*.

Påvirkninger fra de store flodkulturer
Omkring år 600 f. v.t. blev presset fra perserne mod Ionien – kolonierne på Lilleasiens (det nuværende Tyrkiets) syd- og vestkyst og øerne ud for – så truende, at stadigt flere emigrerede. De fleste rejste vestpå, hvor de slog sig ned langs middelhavskysten, og specielt grundlagde de en række kolonier i Syditalien.

Ionien havde samtidig været det område, hvor påvirkningen fra de kulturelt højerestående folkeslag var mest umiddelbar. Derfor er de første store filosoffer og matematikere, vi hører om, næsten alle fra disse *joniske kolonier*, fx Thales (ca. 625 – ca. 547), som kom fra Milet, og Pythagoras (ca. 560 – ca. 450), som kom fra øen Samos. Begge drog fra deres hjemstavn og besøgte på lange rejser de to store flodriger. I kapitel 3 hørte vi om Thales' rejser til Ægypten.

Om Pythagoras opstod der allerede i oldtiden mange myter, bl.a. fordi kredsen omkring ham var et lukket broderskab, præget af religiøse forestillinger. Ifølge overleveringen måtte de ikke skrive noget ned om deres

ISBN 9788770668279

viden og indsigt, da det så kunne falde i hænderne på uvidende, der ville misbruge det. Men tager vi det med et gran salt, kan hans historie måske alligevel illustrere, *hvordan den græske matematik blev til.*

Under rejser til Mesopotamien har han sikkert fået indtryk af matematikkens høje stade der, men denne matematik er snarere en stor samling regler og tabeller, opsamlet pr. erfaring gennem tusind år og nedskrevet på små lertavler, end det er egentlig videnskab eller grundlag for filosofisk overvejelse. Når man nysgerrigt spørger til, om der ikke er en dybere årsag til bestemte regler, så går man *analytisk* til værks. Man vil forstå og have en forklaring. Det blev en central del af den græske tanke.

10.1.1 Pythagoræerne

Da Pythagoras kommer til Syditalien, samler han en kreds om sig, og de organiserer sig i et lukket, religiøst præget broderskab. Et medlem af inderkredsen i det pythagoræiske broderskab blev kaldt en *matematiker*, ud fra ordet *matematik*, der i sin græske version betød »det, der kan læres eller vides«. Matematik var altså betegnelsen for det pensum, som Pythagoras underviste sine elever i.

Opdagelser som fx den smukke sammenhæng mellem sidelængderne i retvinklede trekanter, eller at tonehøjden i musik kunne karakteriseres ud fra længden af en svingende streng kan have bestyrket Pythagoras i den opfattelse, at alt i verden styres af og kan beskrives ved hjælp af enkle regler. Udsagnet "Alt er tal" er blevet tillagt ham.

Øvelse 1
Pythagoræerne fulgte også *mønstersporet* og ledte efter mønstre i talrækken, som kunne afdække noget om verdens indretning. De interesserede sig bl.a. for de såkaldte *figurtal*. Find via nettet ud af, hvad dette er, og hvilke sammenhænge der gælder for fx trekanttal, kvadrattal og femkanttal.

Men ifølge overleveringen opdagede pythagoræerne også på et tidspunkt, at der findes såkaldt *inkommensurable størrelser*, der geometrisk set svarer til opdagelsen, at der blandt tallene findes irrationale tal, dvs. tal, der ikke kan skrives som brøker. Matematikhistorikeren Proklos skrev i det 5. århundrede e.v.t., at pythagoræerne mente, de havde afsløret en brist i gudernes konstruktion, og de svor, at de aldrig ville afsløre deres hemmelige opdagelse. Men sådan noget slipper ud: »*De, der bragte disse størrelser frem i det åbne, omkom ved skibbrud alle som én. For det uudsigelige og formløse må nødvendigvis hemmeligholdes*«. Proklos er en af vores vigtigste kilder, på trods af at han først levede og skrev omkring 1000 år efter begivenhederne. Proklos havde nemlig adgang til en mængde af de skrifter, der siden er gået tabt, og har været så betænksom over for eftertiden at bringe lange citater fra dem.

Ifølge traditionen skulle især den sidstnævnte opdagelse af de inkommensurable størrelser have kastet den pythagoræiske skole ud i en krise, der af mange blev anset for værende et afgørende vendepunkt i matematikkens historie. Reelt ved vi imidlertid ikke meget konkret om den pythagoræiske skole, og den berømte krise kan meget vel have været en langt senere tids pædagogiske dramatisering af begivenhederne. I afsnit 2.3 vender vi tilbage til opdagelsen af de inkommensurable størrelser.

Mange af historierne om Pythagoras skal som sagt tages med et gran salt. De fleste stammer fra en kilde Lamblichus, der først er nedskrevet mere end 900 år efter, Pythagoras levede. Og næsten samtidige kilder, som fx Aristoteles' værker, der omtaler Pythagoræerne i et rimeligt omfang, giver *ikke* belæg for en omfattende krise.

Øvelse 2
I den podcast(engelsk) af Peter Adamson, Kings College i London, du kan hente **her**, diskuterer han Pythagoras´ og Pythagoræernes rolle i matematik og filosofi.
Giv med udgangspunkt i Peter Adamsons kildekritiske præsentation en kort beskrivelse af Pythagoras som matematiker og filosof.

10.1.2 Det græske mirakel

Den græske matematik er først og fremmest kendt gennem værker af Euklid, Archimedes, Apollonius og Ptolemaios. Ingen af dem arbejdede i Athen, men Athen og Athens korte, intense storhedstid var en forudsætning.

Selve den grundlæggende idé hos Euklid, nemlig først at klargøre præcis hvilke forudsætninger *(= aksiomer)* og *definitioner*, vi bygger på, og derefter logisk udlede *(= deducere)* sætninger herudfra, udvikles i 400-tallet af en række store filosoffer og matematikere (de fleste var begge dele dengang). Metoden kaldes den *aksiomatisk-deduktive metode*, og den har ikke alene præget al matematik siden, den har også spredt sig langt ud over matematikkens område.

Metoden vandt tilsyneladende så stærkt frem, som tilfældet var, på grund af et meget frugtbart samspil mellem filosofien, matematikken og udviklingen af demokratiet.

Rammen var Athen, der med sin autoritet og stærke økonomi efter sejren i Perserkrigene (omkring 480 f.v.t.) fremstod som den absolut førende blandt de græske bystater. Den ledende politiker i Athen var *Perikles* (500 – 429 f.v.t.). Han kom selv fra en af de store adelsslægter, men han var drivkraften i indførelse af de første elementer af demokrati, hvor nogle af de ledende nu skulle vælges af en folkeforsamling. Det blev Perikles selv, der år efter år blev valgt, og dermed kunne optræde på en stærkere baggrund. For at vinde folk for deres synspunkter, i store som små forsamlinger, studerede politikerne retorik og veltalenhed hos filosofferne.

Perikles gjorde en aktiv indsats for at få kunstnere og filosoffer, forfattere og naturvidenskabsmænd til at flytte til byen. Det lykkedes, og det skabte grundlag for den enestående kulturelle blomstring, der fandt sted i især 400-tallet f.v.t. Filosoffen og matematikeren Anaxagoras fra Klazomenae blev hentet for at være særlig rådgiver for Perikles. Historikeren Herodot fra Halikarnassos fik til opgave at få nedskrevet historien om perserkrigene, sikkert ud fra samme filosofi, som da Saxo i Valdemartiden blev sat til at skrive Danmarks historie – historien skulle også bruges til moralsk oprustning og til at fremme bestemte politiske synspunkter. Også kunstnere som billedhuggeren Fidias og skuespilforfatteren Sofokles kom til Athen på opfordring fra Perikles.

Vi taler om *det græske mirakel*, fordi der her på et begrænset område og i en befolkning, der ikke talte voldsomt mange, på bare 150 år var en koncentration uden lige inden for kunst og videnskab. Det var en historisk set kort periode. Allerede efter den peloponnesiske krig og nederlaget til Sparta (år 404 f.v.t.) går det kunstneriske liv i Athen ind i sit efterår. Naturvidenskaberne fortsætter dog flugten mod tinderne et par hundrede år endnu.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Hellenismen – Centrum flytter fra Athen til Alexandria

Nedgangen for Athen fører til opløsning af forbundet af græske bystater og dermed nyt pres fra Perserriget. Men sidst i 300-tallet f.v.t. træder nye aktører fra en af de nordlige græske provinser, Makedonien, ind på banen. Alexander den Store, der havde filosoffen Aristoteles som huslærer, besejrede grækernes traditionelle fjende Perserne i tre store slag. Hans rige strakte sig langt ind i Asien og dækkede dele af det nordvestlige Indien. Det fik stor betydning for udvekslingen mellem græsk kultur og indisk kultur, der optog den græske astronomi, men senere udviklede sig selvstændigt i andre retninger end den græske matematik. Ægypten bød Alexander velkommen, og han sendte en arkitekt for at bygge en ny hovedstad for sit ægyptiske rige – Alexandria. Efter Alexanders tidlige død overtog en af hans makedonske generaler Ægypten og byggede et *museum*, en enorm forskningsinstitution med tilhørende bibliotek i Alexandria. Her samledes al denne tids viden, og her arbejdede i de næste 700 år en ubrudt kæde af de bedste videnskabsmænd – samt en enkelt videnskabskvinde – på at bevare og udbygge denne viden, enten gennem helt nyskrevne værker eller via omfattende kommentarer til de mest betydende værker.

Alexander den stores rige (323 fvt.)

ISBN 9788770668279

10.1.3 Euklids matematik – Den aksiomatisk deduktive metode

Det var i Alexandria, Euklid omkring 300 f.v.t., som en af de første matematikere her, skrev sit hovedværk, Elementer, der samlede og systematiserede den tids matematiske viden og kanoniserede den geometriske tilgang til matematikken.

Vi vil i det følgende illustrere metoden med en detaljeret gennemgang af Euklids bevis for den allerførste sætning i Elementerne. Dernæst vil vi give en række eksempler på, hvorledes den euklidiske matematik har påvirket tænkningen siden.

Pythagoras' sætning i den græske udgave af Euklids Elementer. Konstantinopels version af Euklids Elementer fra 888 befinder sig i dag på Bodleians bibliotek i England. Biblioteket har lagt en scanning ud på nettet, så alle med selvsyn kan gennemse ophavet til alle de udgaver af Euklids Elementer, der findes. Euklids Elementer kom i første omgang tilbage til Vesteuropa gennem den arabiske oversættelse.

Øvelse 1. Bevis for Euklids første sætning

Du finder Bodleians 888-udgave af Euklids Elementer **her**.

Bog I begynder med 23 definitioner, 5 postulater og 5 aksiomer, som er grundlaget for hele den Euklidiske geometri. Du kan hente hele samlingen **her**.

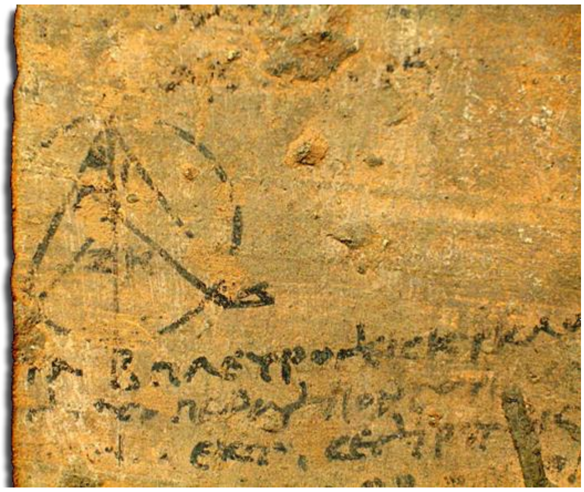
Du skal nu gennemføre beviset for sætning I.1:

> "At konstruere en ligesidet trekant på en begrænset ret linje."

Find selv undervejs de få udvalgte definitioner, postulater og aksiomer, der er nødvendige for at kunne bevise denne sætning.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Potteskår fundet i den ægyptiske by Elephantine. Inskriptionen er et lille fragment fra Euklid. Potteskåret er dateret 1-200 år efter Euklid skrev sit værk. Det er givetvis fra en undervisningssituation.

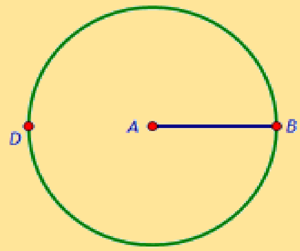
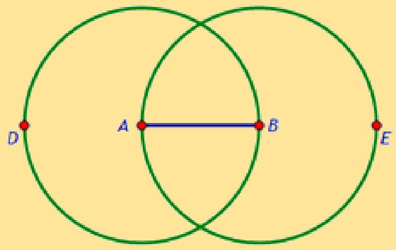
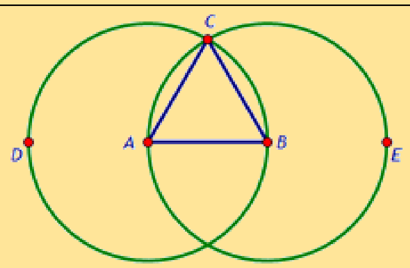
a) Find først sætningen og beviset gengivet i Bodleians udgave **her**, og overvej, hvorfor den viste figur netop resulterer i konstruktionen af en ligesidet trekant.

Nedenfor er beviset for sætningen angivet med kommentarer (grøn tekst) og den tilhørende konstruktion.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

b) Gennemarbejd beviset ved samtidigt at gennemføre konstruktionen i dit dynamiske geometriprogram:

Bevis:	Konstruktion:
Lad AB være den givne rette linje. Der skal nu konstrueres en ligesidet trekant på AB. *Kommentar:* Linjestykket AB er altså afsat tilfældigt.	
Lad cirkel BCD være tegnet med A som centrum og AB som radius [ifølge Postulat 3], … *Kommentar:* Punktet B er altså et randpunkt. Punktet C er slet ikke konstrueret endnu, og punktet D indføres kun for at kunne referere til cirklen som cirklen BCD!	
… og endvidere cirkel ACE med B som centrum og BA som radius, … *Kommentar:* Punktet A er altså et randpunkt for cirklen. Punktet C er stadigvæk ikke indført, og punktet E indføres kun for at kunne referere til cirklen ACE!	
og lad de rette linjer CA og CB være trukket fra punktet C, hvor cirklerne skærer hinanden, til punkterne A og B [ifølge Postulat 1]. *Kommentar:* Først til allersidst røbes det, at C er et skæringspunkt mellem de to cirkler, hvilket selvfølgelig fremgår af den færdige figur. Derefter kan vi trække linjestykkerne CA og CB fra C til henholdsvis A og B. Herefter er den ligesidede trekant ABC færdigkonstrueret.	
Da punktet A er centrum i cirklen CDB, er AC lig AB (i følge Definition 15); og da punktet B er centrum i cirklen CAE, er BC lig BA. Det blev også bevist, at CA er lig AB. Både CA og CB er altså lig AB. Men de (størrelser), som er lig samme tredje (størrelse), er lig hinanden [ifølge Aksiom 1]. Altså er CA lig CB. De tre linjer CA, AB og BC er altså lige store. Derfor er trekant ABC ligesidet [ifølge Definition 20]. Og den er konstrueret på den rette linje AB. Hvilket skulle gøres. *Kommentar:*	

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Denne sidste del er en minutiøs godtgørelse af, at trekanten som påstået faktisk er ligesidet – måske svarer den til dit svar i spørgsmål a)?

Til de følgende øvelser, hvor vi hele tiden refererer til Euklids matematik, kan det være en fordel at have et vist overblik over hans system og at have orienteret sig i det på forhånd. Du kan få en god indføring i Euklids matematik, med forklaringer på alle definitioner og aksiomer og med en demonstration af metoden, via en gennemgang af de forskellige sætninger og konstruktioner, hvis du går ind **her**. Du kan hente en dansk udgave af definitioner postulater og aksiomer **her.**

Øvelse 2. Strukturen i Euklids Elementer
Gå ind på hjemmesiden, læs de første fire propositioner i kapitel I, og udfyld et skema som dette, hvor du krydser af, hver gang Euklid anvender definitioner, forudsætninger eller allerede viste sætninger. Hos Euklid skelnes mellem *postulater*, der er ting, vi tager for givet i et bestemt område, som her plangeometri, og *aksiomer*, der er ting, vi tager for givet i al matematik. I moderne matematik skelner vi ikke – det hele kaldes aksiomer. Notér også, hvis Euklid bruger noget, du mener, han ikke har belæg for.

Definitioner	Postulater					Aksiomer					Sætninger eller konstruktioner					
Skriv nummer	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5						
											1 Konstruktion af ligesidet trekant					
												2 Flytning af linjestykke				
													3 Afsætning af linjestykke			
														4 Kongruenssætning		
															5	
																6

Skemaet, kan du hente **her,** som excelfil.

Projekt: Et moderne aksiomsystem (især for A)
Ambitionen med *Euklids Elementer* var at opbygge en aksiomatisk deduktiv teori, især inden for geometrien. En teori, hvor alle ræsonnementer bygger på definitioner og aksiomer, der er fastlagt fra starten, samt på de tidligere sætninger, der er vist undervejs. Teorien kom til at danne skole for andre dele af matematik og for andre fag. Men holder projektet? Omkring år 1900 udarbejdede datidens største matematiker David Hilbert et bud på et moderne aksiomsystem. Du kan **her** finde projekt 10.1 der hedder "Er der huller i Euklids argumentation", der handler om dette.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Den euklidiske tankegang i europæisk kulturhistorie

Næst efter Bibelen er *Euklids Elementer* den bog, der er mest udbredt, og som er oversat til flest sprog. Den metode, vi finder i *Euklids Elementer* kaldes *den aksiomatisk-deduktive metode.* Metoden blev i oldtiden formuleret i sin reneste form af Euklid, der levede og virkede i Aleksandria ca. 300 f.v.t., men Euklid sammenfatter blot, hvad der i den græske kulturkreds gennem flere hundrede år er udkrystalliseret som normer for videnskab og ræsonnement. Metoden kan i forskellige udtryksformer findes i litteratur og kunst, i retorik og filosofi i det græske samfund.

Euklids Elementer blev den vigtigste undervisningsbog inden for geometri, da bogen vendte tilbage til Europa efter middelalderens kulturelle formørkelse. Geometri blev et obligatorisk fag for al videregående skoleundervisning og kom også til at indgå i alle universitetsstudier. Enhver, der startede på et europæisk universitet efter 1200-tallet, skulle tage syv obligatoriske fag, fire inden for naturvidenskab – astronomi, geometri, aritmetik og musik, der udgjorde det såkaldte quadrivium – og tre inden for de humanistiske videnskaber – retorik, grammatik og logik, der udgjorde det såkaldte trivium. Det betyder, at enhver, der tog en universitetseksamen, om det var som teolog eller læge eller indenfor jura eller naturvidenskab, havde studeret både Euklid og Aristoteles.

Dermed kom den euklidiske tankegang til at påvirke hele den europæiske kulturkreds. Med *euklidisk tankegang* menes den måde at ræsonnere på, hvor man bygger på en række (mere eller mindre klart formulerede) definitioner og aksiomer, og hvor ny naturvidenskabelig, filosofisk eller samfundsvidenskabelig indsigt udledes (deduceres) logisk ud fra de oprindelige aksiomer. De grundlæggende definitioner og aksiomer sætter også rammen for arkitektur og for kunstnerisk aktivitet.

Du kan **her** finde "*Projekt 10.2 Euklidisk tankegang i europæisk kulturhistorie"* hente et projekt om euklidisk tankegang i den europæiske kultur. Projektet omfatter både eksempler fra Euklids forgængere inden for filosofi og litteratur – Aristoteles' logik og Homers Iliade – og eksempler på sådanne skelsættende værker med tydelige Euklidiske fingeraftryk som Spinozas etik, Newtons optik, Den amerikanske uafhængighedserklæring og Russels og Whiteheads Principia Mathematica.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.1.14 Hvordan udvikles matematikken – De tre uløste problemer

Højdepunktet i Euklids geometri er konstruktionen af de fem regulære polyedre og beviset for, at der ikke findes andre end disse fem. Dette er emnet for Bog XIII. Euklid omtaler ikke *de tre store uløste problemer* i græsk matematik, som er formuleret nedenfor.

Elementerne indeholder, hvad man kan deducere sig til og konstruere sig til ud fra de få givne aksiomer. Man kan derfor i en vis forstand sige, at al den viden, der er i *Euklids Elementer*, allerede ligger gemt nede i aksiomerne. Der er ikke tale om ny viden, vi skal blot afdække den. Dette syn på, hvad matematik er, og i bredere forstand hvad sandhed er, demonstreres i Platons dialog Menon, som vi vender tilbage til i afsnit 2.3. Men hvordan udvikler matematik sig da? For praksis viser, at der opstår noget nyt. Det kan illustreres af *de tre uløste problemer*. Svaret på disse tre problemer ligger nemlig ikke allerede gemt i Euklids aksiomer. De kalder på en videreudvikling af matematikken.

Øvelse 1
De tre uløste problemer betegnes i overskriftform:
1. Terningens fordobling.
2. Vinklens tredeling.
3. Cirklens kvadratur.

Find via nettet ud af, hvad de tre problemer nøjere går ud på.

Vi vil her se på det første problem. De andre vender vi tilbage til på A-niveau.

Problemet med terningens fordobling fascinerede samtiden i en sådan grad, at der blev skabt en række myter om dem. I en kildetekst af Eratosthenes, som vi præsenter i afsnit 6 i større detalje, kan vi læse en af fortællingerne herom:

Fra Eratosthenes til Kong Ptolemaios, vær hilset.
De siger, at en af de klassiske tragedieforfattere skildrede Minos i færd med at bygge et gravmæle for Glaucus, og da han erfarede, at det var hundrede fod på hver side, udbrød han:
"Det gravmæle, du har talt om til en kongelig begravelse, er sandelig småt.
Lad det blive fordoblet! Skynd dig, uden at ødelægge dets skønhed,
at ændre hver en side i gravmælet til det dobbelte."

Her er myten skubbet mere end 1000 år tilbage til Kretas storhedstid under kong Minos. Minos' løsning er indlysende forkert, men hvad er den rigtige?

I en anden af myterne indgår både oraklet i Delfi og Platons Akademi. Der fortælles følgende:

Øen Delos midt i det ægæiske hav blev ramt af pest, og i deres nød henvendte befolkningen sig til oraklet i Delfi for at spørge om råd. Oraklet svarede, at de skulle drage hjem og mildne gudernes vrede ved at gøre det terningformede alter, de havde i deres Apollon-tempel på øen, dobbelt så stort. De drog hjem og tænkte længe over svaret. Hvordan fordobles en terning? Da de havde tænkt længe, og ingen kunne finde svaret, henvendte de sig til Platon og Akademiet i Athen, hvor de klogeste hoveder var samlet. Platon mente, de havde tolket svaret forkert, og at meningen var, at de skulle lægge sig mere efter at dyrke matematik og derved opnå indsigt i gudernes store værk. Akademiet prøvede dog, om de kunne løse det, men det var de heller ikke i stand til, når de kun måtte bruge passer og lineal. I deres søgen efter en løsning konstruerede de dog et apparat, der kunne klare opgaven. Det forlyder ikke, om gudernes vrede blev mildnet. Efter denne fortælling kaldes problemet om terningens fordobling for »det deliske problem«.

I en søgen efter en løsning på problemet valgte nogle matematikere således at *følge maskinsporet*. I *"Projekt 10.3 Terningens fordobling - Regning med passer og lineal"* er der gengivet et bud på, hvordan det apparat, Akademiet konstruerede, kunne være lavet. I afsnit 6.1 fortsætter vi ad maskinsporets vej i løsningen af *det deliske problem*.

Andre sprængte rammerne for teorien og udvidede matematikkens egen verden. De skabte et grundlag for en ny gren af matematikken: De fulgte således *det aksiomatisk deduktive spor*.

Lad os sige vi har givet en terning med rumfang 1 og dermed sidelængden 1. Vi ønsker at konstruere en terning med rumfang 2. Kan vi gøre det? For at svare analyserer vi problemet på følgende måde:
Lad os et øjeblik sige, vi *kunne* konstruere en dobbelt så stor terning med kantlængde x. Kan vi gøre det én gang, kan vi også gentage det, så vi laver nu endnu en fordobling og får en terning med rumfang 4, og med kantlængde y. Derefter gentages proceduren og vi får en terning med rumfang 8. Men her ved vi jo, at kantlængden er 2!

Nu har vi 4 terninger med rumfang 1, 2, 4 og 8. Kantlængden på den første er 1 og på den fjerde er den 2.
Når rumfanget hver gang fordobles, må kantlængderne hver gang forstørres med samme faktor. Eller sagt på en anden måde: Hver gang vi fordobler, må forholdet mellem kantlængderne være det samme (nemlig lig med forstørrelsesfaktoren),
dvs. $\frac{x}{1} = \frac{y}{x} = \frac{2}{y}$

ISBN 9788770668279

Sådanne linjestykker x og y kaldtes *sammenhørende mellemproportionaler.* Vores analyse har således ført til, at problemet med terningens fordobling er oversat til følgende problem: Kan man med passer og lineal konstruere *sammenhørende mellemproportionaler*?

Hvorfor løser det problemet? Lad os undersøge det ved at skrive ligningssystemet ud i to ligninger:

1.:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{x}$$

2.:

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{y}$$

Omskriv disse til:

1.:

$$y = x^2$$

2.:

$$y = \frac{2}{x}$$

I moderne sprog kan vi nu se, at disse to ligninger bestemmer to kurver i et koordinatsystem. Den første kaldes en *parabel*, den anden en *hyperbel*.

Indsætter vi $y_1 = \frac{2}{x_1}$ i den 1. ligning, så får vi følgende:

$$\frac{2}{x_1} = {x_1}^2$$
$$2 = {x_1}^3$$

Men det betyder jo netop, at terningen med sidelængden x_1 har det dobbelte rumfang.

I forsøget på at løse dette og andre rene matematiske problemer blev der således skabt en ny verden med kurver som parabler, hyperbler og ellipser. De græske matematikere ræsonnerede anderledes, uden koordinatsystemer, og fandt en *geometrisk* beskrivelse af disse kurver, nemlig som plane snit gennem en *kegle*. Men de sprængte rammerne: Disse keglesnit kan ikke konstrueres med passer og lineal.

Ligesom Euklid sammenfattede sin tids viden om plangeometri i *Elementerne*, således sammenfattede Apollonius (262 – 190 f.v.t.) datidens viden om keglesnittene i et værk, der var lige så imponerende på sit felt som *Elementerne*. Værket hed simpelthen *Keglesnit*. Syv af de otte bøger, han skrev herom, er bevaret. Keglesnit blev anset som den mest abstrakte matematik, der absolut ikke kunne bruges til noget. Men de var med til at demonstrere, hvad den menneskelige tanke formår. Først 1500 år efter trækker Johannes Kepler keglesnittene ind på scenen og anvender dem til at beskrive planetbanerne.

10.2 Erkendelsesteori – Hvordan vi opnår indsigt om verden

Alle fag har sin egen erkendelsesteori og argumentationsteknik. Man argumenterer for sine synspunkter. I matematik bruger man et særligt argument, det matematiske bevis, som har en speciel status, fordi det regnes for et særligt sikkert argument. Det matematiske bevis er en del af et bredere begreb, *det matematiske ræsonnement*. Vi vil i dette afsnit dels demonstrere hvor mangeartet det matematiske ræsonnement kan være, dels demonstrere slægtskabet med andre fags måder at argumentere på.

- Statistik er en del af matematikken. Men det ligger i sagens natur, at vi ikke kan udtale os med samme sikkerhed om statistiske resultater som om geometriske sammenhænge. Hvordan argumenterer vi så? Ved at inddrage Toulmins argumentationsmodel afdækker vi en række lighedspunkter mellem fagene, når der argumenteres for en påstand.

- Bliver matematik opdaget eller opfundet? Kan der opstå helt ny erkendelse i matematik, eller er al viden i virkeligheden allerede gemt nede i vores første antagelser og i vores medfødte logik? Den græske filosof Platon, der i de fleste af sine værker anvendte dialogformen med læremesteren Sokrates som en af samtalepartnerne, argumenterer i dialogen *Menon* for den sidste opfattelse: Der er ikke tale om ny viden, men om generindring af en viden, vi allerede har. Det, som bringes i spil, er i virkeligheden det, man i geometri kalder for *inkommensurable* størrelser, og som inden for talteori svarer til de såkaldte *irrationale* tal.

- I forlængelse af Menon ser vi på de særlige argumentations- og bevisteknikker, som sammenfattes under overskriften *Det udelukkede tredjes princip*. Herunder kommer vi i matematik ind på *det indirekte bevis og eksistensbeviser.*

- Den ungarske matematiker Imre Lakatos var en af de største formidlere af matematik i det 20. århundrede og samtidig en af de store *videnskabsteoretikere*. Han var påvirket af Platons dialoger, men udvikler denne dynamisk på en måde, så han demonstrerer, hvordan gamle rammer for matematik sprænges, og ny erkendelse opstår. Hans dialog om Eulers polyedersætning er en klassiker i matematikhistorien.

- Begrebet uendelighed har til alle tider udfordret matematikere og filosoffer, men begrebet spiller også en rolle i andre fag som fx religion. Diskussionen om uendelighedsbegrebet rummer en diskussion om forholdet mellem *matematik og virkelighed.*

ISBN 9788770668279

Den engelske filosof Stephen Toulmin (1922 – 2009) hævdede, at påstande, der var absolut sande, som fx påstanden Stephen Toulmin blev født i 1922, i almindelighed er uinteressante, mens interessante påstande om virkelige fænomener aldrig ville kunne opnå absolut sandhed. Men sandhedsværdien af en påstand er ifølge Toulmin et praktisk problem, hvorfor det drejer sig om at finde en praktisk model, ved hjælp af hvilken vi kan opnå en rimelig grad af enighed om, hvorvidt en given påstand er sand eller ej. Modellen er nærmere beskrevet **her**. Nedenfor følger en lettere forkortet version.

Toulmins argumentationsmodel dækker ifølge ham selv alle former for argumenter, altså også de matematiske beviser. Argumentationsmodellen har fundet udbredt anvendelse i fag som samfundsfag og dansk.

Udgangspunktet er altid en *påstand*. Det er denne påstand, vi skal overbevises om, er korrekt, dvs. der skal argumenteres for påstanden. Det gør man ved at påpege nogle data eller kendsgerninger, der understøtter påstanden, eller ved at henvise til en dokumentation for, hvorfor påstanden må opfattes som værende korrekt. Grundlaget for påstanden kaldes et *belæg*. Vi har altså følgende model:

Belæg → Påstand

Her viser pilen, at *påstanden følger af belægget*, eller at *belægget medfører påstanden*. Men der skal også være en *regel*, der sikrer, at *påstanden* rent faktisk følger af *belægget*. Denne slutningsregel, der tillader os at slutte fra *belægget* til *påstanden*, kan være logiske regler vedrørende ligningsløsning, regneregler, parentesregler, brøkregler mv. Det kan også være aksiomer eller postulater, som vi kender fra *Euklids Elementer*. Og inden for statistik indgår også ofte konventioner. Samlet betegnes dette med det gamle ord *hjemmel*.

Belæg → Påstand
Hjemmel

Uden *Hjemmel* har du ikke godtgjort, at det er lovligt at slutte fra *belægget* til *påstanden*. Bemærk, at de tre ovenstående elementer, påstanden, belægget og hjemlen, altså skal være til stede, for at der er tale om et argument. I praksis vil hjemlen og somme tider også belægget dog være underforståede, fordi argumentet regnes for indlysende.

ISBN 9788770668279

10.2.1 Toulmins argumentationsteknik – eksempler fra matematik og andre fag

Et godt eksempel på anvendelsen af Toulmins argumentationsteori er den *bekræftende statistik*. Her skal vi vælge mellem to hypoteser, nulhypotesen og den alternative hypotese, og valget kræver netop et argument, ikke et bevis. Vi kan hverken bevise en alternativ hypotese eller en nulhypotese – begge hypoteser giver mulige forklaringer på vores observationer. Men vi kan undersøge hypotesernes styrke og derved træffe et rationelt valg mellem dem.

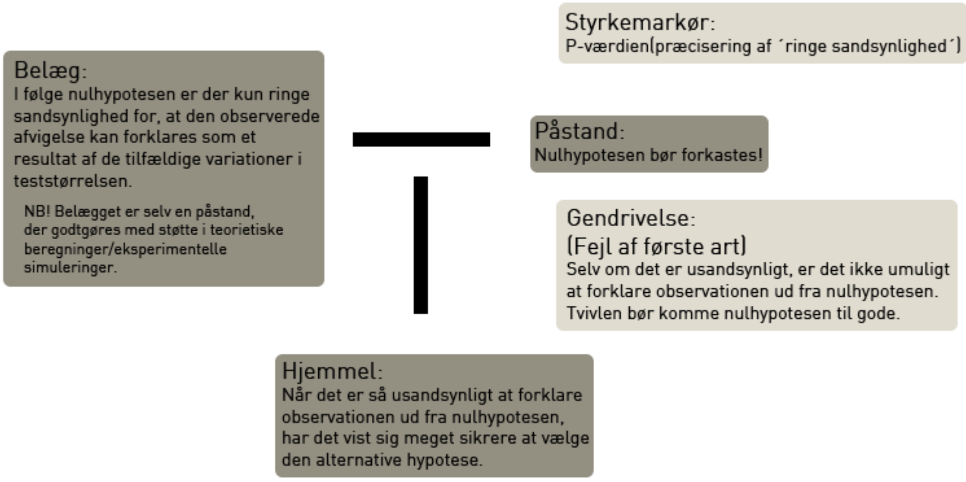
Så påstanden er enten, at nulhypotesen bør forkastes, eller at den ikke bør forkastes. Til grund for afgørelsen ligger de observerede data i form af en antalstabel. Denne antalstabel bearbejdes til en p-værdi, som angiver brøkdelen af skæve udfald, hvis man går ud fra, at nulhypotesen er korrekt. Hvis p-værdien er høj, er det altså nemt at frembringe et skævt udfald ud fra nulhypotesen, og hvis p-værdien omvendt er lav, er det svært at frembringe et skævt udfald ud fra nulhypotesen.

Tilladelsen til at forkaste nulhypotesen involverer et på forhånd aftalt signifikansniveau, typisk 5%. Det er netop *ikke* en matematisk regel, men en konvention, der har vist sig at virke i praksis. Denne regel foreskriver, at man skal forkaste nulhypotesen, hvis p-værdien kommer under signifikansniveauet. Men netop fordi der ikke er tale om en matematisk regel, kan vi godt tage fejl: Påstanden kan tilbagevises med et argument om, at der trods alt er en vis sandsynlighed, nemlig p-værdien, for at det observerede udfald kunne være fremkommet af nulhypotesen. Der er altså alene tale om indicier, ikke en rygende pistol, der umuliggør nulhypotesen.

Gendrivelsen kunne derfor bestå i en advarsel om, at vi muligvis undervurderer konsekvenserne af at forkaste en korrekt nulhypotese, dvs. begår et 'justitsmord' (fejl af første art). Det kunne fx føre til en diskussion om, at vi fremover burde bruge et lavere signifikansniveau. Vi ser også, at p-værdien fungerer som en styrkemarkør for argumentet: Jo mindre p-værdien er i forhold til signifikansniveauet, jo stærkere står vi i forkastelsen af nulhypotesen. Vi kan sammenfatte det i et typisk argumentations-diagram som det følgende:

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Øvelse 1

Konstruer og diskuter et tilsvarende argumentationsdiagram for påstanden:

"Nulhypotesen kan ikke *forkastes."*

Øvelse 2

Vælg et eksempel fra grundbogens kapitel 9, som *handskerne i Jammer Bugt*, og opstil diagrammet med dette konkrete eksempel.

Øvelse 3. **Argumentationsteknik i andre fag**

Sammenlign den argumentationsform, der her er præsenteret, med den du møder:

- i danskfaget, når der argumenteres for en bestemt litterær tolkning.
- i historiefaget, når der argumenteres for årsagen til Irakkrigen eller tilsvarende eller for troværdigheden af kildetekster.
- i samfundsfag, når der argumenteres for konsekvenserne af en given økonomisk, social eller anden politik.
- i billedkunst, når der argumenteres for en bestemt tolkning af et maleri.
- i engelsk, når der argumenteres for bestemte tolkninger af kunstneriske ytringer som Bob Dylans musik og lyrik i 1960'erne eller for årsagerne til bestemte historiske begivenheder som den amerikanske borgerkrig.
- i tysk, når der argumenteres for bestemte litterære tolkninger eller for årsagerne til bestemte historiske begivenheder.

- i religion, når der argumenteres for bestemte tolkninger af gamle religiøse tekster som Johannesevangeliet, Sura-tekster eller Buddhistiske tekster
- i musik, når der argumenteres for bestemte tolkninger af gammel kirkemusik eller moderne bluesmusik.

ISBN 9788770668279

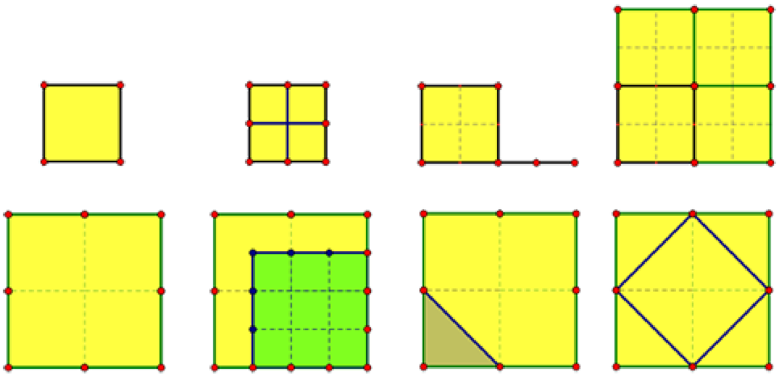
Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.2.2 Platons dialog Menon – Hvor kommer ny viden fra?

I værket *Menon* beskriver Platon en dialog mellem Sokrates og en af adelsmanden Menons slaver. Platons hensigt med dialogen er at vise, at mennesket er født vidende, og at al erkendelse er *generindring*, dvs. Sokrates lærer ikke slaven noget; det er slaven selv, der genkalder allerede eksisterende viden. Du kan hente et uddrag af Platons *Menon*, oversat og kommenteret af Chr. Gorm Tortzen **her**.

Øvelse 1

Læs dialogen, og inddrag undervejs nedenstående figurer, som Platon lader Sokrates tegne i sandet – uden de dog er illustreret i dialogen.



ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Øvelse 2

Platon og Sokrates mener, at eksemplet kan generaliseres, så ny viden i virkeligheden er generindring.

a) Vælg et af de beviser, du kender for Pythagoras' sætning, og overvej, om du ville kunne gennemføre en dialog som i *Menon*, hvor du får en, der ikke kender til beviset, til at indse rigtigheden heraf.

b) Vælg en sætning om modellerne, fx sætningen om beregning af hældningskoefficienten eller sætningen om beregning af fordoblingskonstanten, og overvej, om du ville kunne gennemføre en dialog som i *Menon*, hvor du får en, der ikke kender til beviset, til at indse rigtigheden heraf.

Menon-dialogen handler om det overordnede spørgsmål: Hvordan opnår vi ny viden? Men samtidig anvender Platon som illustration en af den tidlige græske matematiks vigtige opdagelser, nemlig at to kvadraters arealer kan være udtrykt i hele tal, fx, som her, 4 og 8 kvadratenheder, mens deres sider ikke nødvendigvis kan det. Fx som her, hvor sidelængden i 4-kvadratet er 2, mens sidelængden i 8-kvadratet jo – med vores moderne metoder – bliver $\sqrt{8}$, som er et irrationalt tal. Dette handler næste øvelse og projekt om.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt: Inkommensurable størrelser i matematik og religion

To størrelser, der ikke kan deles et helt antal gange med samme måleenhed, kaldes inkommensurable. Tal som $\frac{5}{17}$ og $\frac{2}{11}$ har en fælles måleenhed, nemlig tallet $\frac{1}{(17\cdot 11)} = \frac{1}{187}$. For lægger vi denne størrelse 55 gange efter hinanden får vi $\frac{55}{187} = \frac{5}{17}$ og lægger vi 34 af dem, får vi $\frac{34}{187} = \frac{2}{11}$. Dvs. de to tal er kommensurable.

Det er klart, at dette kan gøres generelt, så alle brøker er kommensurable. Men tal som $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, er ikke kommensurable med noget helt tal, dvs. de kan ikke skrives en brøk.

Du kan her finde "**Projekt 10.12 Euklids algoritme og inkommensurabilitet**", hvor vi med geometriske argumenter overbeviser om, at tal som $\sqrt{8}$ ikke kan måles med en given enhed (uanset, hvor lille denne vælges).

Samtidig inddrager vi tekster fra middelalderfilosoffen Oresme, der inddrager det inkommensurable i en overvejelse om universets indretning.

Et algebraisk argument for, at tal som $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, ikke er kommensurable med tallet 1, dvs. ikke kan skrives som en brøk, gives i det følgende afsnit.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.2.3 Argumentations- og bevisteknik – og det udelukkede tredjes princip

En dør kan ikke både være åben og lukket. En mand kan ikke både være skaldet og have hår på hovedet. Dette grundlæggende logiske princip eller aksiom, der kaldes *modsigelsesprincippet*, er stort set alle enige om.

Det indirekte bevis i matematik bygger på et nært beslægtet, men dog mere vidtgående princip inden for logik, der kaldes for *det udelukkede tredjes princip*. I gamle dage, hvor videnskabsmænd kommunikerede på latin, kaldtes princippet for *Tertium non Datur* (”Ingen tredje mulighed findes”).

Dette princip eller aksiom siger, at for en given påstand gælder altid, at *enten er påstanden sand eller den modsatte påstand er sand*. Der er ikke en tredje mulighed. Selv om man i daglig tale har et begreb som *halvdød*, så er der ingen tilstand midt imellem.

Men i sådanne spørgsmål – og endnu mere i etiske og æstetiske spørgsmål – kan man ofte være uenige om definitionerne. Det er naturligvis heller ikke sikkert, at vi kan afgøre, hvilken af to muligheder der er den rigtige.

I matematik er de mest omstridte anvendelser af det udelukkede tredjes princip henholdsvis *de indirekte beviser* og de såkaldte *eksistensbeviser*. Et eksempel på det første er beviset for, at $\sqrt{2}$ er irrational, og et eksempel på det sidste er Euklids bevis for, at der bliver ved med at komme primtal, uanset hvor langt vi kommer op i talrækken. Dette samt andre fags anvendelse af det udelukkede tredjes princip dykker vi ned i "**Projekt 10.11 Det udelukkedes tredjes princip**".

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.2.4 Matematisk videnskabsteori – Popper, Kuhn og Lakatos

Hvornår og hvordan bliver forestillinger, formodninger eller direkte hypoteser om, hvordan verden hænger sammen, til videnskab? Hvad kendetegner en videnskabelig teori, hvad er god videnskab, og hvordan udvikler videnskab sig? Det er den slags spørgsmål, videnskabsteori handler om.

Øvelse 1

De fleste er i dag enige om, at *astrologi* ikke er videnskab. Men hvorfor ikke? Der er jo ingen tvivl om, at eksempelvis Månen påvirker Jorden. På Tycho Brahes tid var det anerkendt som videnskab på linje med astronomi. Hvordan vil du forklare, at astrologi ikke kan anses som videnskab?

Videnskabsteoretiske overvejelser er vigtige for alle fag. Man kunne umiddelbart tro, at det i et fag som matematik er indlysende, hvad god videnskab er. Vi opstiller definitioner og aksiomer og gennemfører beviser ud fra logiske regler. Men tag følgende simple formodning:

I den uendelige decimaludvikling for tallet π optræder på et vist sted 100 9-taller efter hinanden.

Det ligner en lille matematisk sætning. De fleste kan blive enige om, at denne sætning er enten sand eller falsk. Men er sætningen udtryk for god matematisk teori?

Der er ikke enighed blandt videnskabsmænd og filosoffer om, hvilke krav der skal stilles, for at bestemte *formodninger* kan *kaldes videnskabelige spørgsmål*, eller for hvad kriteriet er for en god *videnskabelig teori*.

Et fremtrædende synspunkt gennem videnskabshistorien har været det såkaldt *induktive princip*, at videnskabelig indsigt og teori vokser ud af gentagne iagttagelser. Tilhængere af dette princip ved naturligvis godt, at selv om man har set 100 hvide svaner, så kunne der en dag godt dukke en sort svane op. Derfor har tilhængere af dette princip forsøgt at udvikle en slags *induktiv sandsynlighed for, at en teori er sand*. Men eksemplet med svanerne illustrerer vanskeligheden i et sådant princip. Sandsynligheden for, at påstanden: *Alle svaner er hvide* er sand, falder til 0 den dag, vi ser en sort svane. Påstanden kunne naturligvis så gradueres til, at *langt hovedparten af alle svaner er hvide*. Generelt ville vi stort set ikke kunne formulere klare matematiske og naturvidenskabelige sætninger, hvis vi byggede på det induktive princip som sandhedskriterium.

Den østrigske filosof Karl Popper (1902-94) gav en løsning på dette problem ved at vende det om: Kriteriet for, om en bestemt teori er god videnskab, er ikke, om vi kan samle tilstrækkelig information, der underbygger påstanden, så vi til sidst tror på den, eller tror den er så og så sandsynlig, men omvendt: Det er en god videnskabelig teori, hvis vi kan opstille et eksperiment, der *falsificerer* den! Det lyder umiddelbart sært, men idéen er helt enkelt, at en teori er ikke videnskabelig, hvis man ikke er i stand til at efterprøve den og argumentere imod den.

Karl Popper (1902-94)

Karl Popper beskriver sin videnskabelige metode i værket *Conjectures and Refutations* (1963). Det er også her, han giver den første fremstilling af *den hypotetisk-deduktive metode*. Senere udbygger han sin videnskabsteori, idet han kalder en teori, der har modstået mange og grundige falsifikationsforsøg, for befæstet. Men stadig kan den falsificeres.

Øvelse 2

Vurder, om den tidligere nævnte formodning*: I den uendelige decimaludvikling for tallet* π *optræder på et vist sted 100 9-taller efter hinanden* lever op til Poppers krav til en god videnskabelig teori.

Øvelse 3

I bekræftende statistik undersøges formodninger ved at opstille en nulhypotese, som vi derefter tester. Vil du karakterisere dette som anvendelse af en induktiv metode, eller lever denne metode op til Poppers krav til en god videnskabelig teori?

Øvelse 4

I bekræftende statistik undersøges formodninger ved at opstille en nulhypotese, som vi derefter tester. Vil du karakterisere dette som anvendelse af en induktiv metode, eller lever denne metode op til Poppers krav til en god videnskabelig teori?

Øvelse 5

I afsnit 2.1 behandlede vi Toulmins argumentationsmetode. Vil du karakterisere denne som anvendelse af en induktiv metode, eller lever denne argumentionsmetode op til Poppers krav til en god videnskabelig teori?

Øvelse 6

Angiv eksempler fra de naturvidenskabelige fag, du har haft, på videnskabelige teorier, der lever op til kravet om, at de kan falsificeres.

Karl Poppers teori giver ikke en forklaring på, hvordan *den videnskabelige udvikling* foregår. Falsifikationsprincippet rejser også et nyt problem. Det er nemlig ikke nødvendigvis sådan, at hvis en teori falsificeres fx gennem et eksperiment, så forkastes teorien. Ofte prøver man at redde den ved at bygge nye elementer ind i teorien. Det klassiske eksempel er oldtidens verdensbillede med planetbevægelser i cirkler og epicykler.

Disse spørgsmål søgte videnskabsteoretikeren Thomas Kuhn (1922-96) at give svar på med sin teori om, hvordan videnskaben udvikler sig. Perioder med en relativ stilstand, hvor man forsøger at lappe på gamle teorier, afløses af revolutionerende spring og store paradigmeskift, hvor et stort *paradigme*, fx det geocentrisk verdensbillede med Jorden i centrum, erstattes af et nyt og helt anderledes, i dette eksempel det heliocentriske verdensbillede med Solen i centrum. Eller Newtons mekanik, der erstattes af Einsteins relativitetsteori. Paradigmeskiftet sker, når der er ophobet så mange observationer, der strider mod den oprindelige teori, at det videnskabelige samfund finder, at det er på tide at lede efter en ny og bedre teori. Kuhn formulerede sin teori i værket *The Structure of Scientific Revolutions*(1962).

ISBN 9788770668279

Thomas Kuhn (1922-96)

Øvelse 6. Forskellige paradigmer som inkommensurable størrelser

Paradigmeskift vedrører ikke alene de helt store sammenfattende teorier, som vi har givet eksempler på på forrige side. Det vedrører også synet på en række enkeltstående fænomener, hvor vi kan tage vand som eksempel. I vor tid vil vi sige, at vand er defineret ved den *kemiske formel* H_2O. Det betyder, at flydende vand, vanddamp og is grundlæggende er det samme, det er blot temperaturen, der er forskellig. Men tidligere ville man sige, at *tilstandsformen* var det væsentlige. Og så er der større slægtskab mellem flydende stoffer, frosne stoffer osv. end mellem det flydende og det frosne.

Det er altså to helt forskellige syn på vand (og andre stoffer), der her er repræsenteret. Der er tale om et paradigmeskift.

a) I den euklidiske matematik repræsenteres tal af geometriske størrelser. Et produkt af to tal *a* og *b* repræsenterer arealet af et rektangel med sidelængder *a* og *b*. Det samme syn på tal finder vi i den babyloniske matematik, og det er fremherskende i europæisk matematik helt frem til 1500-tallet. Sammenlign dette syn med vores opfattelse af tal. Kan man tale om et paradigmeskift?

b) I den ægyptiske matematik fandtes kun stambrøker, dvs. brøker på formen $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ og $\frac{1}{60}$. Siden blev begrebet om brøker udvidet, så en brøk udtrykte et forhold mellem to tal. Det var en talopfattelse, der passede til den geometriske æra. Efter 1600-tallet gik man i stigende grad over til at opfatte en brøk som et divisionsstykke, hvorved en brøk lige så godt kunne repræsenteres af et decimaltal. Kan man tale om et paradigmeskift i denne udvikling, eller er der efter din mening blot tale om forskellige repræsentationer?

c) Giv eksempler fra andre dele af matematikken, hvor der er sket betydelige skift i løbet af den historiske udvikling, og diskuter om pågældende eksempel illustrerer egentlige paradigmeskift.

d) Giv nogle eksempler i forskellige andre fag på sådanne *paradigmeskift*.

Thomas Kuhn har sagt, at forskellige paradigmer er inkommensurable. Det er et begreb, vi i matematik anvender til fx at beskrive forskellen på rationale og irrationale tal.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

e) Synes du, det er velbegrundet at anvende begrebet inkommensurabelt til at beskrive forskellige paradigmer? Du kan finde en artikel om paradigmer og inkommensurabilitet **her**. Artiklen handler som udgangspunkt om sprogfag, men der gives en række eksempler fra naturvidenskabelige fag.

Nogle matematikere har ment, at hverken Popper eller Kuhn har noget med matematik at gøre. I matematik er det indlysende, hvad der er god videnskab. Vi opstiller definitioner og aksiomer og gennemfører beviser ud fra logiske regler. Det var den ungarske matematiker og videnskabsteoretiker Imre Lakatos (1922-1974) uenig i. I værket *Proofs and Refutations* (først publiceret 1976, efter hans død) stiller han samme spørgsmål som Popper: Hvad er god videnskab, og hvad er en god videnskabelig teori?

Imre Lakatos (1922-1974)

Lakatos' svar var noget anderledes: Meget kort formuleret er målestokken for, om noget kan kaldes en *god videnskabelig teori*, om den er *produktiv*. Det er ikke nok, at den kan beskrive og systematisere kendte fænomener, den skal også kunne forudsige noget om hidtil ukendte fænomener, som vi så bagefter kan gå ud og undersøge og evt. falsificere. Lakatos' teori er således en videreudvikling af både Poppers og Kuhns teorier.

Et eksempel på en teori, der ifølge Lakatos ikke lever op til dette, er Oldtidens (Ptolemaios' og Aristoteles') geocentriske verdensbillede med de mange epicykel-bevægelser – modellen beskriver vore observationer, men kan ikke forudsige noget om nye fænomener, fx nye planeter. Opstår nyt, så redder man situationen ved en ny beskrivelse med nye epicykler. Det er altså slet ikke en videnskabelig teori.

Lakatos er også kritisk over for den formalistiske tilgang til matematik, hvor matematik reduceres til, at vi først formulerer aksiomer og definitioner og dernæst anvender formelle logiske regler til at udlede matematiske sætninger ud fra disse. I et sådant system er alt i virkeligheden til stede *"i kim"* i de oprindelige aksiomer og definitioner, for de vokser fuldstændig logisk ud af dem – ligesom planten er til stede i det frø, der plantes.

ISBN 9788770668279

Lakatos forkaster ikke, at vi i matematik formulerer definitioner og aksiomer, eller at vi anvender logiske slutningsregler, men han anskuer det anderledes dynamisk. Vi starter ikke med aksiomer, men med et problem, en sag, vi vil undersøge, en hypotese, som vi vil prøve at bevise. *Definitioner og aksiomer sætter dernæst rammen* om det arbejde, vi går i gang med, men når vi kører fast, så kan nye aksiomer eller nye definitioner komme på tale, som så vil føre et nyt sted hen. Hvad vil det sige, at *vi kører fast*? For Lakatos betyder det ofte, at der kommer modeksempler på banen: Vi prøver at *bevise* noget (*proof*), og så kommer der et *modeksempel* (*refutation*). Hvis teorien er produktiv, så sættes nu en ny scene.

I matematik er det derfor ifølge Lakatos *beviserne*, der er motoren i udviklingen, det produktive element.

Han gav et stort gennemarbejdet eksempel på sin teori i bogen. Eksemplet handler om en meget berømt sætning i matematikkens historie, *Eulers Polyedersætning*, der siger, at for alle polyedre gælder:

$$V - E + F = 2$$

hvor V er antallet af hjørner, E antallet af kanter og F antallet af sider.

Lakatos gennemgår dette eksempel som en dialog mellem lærere og elever i en klasse. Kapitel 2 starter således:

LÆREREN*: I sidste time endte vi med en formodning om, at for alle polyedre gælder $V - E + F = 2$, hvor V er antallet af hjørner, E antallet af kanter og F antallet af sider. Vi fik afprøvet den med forskellige metoder, men vi har endnu ikke bevist den. Har nogen fundet et bevis?*

SIGMA*: Jeg må indrømme, at jeg endnu ikke har været i stand til at give et stringent bevis for sætningen . . . . Men eftersom sandheden af den er blevet kontrolleret i så mange tilfælde, kan der ikke være nogen tvivl om, at sætningen gælder for alle polyedre. Så sætningen ser ud til at være tilfredsstillende bevist. Har du imidlertid et bevis, så lad os bare se det.*

Du kan her finde "**Projekt 10.4 Videnskabsteori - Lakatos og Eulers polyedersætning**," der med fyldige uddrag af bogen gennemgår Lakatos' diskussion om et bevis og hans demonstration af, hvordan matematikken udvikler sig.

ISBN 9788770668279

10.2.5 Model og virkelighed – Fortællinger om uendelighed

Når vi laver modeller, er vi i matematikkens verden. Men modellerne laves ud fra virkelige tal og fænomener, og når vi har opstillet modellerne, anvendes de så igen på virkeligheden. Vi laver modeller, fordi verden er så kompleks og kaotisk, at vi er nødt til at vælge ud og reducere, og målet med modellering er at afdække nogle sammenhænge, som vi ikke umiddelbart kan se i en kompleks verden. Vi er dog normalt nogenlunde trygge ved denne modelleringsproces.

Men når vi har med uendelige størrelser at gøre er det straks en anden sag. I den virkelige verden findes ikke uendeligt mange af nogen ting. Betyder det, at vi heller ikke i matematik må arbejde med uendelige størrelser?

Det var i den historiske udvikling svært at vænne sig til, at *ingenting* kan repræsenteres ved et tal, tallet nul, betegnet med 0. Lige så svært har det været at forestille sig, at *alting* kan repræsenteres ved et tal, tallet uendelig, betegnet med ∞. For nogle matematikere har det og er det stadig tabubelagt! En af historiens største matematikere, Gauss, skrev i 1831 i et brev til sin kollega Schumacker:

"Jeg må på det kraftigste protestere mod din brug af det uendelige som noget afsluttet, da dette aldrig er tilladt i matematik. Det uendelige er bare en talemåde, der står for en grænse, som visse brøker kan komme lige så tæt på, som vi måtte ønske det, mens andre størrelser får lov til at vokse ubegrænset."

Projekt: Achilleus og skildpadden – en fortælling om uendelighed

Uendelighed har ikke blot voldt store problemer som et tal, men også som et begreb i sig selv. Vi har tidligere, fx i kapitel 0, set på uendelige processer, der altid har fascineret matematikere og filosoffer. I antikken udnyttede filosoffen Zenon således de paradoksale forhold omkring de uendelige processer til at så tvivl om, hvorvidt vores oplevelse af verden nu rent faktisk også afspejler verden, som den er. Et af hans mest berømte paradokser er paradokset om Achilleus og skildpadden. I en nylig Japansk film med samme titel starter filmen netop med en smuk sekvens, hvor paradokset forklares.

Du kan **her** se starten på filmen med engelske undertitler fra Youtube.

ISBN 9788770668279

Paradokset handler grundlæggende om bevægelse og om uendelighed: Kan rum og tid opdeles i stadigt mindre dele i en uendelig proces? Når matematikken bringes i spil for at løse paradokset, kommer imidlertid endnu et problem på banen, nemlig forholdet mellem matematik og virkelighed.

Dette berømte paradoks forsøger vi at kaste lys over i "**Projekt 10.5 Achilleus og skildpadden**".

Projektet rummer oplæg til at inddrage fag som religion og dansk i et samarbejde.

Øvelse 1 Matematik og virkelighed - The Unreasonable Effectiveness of Mathematics

I 1960 skrev den ungarsk-amerikanske fysiker Eugene Wigner (1902-1995) artiklen *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Artiklen handler om, at matematikken opbygger sit eget univers, som illustreret med uendeligheden på forrige side, og her løser alle mulige problemer. Dernæst bærer matematikeren sine abstrakte løsninger med ud i virkeligheden og anvender det på rigtige problemer – og det virker. Det er det, som Wigner kalder The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. Artiklen kan læses **her**.

Skriv et essay om matematik og virkelighed med udgangspunkt i artiklen. Du skal eksemplificere med materiale, du selv er stødt på, fx. i undervisningen.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Øvelse: Geometri som matematisk model af rummet – og Kants Kritisk der reinen Vernunft

"At al vor erkendelse begynder med erfaring kan ikke betvivles; thi hvorledes skulle erkendelse ellers opstå, hvis det ikke skete ved at genstande påvirker vore sanseorganer, hvorved der fremkaldes sanseindtryk og vor forstandsvirksomhed sættes gang…".

Sådan indledes et af filosofihistoriens hovedværker, den tyske filosof Immanuel Kants (1724-1804) Kritik der reinen Vernunft. Kant ved godt, at der er mange ubesvarede spørgsmål i en formulering som den citerede. Sokrates ville ikke være enig, som vi kan se af dialogen Menon. Vi har et eller andet udgangspunkt i vores intellekt, et sted vi starter. Vi læser videre:

"Erfaringen lærer os ganske vist, at et eller andet er sådan og sådan, men den lærer os ikke, at det ikke kunne være anderledes. Hvis derfor, for det første, en sætning opfattes som værende nødvendig, så er det en a priori dom. Hvis den desuden ikke er afledet af andet, end hvad der selv er en nødvendig sætning, så er den helt igennem en a priori sætning. For det andet: Erfaringsdomme har aldrig sand eller streng almengyldighed, de har kun en formodet eller relativ almengyldighed (erkendt ved hjælp af induktionsslutning), hvorfor vi egentlig skulle sige: I den udstrækning, vi hidtil har iagttaget det, har denne regelingen undtagelser…

At der i menneskets erkendelse virkelig gives domme, der er nødvendige og i strengeste forstand almengyldige og følgelig er domme, der er rent a priori, er let at se. Ønsker man et eksempel fra videnskaben, behøver man kun at betragte matematikkens sætninger…"

Du kan hente et længere uddrag af den første del af værket **her**.

Du kan hente artiklen Matematikkens og rummets natur af professor i matematikkens historie Jesper Lützen **her**. Artiklen behandler euklidisk og ikke-euklidisk geometri, Kant, Einstein og Hilbert.

a) Hvor kan man se slægtskabet mellem Kant på den ene side og Aristoteles og Euklidisk matematik på den anden side?

b) Hvordan er forholdet mellem matematik og virkelighed ifølge Kant?

c) Man siger ofte, at geometri er en matematisk model af rummet. Når vi opstiller matematiske modeller, afprøver vi normalt også, om de holder. Hvordan skulle vi afprøve, om den geometriske model holder? Hvad er Kants svar? Hvad er de moderne matematikeres svar, som fremstillet i artiklen?

Skriv et essay om geometri og rum, og om hvordan vi opnår ny viden og ny erkendelse, hvor du inddrager mindst tre af følgende: Euklid, Platon/Sokrates, Aristoteles, Kant, Gauss, Einstein og Lakatos.

10.3.1 Billedkunst – Skolen i Athen

Den italienske renæssance, der især vandt fodfæste i de norditalienske handelsbyer, som fx Firenze, betød både en slags genfødsel af den græske tanke og samtidig en udvikling af en ny bevidsthed om, at ikke alt bare gentages, men at menneskene kan skabe nyt inden for kunst og videnskab. Den forløb i 1400-tallet og første del af 1500-tallet og var næsten et mirakel på linje med det græske. Vi vil gå dybere ned i denne historie i A-bogen.

Platons akademi i Athen (efter maleri af Rafael (1509-1510) i Vatikanet).

Først i 1500-tallet bestilte paven Michelangelo og Rafael til at udsmykke Vatikanet. Mens Michelangelo var i gang med sine berømte loftsmalerier i det Sixtinske Kapel, malede Rafael i et rum ved siden af *Skolen i Athen*. Motivet er Platons Akademi. Akademiet, der blev grundlagt på en græsmark uden for Athen, der var lagt ud til gymnastik. Platon boede lige i nærheden og havde en have i parken, hvor han diskuterede matematisk-filosofiske emner med sine elever. Du kan læse en præsentation af billedet og af den personkreds, der optræder på billedet, **her**.

Mange figurer kan man ikke identificere med sikkerhed, og der har gennem historien været mange gætterier.

Øvelse 1

a) Hvad kan begrunde valget af dette motiv?

b) Hvad er det for en bygningsmæssig ramme, som Rafael har valgt for Akademiet? Beskriv rummet, personerne er placeret i. Er det Rafaels bud på, hvordan Platons Akademi kan have set ud?

c) En række renæssancemalere (søg fx på *Masaccio* (1401-1428) eller *Ghirlandaio* (1449-94)) vælger at fremstille bibelske figurer iklædt samtidens norditalienske tøj. Rafael foretager et andet valg. Hvad kan være overvejelserne bag det ene og det andet valg?

ISBN 9788770668279

d) De to centrale figurer er Platon (med fuldskæg) og Aristoteles. De er i samtale. Hvordan gestikulerer de, mens de taler sammen? Hvad ønsker Rafael at udtrykke hermed?

Øvelse 2

Du kan her hente de to powerpoint præsentationer af **Skolen i Athen 1** og **Skolen i Athen 2**, som anvender *Skolen i Athen* som ramme for fortællingen. Du kan evt. anvende den i besvarelsen af spørgsmålene.

a) Hvor mange faglige discipliner kan du finde på maleriet?

b) Hvordan fremstilles videnskaben og videnskabsmændene?

c) Rafaels egen lærer Leonardo Da Vinci var model for Platon. Hvem var Leonardo?

d) Find de andre personer, der er identificeret i de to dokumenter, der er nævnt ovenfor, og giv en kort karakteristik af nogle af dem.

e) Rafaels maleri blev bestilt til at pryde en af væggene i den centrale del af Vatikanet. Det er et maleri af græske filosoffer, hvor Platon og Aristoteles figurer ophøjet, med gudelignende status. Hvordan hænger det sammen? Hvordan er holdningen til græsk filosofi i den katolske kirke på dette tidspunkt.

Pythagoras?

Euklid/Archimedes?

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.3.2 Billedkunst – Hvordan Euklids Elementer præsenteres i forskellige epoker

Euklids Elementer er næst efter Bibelen den mest udbredte bog gennem historien. Den måde, bogen og geometrien præsenteres på, siger ofte noget karakteristisk om den pågældende periode. Sæt i det følgende nogle ord og begreber på, hvad billederne signalerer, og hvad det fortæller om den pågældende periodes syn på matematik og videnskab. Fortæl om billedernes indhold. Inddrag den karakteristik af perioderne, som du kan finde i din litteraturhistorie eller andre lærebøger.

Euklid i middelalderen:

Undervisning i geometri. Fra en middelalderudgave (ca. 1310) af den tidligste vesteuropæiske udgave af *Euklids Elementer*. Oversat til latin fra arabisk i ca. 1120 af englænderen Adelard of Bath, der stiftede bekendtskab med de arabiske oversættelser på lange rejser i bl.a. middelhavsområdet.

Euklid i renæssancen:

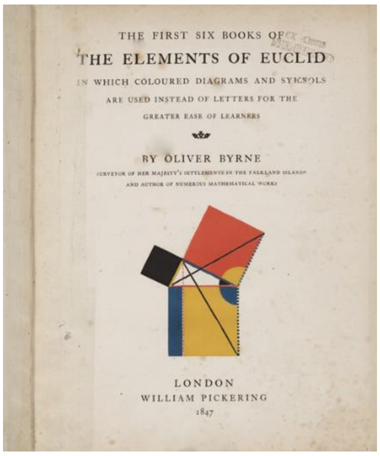
Luca Pacioli med elev. Maleriet fra 1495 tilskrives traditionelt Jacopo de Barari (1440-1515), Capodimonte-museet i Napoli, Italien. På billedet demonstrerer Luca Pacioli en sætning af Euklid. På bordet ses en model af et dodekaeder (regulært polyeder omkranset af 12 regulære femkanter). I luften hænger et gennemsigtigt semiregulært polyeder halvt fyldt med vand. Det vides ikke med sikkerhed, hvem eleven forestiller. Luca Pacioli (1445-1514) var franciskanermunk og matematiker.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Euklid i den tidlige oplysningstid:

'Vi har intet at frygte, for jeg ser tegn på mennesker'. Titelbladet fra skotten David Gregorys udgave fra 1703 af Euklids samlede værker (altså ikke kun elementerne – Gregorys udgave var den første samlede udgave af Euklid Vesteuropa). Billedet gengiver en fortælling af den antikke romerske arkitekt Vitruvius, *de Architectura*, kap. 6.



Euklid i romantikken:

Oliver Byrnes farvelagte udgave fra 1847, hvor den excentriske matematiker drømte om at gøre Euklids tankegang forståelig ved systematisk brug af farvekoder. Som pædagogisk princip fandt Byrnes idéer kun ringe opbakning. Men kunstnerisk går der klare tråde fra Byrnes pragtværk til den moderne non-figurative kunst. På nettet kan du finde Oliver Byrnes udgave [her](#).

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

ISBN 9788770668279

10.3.3 Kong Ødipus, de græske tragedier og den græske tanke

Den euklidiske matematik med definitioner, aksiomer og sætninger, der udledes (deduceres) herud fra ved anvendelse af bestemte logiske regler, blev ikke opfundet af Euklid, der virkede i Alexandria omkring år 300 f.v.t. Han perfektionerede det og systematiserede det til en lærebog, der afløste alle tidligere lærebøger. Men vi ved, at han stod på skuldrene af andre – det deduktive system var udviklet i 400-tallet i Athen. Og det prægede både videnskabelig og politisk tænkning og digtningen. Det var i 400-tallet, at den store græske tragedie blev skabt, og de største blandt forfatterne var Aischylos, Sofokles og Euripides. De værker vi har fået overleveret, står stadig stærkt, på samme måde som fx også Shakespeares værker gør. Forklaringen må bl.a. være, at de beskæftiger sig med almene vilkår for menneskenes liv.

Sofokles' skuespil *Ødipus* blev første gang opført i 429. I *Verdens litteraturhistorie*, bd. 1 skriver Hans Hertel om, hvordan det kunne have foregået:

"Vi skal overvære opførelsen af Sofokles' fire bidrag til Dionysos-festens konkurrence, heriblandt 'Kong Ødipus, tragedien om manden, der – uden at vide det – kom til at slå sin far ihjel og gifte sig med sin mor.

I den kølige martsmorgen er teatret blevet fyldt med mere end 10.000 tilskuere: mænd og kvinder, unge og gamle, sågar nogle børn og slaver, athenere og tilrejsende. På de forreste rækker sidder Dionysos' præster og byens embedsmænd, men ellers består publikum af høj og lav, uddannede og analfabeter mellem hinanden. Nogle har købt forfriskninger til de 4-5 timer lange opførelse af dramaer, andre kigger sig omkring efter bekendte eller efter Athens berømtheder. Fælles for dem alle er, at de på forhånd kender dramaets stof, fordi myten om Ødipus – som de fleste andre myter – var fælles gods for alle samfundsklasser. Derfor ved tilskuerne, hvordan det hele ender. Denne viden hører med til det kultiske fællesskab, og den er basis for den såkaldte dramatiske ironi, som de største tragedieforfattere suverænt spiller på: tilskuerne ved mere end personerne i skuespillet, og dét kan får det til at løbe koldt ned ad ryggen på dem i den næste time, mens kong Ødipus kæmper for at afvende det uafvendelige.

…

Kong Ødipus handler ikke om, at en mand i den virkelige verden kunne være kommet til at slå sin far ihjel og gifte sig med sin mor. Dets tema er, hvorledes et menneske, som gør alt for at leve et ansvarligt liv, alligevel viser sig at være magtesløs overfor højere magter. Ødipus handler tilsyneladende af egen fri vilje; han efterforsker bedste hensigt en sag, som han betragter med stor alvor og omsorg for sine medmennesker, Men for hvert skridt viser det sig, at han nærmer sig den skæbne, guderne hele tiden havde tiltænkt ham. …"

Hele afsnittet om Kong Ødipus kan hentes **her**.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Øvelse 1

Forløbet tilrettelægges i samarbejde med dansk, sprogfag, oldtidskundskab, religion, psykologi, mediefag og/eller musik. Der læses i fællesskab afsnit fra Kong Ødipus samt Hans Hertels analyse heraf.
De forskellige fag bidrager hver med andre materialer.

I **matematik** kan man gennemgå øvelse 3 i afsnit 1, diskussionen af bevisers gyldighed i kapitel 0, *Hvad er matematik*, forskellige beviser for Pythagoras' sætning i kapitel 3, *Geometri, konstruktion og beregning*, eller andre projekter, hvor der arbejdes med matematikkens indre struktur.

Forslag til materialer, **andre fag** kunne inddrage, finder du **her**.

På baggrund af disse materialer svares på følgende:

a) Sammenlign Sofokles' beskrivelse af, at menneskets skæbne er uafvendelig, med diskussionen om arv og miljø. Er det det, der er Sofokles' ærinde?

b) Sammenlign Sofokles' beskrivelse af, at menneskets skæbne er uafvendelig, med diskussionen om, at ikke alene bestemte sygdomme, men også menneskelige egenskaber er fastlagt i generne, at der fx findes et særligt forbrydergen. Er dette beslægtet med Sofokles' budskab?

c) Hos Sofokles møder vi en opfattelse af, at et livsforløb er lagt fast fra fødslen. Uanset hvad man gør, kan man ikke bryde ud af rammerne. Resultatet ligger allerede gemt i kim i de oprindelige "aksiomer og definitioner"? Kan denne opfattelse genfindes i nogle af de store fortællinger, der findes i de forskellige fag? Inddrag fx:
    1. opfattelsen af verdens indretning, som den findes i faget fysik i den klassiske mekanik hos Newton og Laplace.
    2. de forskellige opfattelser af klimaproblemerne og hvad vi kan gøre ved dem.
    3. forskellige analyser af konflikters udvikling i historie og samfundsfag.
    4. forskellige psykologiske teorier om menneskets udvikling.
    5. forskellige kunstneres beskrivelse af en skabende proces.

d) Gennemfør en analyse af forholdet mellem på den ene side de rammer, der er lagt for menneskets liv og virksomhed i stort og småt, og på den anden side vores frihed til selv at handle, dvs. af forholdet mellem frihed og forudbestemthed. Du kan inddrage udsagn som "det er samfundets skyld".

ISBN 9788770668279

Ødipus-fortællingen har været genstand for mange fortolkninger, også meget konkrete, der modsiger Hans Hertels påstand: *Kong Ødipus handler ikke om, at en mand i den virkelige verden kunne være kommet til at slå sin far ihjel og gifte sig med sin mor.*

e) Hvis denne vinkel inddrages, i hvilken forstand kan man da tolke Freuds idé om, hvad der styrer vores handlinger fra underbevidstheden, med Sofokles' opfattelse af menneskets skæbne?

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.3.4 Diskoskasteren – de græske skulpturer og forestillingen om bevægelse

Græsk filosofi og videnskab er langt fra en entydig størrelse – der var uenighed om mangt og meget. Men der var ofte enighed om, hvilke problemer der var yderst vanskelige at håndtere. Et af disse er begrebet *bevægelse*. Der var udbredt enighed om at søge forklaringer og finde årsager.

Al bevægelse har en årsag. Men noget, der er i hvile, kan næppe forårsage bevægelse, så årsagen må selv være i bevægelse, og derfor må der bag den ligge en anden årsag osv. Det ser jo ud til at kunne blive ved bagud i det uendelige, og derfor indførte Aristoteles en første årsag, der satte al bevægelse i gang. *Den ubevægede bevæger* kaldtes dette fænomen. Det spiller samme rolle i naturen, som et aksiom gør i matematik – man må starte et sted!

Men selv om vi skulle tro på det, så er problemet ikke løst. I matematik siger Euklid, at det mindste, der findes, er et *punkt*. Et punkt er ifølge Euklid *det, som ikke kan deles*. En linje må jo bestå af punkter. Men hvordan sker en bevægelse fra et punkt A til et andet punkt B? Det siger Euklid ikke noget om, men det optog en filosof som Zenon, der mente, at det måtte ske ved at gennemløbe alle punkter imellem dem. Men hvis en pil skydes af fra A med retning mod B, og på et tidspunkt er i C, hvordan kommer den så til ”det næste punkt”? Hvor lang tid tager det? Uanset svaret er det for lang tid, for pilen skal jo gennem alle punkterne hen til B. Så pilen står faktisk stille – bevægelse er umulig.

Selv om dette strider mod praksis, er det svært at forklare, hvad man mener med, at en pil er i bevægelse i et punkt (der ikke kan deles). Og for grækerne var det under alle omstændigheder i god overensstemmelse med, at *hvile er den naturlige tilstand*. Alt søger mod sin naturlige tilstand, så alt søger mod hvile.

I 400-tallets Grækenland udvikles i billedkunst og skulptur det, som eftertiden har kaldt ”den strenge stil”. Motiverne kan være dramatiske og fortællingerne bag være historier, der involverer voldsomme følelser. Men det fremstilles kontrolleret – figurer kan være i bevægelse, men alligevel være præget af en ro. Følelser er også kontrollerede og kammer aldrig over i sentimentalitet.

ISBN 9788770668279

Diskoskasteren fra ca 450 fv

Zeus, der kaster en tordenkile, eller Poseidon, der kaster en trefork, ca 460 fvt

Vognstyreren, oprindelig del af større gruppe, ca 475 fvt.

Øvelse 1

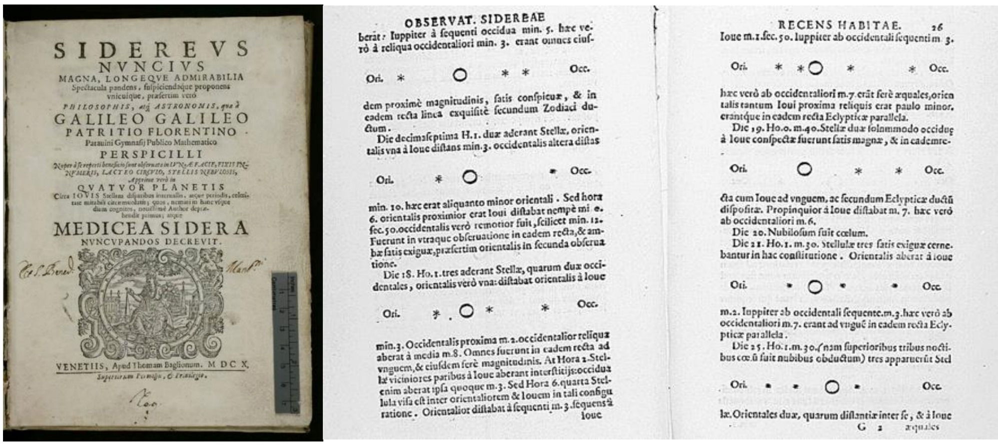
Gennemfør sammen med dansk, oldtidskundskab eller billedkunst en bred analyse af begrebet *bevægelse*, og af hvordan forskellige fag opfatter, definerer og håndterer dette begreb. I matematik kan i 1.g inddrages projekt 7.6, hvor vi går lidt dybere ned i den græske filosof Zenons analyse af bevægelse og uendelighed. I 2. g kan man i matematik inddrage differentialeregningens behandling af uendelige processer og forholdet mellem bevægelse og stilstand.

Anvend dernæst de almene begreber på en speciel analyse af forholdet mellem bevægelse og ro i *Diskoskasteren* eller en af de andre skulpturer fra denne periode. Inddrag også en geometrisk analyse af skulpturen. Sammenlign evt. med skulpturer fra andre perioder. De originale skulpturer er sjældent bevaret, men især romerne lavede kopier i store mængder, og herved er mange bevaret for eftertiden. Vognstyreren og statuen af Zeus/Poseidon er de originale; de blev fundet henholdsvis ved udgravning i Delfi og i havet ved Kap Artemis. *Diskoskasteren* er en kopi, men det er samtidig en af de få skulpturer, hvor vi kender billedhuggeren. Skulpturen er omtalt i et romersk skrift, hvor det hedder, at billedhuggerens navn var Myron. Der står yderligere, at:

"Myron ser ud til at være den første, der skabte realistisk kunst, hans kunst var harmonisk, han var præcis med proportionerne. Selv om han var omhyggelig med det fysiske legeme, ser han ikke ud til at have givet udtryk for indre følelser…"

10.3.5 Galilei og Brecht – Om at læse i naturens store bog

I 1608 har Galilei (1564-1642) fået bygget sig en kikkert, og efter få år gør han fuldstændig epokegørende opdagelser. I 1610 udgiver han værket *Sidereus Nuncius (Budskabet fra stjerne*rne), hvori han bl.a. præsenterer opdagelsen af, at der er bjerge på Månen, samt sin opdagelse af Jupiters fire største måner, som han kaldte for De Mediciske Stjerner, opkaldt efter den ledende Medici-slægt i Firenze. Han har *"opdaget af fire planeter, som ingen før har set, fra verdens skabelse til nu",* skriver han. I en række breve i årene efter, bl.a. til Kepler, fortæller han om to yderligere opdagelser, nemlig opdagelsen af solpletterne, og af at planeten Venus har faser som Månen.



Titelsiden af Sidereus Nuncius samt et oplag med hans tegninger af Jupiters fire måner

Galilei kan betegnes som den første helt moderne naturvidenskabsmand. I *Sidereus Nuncius* skriver han:

"Naturfilosofien er skrevet i den store bog, som for evigt ligger for vore øjne. Jeg mener universet – men vi kan ikke forstå den, hvis vi ikke først lærer sproget og forstår de symboler, hvori den er skrevet. Bogen er skrevet i det matematiske sprog, og symbolerne er trekanter, cirkler og andre geometriske figurer, uden hvis hjælp det er umuligt at forstå et eneste ord af den, uden hvilket man tomt vandrer gennem en mørk labyrint."

ISBN 9788770668279

Den tyske forfatter Bertolt Brecht (1898 – 1956) boede i 30'erne nogle år i Danmark, da han var på flugt fra nazismen. Flere af hans berømte skuespil og digte er skrevet her. Det var også her, han skrev sin første version af skuespillet *Leben des Galilei (Galileis liv),* dateret 1938/39. Han flygtede videre til USA, og her blev han boende nogle år efter krigens ophør. I USA skrev han en forkortet version af skuespillet, og efter han var vendt tilbage til Tyskland, tog han fat på at udarbejde en tredje version. Stoffet optog ham således meget. De tre versioner er lidt forskellige på en række punkter, men fortællingen er grundlæggende den samme – Galileis konflikt med kirken i spørgsmålet om støtten til Kopernikus' heliocentriske system. Brecht har naturligvis også en intention om at virke ind på sin samtid med nogle grundlæggende overvejelser om, hvordan vi opnår viden og indsigt og om forholdet mellem videnskab og det omgivende samfund. Særligt det sidste spørgsmål giver han forskellige svar på i de tre udgaver.

I "**Projekt 10.6 Brecht og Galilei**" beskæftiger vi os både med Galileis egne opdagelser, med hans diskussioner og strid med kirken, som Brecht fremstillede det, og vi kommer ind på, hvorfor Brecht lavede forskellige versioner af sit skuespil.

10.4.1 Tal, tabeller og andre hjælpemidler

Omkring 3000 f.v.t. opfandt administrationen i byen Uruk i det sumeriske rige – en by beliggende i den sydlige del af det nuværende Irak - en metode til at fastholde aftaler og beslutninger. De skabte symboler for tal, bestemte varer, dyr, professioner osv., som de tegnede i vådt ler på små tavler. I løbet af de næste hundreder af år blev disse symboler forenklet, så de var lette at afsætte. Herved skabte de verdens første skriftsprog. Vi kalder det kileskrift efter navnet på det redskab, de tegnede med. Symboler for tal hørte til de første skrifttegn, fordi det, man ønskede at fastholde, havde noget med tal at gøre. Da det sumeriske rige efter 1000 år blev afløst af det babylonske, overtog dette folk kileskriften og talsystemet, og hurtigt spredte det sig til andre folkeslag i Mellemøsten og omkring Middelhavet.

Ethvert samfund med en central magt og med en fælles administration af en række forhold i samfundet er dybt afhængig af at have et fornuftigt talsystem. Der skal inddrives en form for skatter, og de, som arbejder i den fælles administration eller på de fælles projekter, skal have betaling, måske i form af naturalier. Samfundets forsyninger med vand, korn og andet forråd skal være tilstrækkelige, og for at modstå dårlige tider skal der være en vis mængde af disse fornødenheder på lager.

Alt dette er umuligt uden et talsystem, hvormed man kan beskrive, skabe sig overblik og føre regnskab med de forskellige værdier, og som er egnet til at udføre visse beregninger, fx udregning af arealer og rumfang. Og talsystemerne er givetvis udviklet og siden forfinet for at kunne dække sådanne behov. Mange af de arkæologiske fund fra gamle kulturer handler netop om regnskaber over forråd og om skatteinddrivelse.

Tal findes ikke i naturen – det er en af menneskets helt store opfindelser, og det har krævet en evne til abstrakt tænkning at udvikle et talbegreb. Tal udtrykker på den ene side noget meget konkret, hvor tallet er knyttet til noget bestemt, som eksempelvis i følgende *formuleringer*: ”Der er 28 elever i min klasse”, eller ”Jeg køber 7 rundstykker med hjem”. Men tal er samtidig meget abstrakte, idet vi bruger det samme tal 7 i så forskellige sammenhænge som ”7 rundstykker”, ”klokken er 7” og ”fuglen vejer 7 gram”.

Øvelse 1. Tallenes oprindelse

I øvelse 1.3 i kapitel 7 kan du finde et uddrag af romanen *Hulebjørnens klan*, der foregår for 30.000 år siden. Heri giver forfatteren Jean Auel et bud på, hvordan de allerførste begreber om tal kan være opstået. Læs uddraget, og svar på de spørgsmål, der stilles i det tilhørende arbejdsark.

I de store oldtidskulturer som Mayakulturen, det ægyptiske rige, det babylonske samfund og Romerriget udvikledes talsystemer, hvor man kun behøvede få symboler for at skrive store tal. I afsnit 1.3 i kapitel 7 og i nogle af projekterne til kapitel 7 kan du finde materialer om disse gamle talsystemer.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Øvelse 2. Oldtidskulturernes talsystemer

Vælg en eller flere af disse oldtidskulturer, fx hvad I har arbejdet med i faget historie, og svar på følgende spørgsmål:

a) Hvad er karakteristisk for pågældende talsystem? Brug begreber som *positionstalsystem*, *grundtal* og *additive talsystemer* til at beskrive talsystemet.

b) Hvilke talsymboler anvendte de?

c) Havde de symboler for 0? Hvordan håndterede de brøker eller decimaltal?

d) Hvilke opgaver og problemer i pågældende samfund skulle talsystemet tjene til at løse? Inddrag både rent praktiske opgaver og problemstillinger i tilknytning til deres verdensbillede.

e) Giv eksempler på, hvordan de udførte simple regnestykker.

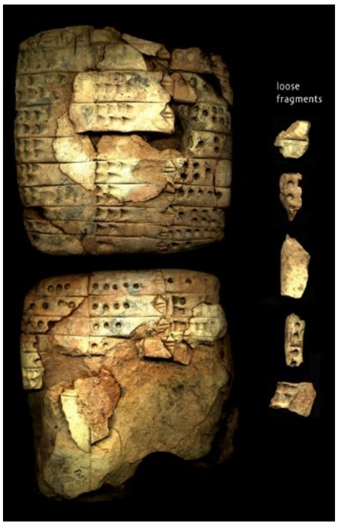
f) Ved vi noget om, hvem der udførte sådanne beregninger, og om der blev undervist i matematik og regning?

Øvelse 3. Matematiske tabeller og andre hjælpemidler

Løsning af praktiske eller astronomiske opgaver, hvor der skulle arbejdes med tal og udføres beregninger, kunne være både vanskelig og tidkrævende. Helt fra første færd, hvor vi har overleveringer om brug af tal, har vi også overleveringer om, hvordan matematikere eller skrivere og bogholdere i samfundet udviklede hjælpemidler. Det kunne være tabeller, man kunne slå op i. Eller det kunne være regnetekniske hjælpemidler som abacus (kuglerammer), der blev meget udbredt i Romerriget. I den græske kultur udarbejdede Ptolemaios, der arbejdede i Alexandria, de første egentlige trigonometriske tabeller. I kapitel 8 kan du i projekt 8.1 om Ptolemaios' kordetabel finde en indføring heri.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Verdens ældste kendte matematiske tabel fra den sumeriske by Shuruppag ca. 2600 f.v.t. gengivet med for- og bagside. De første to søjler er identiske og rummer længdemålene fra 600 til 60 stave (ca. det samme som 3600 m til 600 m), og den sidste søjle rummer kvadratet på længden, dvs. arealet udspændt af de to længder. Du kan læse mere om det her.

a) Giv eksempler på hvilke typer af matematiske tabeller, man kender fra sådanne oldtidskulturer. Der tænkes både på simple regnetekniske tabeller og andre tabeller, fx til brug for geometriske beregninger. Forklar, hvordan tabellerne anvendes, og redegør for hvilke opgaver og problemer i pågældende samfund, sådanne tabeller kunne hjælpe med til at løse. Du kan hente hjælp i projekter i kapitel 7 og kapitel 8, eller du kan søge på nettet.

b) En bestemt tabel fra den gamle babylonske matematik har fascineret os, siden den blev opdaget. Det er den såkaldte *Plimpton*-tabel. Du kan finde tabellen omtalt **her**. Tabellen er også gengivet og omtalt i *Hvad er matematik*, kapitel 3, afsnit 5.1, (Grundbogen s. 124-125). Tabellen giver et indblik i, at der i dele af det babylonske samfund blev arbejdet med matematik på et ret højt niveau. Hvad er indholdet i Plimpton-tabellen?

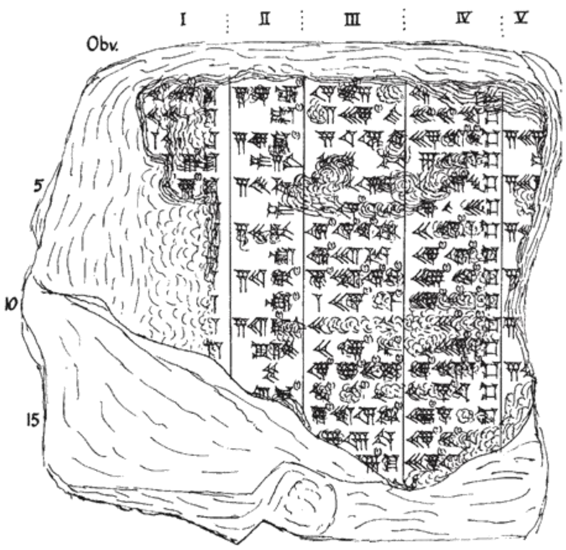
c) En tabel er én form for hjælpemiddel, et matematisk værktøj som en abacus er et andet. Søg på nettet, og giv eksempler på, hvordan man regner på en abacus.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt: Babyloniernes astronomiske tabeller – Saros-cyklen

I stort set alle oldtidssamfund blev der anvendt mange intellektuelle ressourcer til udarbejdelse af kalendere og astronomiske tabeller, ikke mindst over sol- og måneformørkelser. Specielt babylonierne er kendt for at samle sådanne tabeller. Fra denne kultur er der fundet tabeller med mere end fire hundrede års optegnelser over sol og måneformørkelser.



Den sidste babylonske tabel med sol- og måneformørkelser for perioden 12 f.v.t. til 43 e.v.t. Søjlerne angiver datoen (II), månens længdegrad (III) og størrelsen af formørkelsen (IV).

Der er ingen optegnelser, der afslører kendskab til en egentlig teori for, hvordan sol- og måneformørkelser egentlig opstår. Babylonierne arbejdede med tabellerne ud fra et beregningsmæssigt synspunkt for fx at kunne forudsige sol- og måneformørkelser (og knytte varsler til disse). De nåede imponerende resultater i de talmønstre, de var i stand til at trække ud af tabellerne, ligesom de udviklede forbløffende avancerede regneteknikker/algoritmer til brug for udarbejdelsen af tabeller. Du kan finde en kort introducerende gennemgang i en artikel [her](#).

Her kan du finde "[Projekt 10.7 Babyloniernes astronomiske tabeller](#)", der handler om Saros-cyklen.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt: Kalendere – Fastlæggelsen af påsken og andre kalenderproblemer gennem tiderne

Alle samfund har haft kalendere. En kalender tjener to formål: For det første skal den holde styr på dagene og fortælle, hvor vi er lige nu i forhold til årets gang med alle dets opgaver, forpligtelser og ritualer. For det andet skal den holde styr på årene. Det har altid voldt problemer at lave en kalender. Årstal tælles ud fra et udgangspunkt, men hvordan bliver man enige om et fælles udgangspunkt? Og hvad er et år?

Det umiddelbare svar er: Den tid, der går, før Solen og Jorden er tilbage i præcis samme indbyrdes position. Men hvordan afgøres det? Der er jo ingen målstreg i verdensrummet. I mange samfund besluttede man at fastlægge en sådan ”målstreg” ved hjælp af astronomiske observationer, som fx stjernernes placering. Måske har man allerede tænkt i lignende baner i stenaldersamfund? Sådanne teorier indgår i tolkningen af fortidsmonumenter som Stonehenge. Ved hjælp af de store stens placering kunne man måske fastlægge solhverv eller forårsjævndøgn.

I det ægyptiske samfund spillede stjernen Sirius, der er himlens klareste stjerne, en stor rolle. Visse tidspunkter af året er den ikke synlig på himlen, men den vender tilbage og kan igen ses på himlen, præcis når Nilen begynder at svulme op, oversvømme markerne og aflejre det frugtbare dynd. Den ægyptiske kalender startede årets gang med Sirius’ tilbagevenden.

Selv om de forskellige oldtidssamfund – Mayakulturen, det gamle Ægypten, oldtidens kinesiske samfund, det græske samfund, Romerriget – ikke kunne måle helt nøjagtigt, så vidste alle, at årets længe er mellem 365 og 366 døgn. Når dette skulle udmøntes i en kalender, skete det på mange forskellige måder.

Den julianske kalender blev fastlagt som gældende inden for Romerriget og i hele den kristne verden på det første store fælles kirkemøde, efter at kristendommen var blevet statsreligion. Blandt de øvrige punkter på dette kirkemøde var en beslutning om fastlæggelsen af datoen for påsken. Påsken var dengang uden sammenligning den vigtigste begivenhed for de kristne, så det var afgørende at finde en fælles dato, alle kunne samles om. Da man ikke havde en kalender, alle accepterede, og da man ønskede at frigøre den kristne påske fra den jødiske, besluttede man at fastlægge påsken ud fra astronomiske begivenheder. Det tog yderligere nogle hundrede års stridigheder, før alle accepterede en fælles regel: *At påskedag er den første søndag efter første fuldmåne efter forårsjævndøgn*. Sådan er det stadig; det er derfor, datoen varierer år for år.

Du kan her finde "**Projekt 10.8 Fastlæggelse af påsken og andre kalenderproblemer**", hvor der kan arbejdes videre med kalendere og kalenderproblemer gennem tiderne.

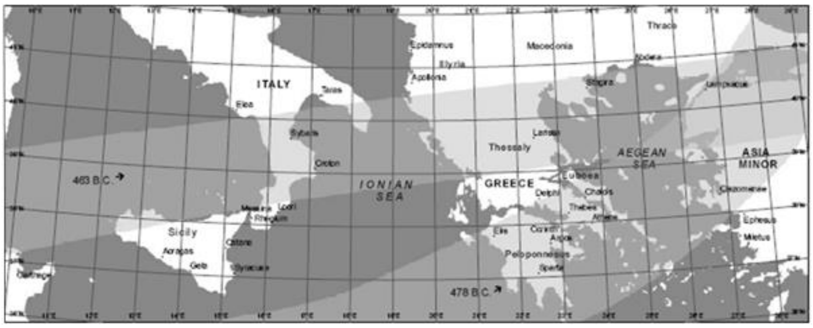
ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.4.2 Verdensbilleder

Anaxagoras (ca. 500 f.v.t. – 428 f.v.t.), der flyttede til Athen i sine unge dage og blev en nær ven af den store statsmand Perikles, tilskrives traditionelt opdagelsen af, at Jorden er rund, at månen ikke selv lyser, men blot genspejler Solens lys, og at solformørkelsen opstår, når Månen glider ind foran solen, og at måneformørkelsen tilsvarende opstår, når månen glider om bag Jorden i Jordens skygge.

Det åbnede muligheden for at ræsonnere omkring størrelsesforholdene i solsystemet på baggrund af simple geometriske modeller. Anaxagoras oplevede selv en solformørkelse, hvis skygge dækkede Peloponnes. Antages det, at Solen og Månen er nogenlunde lige store og ikke ligger så langt fra Jorden, vil månens skygge på Jorden dække et område af samme størrelse som Solen og Månen. Hvor primitiv modellen end er, kan den være baggrunden for Anaxagoras' berømte påstand om, at Solen var en glødende sten på størrelse med Peloponnes.

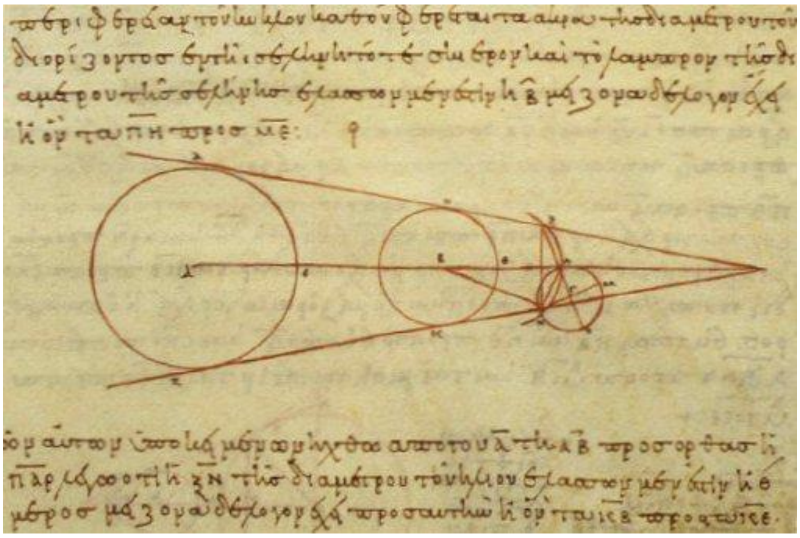


Skyggerne for de to solformørkelser, der var synlige fra Grækenland i Anaxagoras' levetid. Det er den nederste skygge fra 478 f.v.t., der netop dækkede Peloponnes.

I Archimedes' skrift Sandtælleren forsøger han at udregne, hvor mange sandkorn der kan være i hele universet. Derfor har han brug for et bestemt verdensbillede, som han kan regne på. Han vælger det geocentriske med Jorden i centrum, men han refererer i sin indledning til, at astronomen Aristarchos havde en anden opfattelse.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Detalje fra en græsk kopi (10. årh.) af Aristarchos´værk Om Afstande og Størrelser af Solen og Månen.

Øvelse 1

Archimedes' skrift ligger som kildetekst i afsnit 5.2. Læs indledningen til skriftet, og redegør for, hvad det er for en anden teori. I kapitel 11 *Fagligt samarbejde matematik og fysik* findes et materiale om Aristarchos og hans geometriske modeller for at beregne afstande og størrelser i verdensrummet. Materialet indeholder en række øvelser.

Projekt: Fagligt samarbejde – De store aktører i udviklingen af verdensbilledet

Oldtidens geocentriske verdensbillede blev udformet af filosoffen Aristoteles og astronomen, geografen og matematikeren Ptolemaios. Det stod mere eller mindre uantastet i næsten 1500 år og fik ekstra autoritet, da den katolske kirke i 1100-tallet tog det til sig. Da der opstod stadigt større problemer med at anvende dette system til at fastlægge kirkens kalender, tilskyndede kirken den polske præst og selvlærde astronom Kopernikus til at finde en ny model. Siden tog udviklingen fart med aktører som Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Rene Descartes og Isaac Newton.

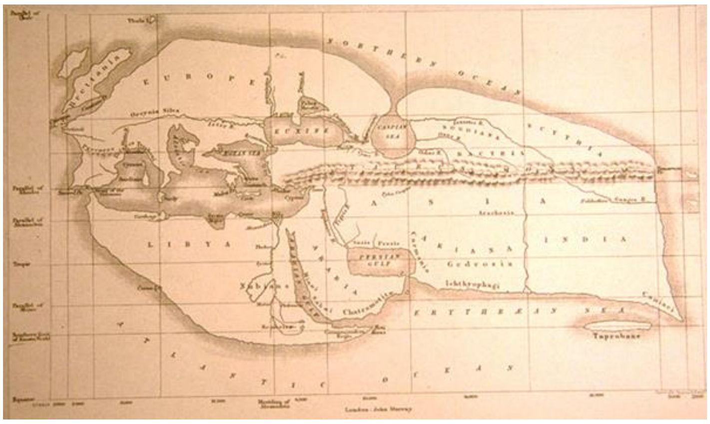
I dette projekt lægges op til et fagligt samarbejde om verdensbilleder. Du kan **her** hente "Projekt 10.9 Fagligt samarbejde om verdensbilleder". Projektet rummer en lang række kildematerialer med tekster af de forskellige aktører. Man kan vælge elementer ud og arbejde dem igennem i hele klassen eller dele op i hold, som så vælger hver sit emne.

ISBN 9788770668279

10.4.3 Opdagelsesrejser og navigation

Et af de store mål med opdagelsesrejserne gennem tiderne har været at opmåle verden, at finde vej og at tegne kort – ved siden af at løse forskellige specielle opgaver. Det er ikke let at tegne kort – enhver, der sejler langs en kyst, ved, hvor svært det er at danne sig et bilede af, hvordan kysten egentlig ser ud. Der skal foretages målinger og beregninger. I "**Projekt 6.6 Landmåling – opmåling af skolegården**", som du finder her, er principperne i en sådan triangulering demonstreret.

Når der skal tegnes kort i lidt større skala, fx et kort over Danmark, opstår den vanskelighed, at vi her skal overføre fra en jordkugle til et plant stykke papir. Det kan man ikke. Man går derfor på kompromis med de krav, man stiller til nøjagtigheden af et kort/et atlas. Kortprojektioner og matematikken heri vender vi tilbage til på B- og A-niveau.



Eratosthenes var den første, der anvendte et gitter af meridianer som længdegrader og paralleller som breddegrader. Eratosthenes gik ud fra, at den beboede del af verden var placeret på den nordlige halvkugle, omgivet af et kæmpeocean, og han skal have sagt, at "Hvis det ikke var fordi, det Atlantiske Ocean var så enormt, så ville man kunne sejle fra Iberia (Spanien) til Indien langs en og samme parallel."

Eratosthenes (276 – 194 f.v.t.), der var den første, der bestemte Jordens omkreds, tegnede også det første kort over hele verden. Det er gået tabt, men ud fra hans mange tusinde optegnelser af afstande i hans værk med titlen *Geografi*, har man rekonstrueret modeller. Du kan finde en større artikel med en præsentation af Ptolemaios' *Geografi* **her**.

Det var dette værk, der navngav faget geografi. Ptolemaios' kort var det bedste, man havde, da Columbus satte ud på verdenshistoriens mest berømte opdagelsesrejse i 1492. Ptolemaios anvendte en slags koordinatsystem, der minder om vores længde- og breddegrader. Kan man bestemme længde- og breddegraden for det sted, hvor man befinder sig, kan man navigere. Bestemmelse af længdegrader er imidlertid meget vanskeligt. Man kunne udnytte astronomiske tabeller og ræsonnere ud fra ens egne observationer, men uanset, hvad man gjorde, så var det centrale, at man havde brug for et nøjagtigt ur til bestemmelse af længdegrader.

ISBN 9788770668279

Øvelse 2

a) Hvad er længdegrader?

b) Antag, at du har et pålideligt ur, som viser den nøjagtige tid, da du sejler ud fra din hjemhavn. Hvordan kan du bruge uret til at finde ud af, hvilken længdegrad du er kommet til?

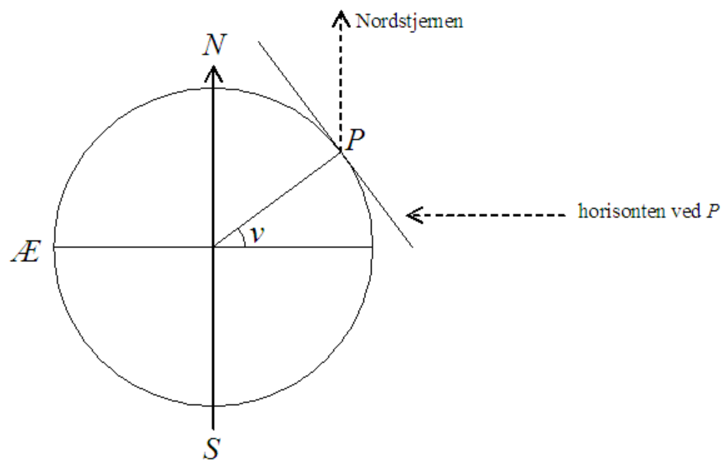
c) Slå op på nettet, og find ud af, hvad *kampen om længdegraden* var for noget, hvornår den fandt sted, hvad der igangsatte den, og hvem der vandt kampen?

d) I dag måles længdegrader ud fra Greenwich-observatoriet ved London. Alle punkter på en halvcirkel fra Nordpolen ned gennem Greenwich til Sydpolen har længdegrad 0°. Herfra måles graderne i henholdsvis østlig og vestlig længde, så der på jordkloden stik modsat Greenwich er 180° østlig og 180° vestlig længde (dette er omtrent den såkaldte datolinje).

Det er en anden og principielt meget lettere sag at bestemme breddegrader. Den grundlæggende idé bag metoden har man kendt siden oldtiden. I perioden, hvor Bagdad var centrum for kultur og videnskab, blev hjælpemidler hertil som sekstanter og ikke mindst astrolabier mere og mere forfinede.

Øvelse 3

a) Hvad er breddegrader? På hvilken breddegrad befinder du dig?



b) Blandt de hjælpemidler, der blev anvendt, var *sekstant*, *Jakobsstav* og *astrolabium*. Hvordan fungerer disse? Find på nettet billeder af hver af dem, og forklar deres funktion ud fra billedet.

Projekt: Columbus' fire ekspeditioner til den nye verden

På Columbus, tid var teknikken til at bestemme breddegrader kendt, og han noterede også breddegrader for de steder, han nåede til. Men selv om det er simpelt i princippet, kan det i praksis være svært at bestemme breddegraden, og Columbus var ikke en mester til det – steder, der befinder sig på omkring 20 grader nordlig bredde, kunne han angive til 46 grader. Derfor er det også svært at finde ud af, hvor han egentlig befandt sig. Han havde også astronomiske tabeller med, der fortalte om stjernehimlen, om hvor planeterne befandt sig og om sol- og måneformørkelser. Datidens mest nøjagtige tabeller var de såkaldte *Ephemeride-tabeller* udarbejdet af den tyske astronom og matematiker Johannes Müller, der også gik under det latinske navn Regiomontanus.

Disse tabeller reddede Columbus og hans besætnings liv på den 4. ekspedition, hvor de i 1504 var strandet på øen Jamaica. De indfødte ville ikke længere affinde sig med, at de skulle levere fødevarer og andet til europæerne og optrådte ifølge Columbus' dagbøger truende. Ved læsning i de astronomiske tabeller opdagede Columbus, at Regiomontanus forudsagde, at en total måneformørkelse ville indtræffe 29. februar 1504. Denne måneformørkelse var beskrevet i alle detaljer med tegninger og formørkelsens varighed osv., men det var angivet i Nürnberg-tid! Columbus var imidlertid så desperat, at han på dagen kaldte de indfødtes høvdinge til sig og sagde, at hvis de ikke samarbejdede, ville han sørge for at slukke Månens lys. Det imponerede ikke de indfødte, men som dagen skred frem, skulle de erfare, at Månen faktisk blev slukket! Det overbeviste dem om, at Columbus besad mægtige kræfter, Columbus tændte for Månen igen, og han fik derefter alle de nødvendige forsyninger. En total måneformørkelse tager så lang tid, at dette bluff-nummer var muligt. Denne historie har inspireret en række forfattere, og nogle har ændret historien til at handle om solformørkelser. Mest kendt er måske Hergés version af historien i en af sine fortællinger om Tintin.

I kapitel 8 finder du "**Projekt 6.10 Opdagelsesrejser og Navigation**" er der et oplæg til et arbejde med Columbus' første opdagelsesrejse i 1492.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt: Carsten Niebuhrs rejse til det lykkelige Arabien

I 1761 udsendte den danske konge en stor ekspedition, der skulle kortlægge og undersøge det *lykkelige Arabien*. Det var i oplysningstiden, og Danmark ønskede også at markere sig som en af de store nationer, der var med til at opmåle verden. Formålet med ekspeditionen var rent videnskabeligt og var nøje fastlagt i en instruks. Ekspeditionen skulle gå over Konstantinopel (Istanbul), rejse ned ad Nilen og derefter over Sinai til den arabiske halvø, hvor *det lykkelige Arabien* lå. Det var Yemen, man mente.

Carsten Niebuhr var ekspeditionens matematiker og geograf, men i de tider var de lærde folk ofte også lærde inden for mange andre felter. Således var Carsten Niebuhr en stor sprogbegavelse. Ekspeditionen blev en katastrofe for deltagerne, der alle omkom, bortset fra Niebuhr selv. De døde af forskellige infektionssygdomme, først og fremmest malaria. Det blev dog en videnskabelig succes forstået på den måde, at Niebuhr løste opgaverne og undervejs havde sendt et væld af materialer og optegnelser hjem. Niebuhrs nøjagtige tegninger af hieroglyfferne var fx et væsentligt kildemateriale, da man endelig fik tydet dem.

Niebuhrs materialer blev udgivet i tre bind under titlen *Rejsebeskrivelser fra Arabien og omkringliggende lande*. Det sidste bind udkom først efter hans død. Carsten Niebuhr var fra Hamburg, og værket var skrevet på tysk. Det er genudgivet mange gange, men først i 2003 kom der en komplet dansk oversættelse af værket. Forfatteren Thorkild Hansen udgav i 1962 en roman om ekspeditionen med titlen *Det lykkelige Arabien.*

I kapitel 8 finder du "**Projekt 6.10 Opdagelsesrejser og Navigation**", er der et oplæg til et arbejde med Carsten Niebuhrs materialer. Projektet kan naturligt udvides til et fagligt samarbejde, hvor man læser udvalgte afsnit af rejsebeskrivelserne, fx beskrivelsen af Jerusalem og Bagdad, af jøderne i Mellemøsten og af forskellene på sunnier og shiitter blandt de muslimske troende.

10.5.1 Logistik og akvædukter

Når mennesker etablerer bysamfund, opstår der en række logistiske problemer. Der skal transporters vand og fødevarer ind til byen, og der skal transporteres affald væk fra byen. Da Romerriget var på sit højeste, havde Rom ca. 1 million indbyggere. Korn til at lave brød blev hentet langvejsfra, og sikring af en stabil kornforsyning var til enhver tid et centralt spørgsmål for magthaverne. Uden brød ville der komme oprør.

Endnu mere afgørende var det at sikre vandforsyningen. Da Rom var en lille by, har folk selv skaffet sig vand fra kilder og måske fra Tiberen, floden, der løber gennem Rom. Men floden blev også brugt til at skaffe affald væk med, og vandet herfra blev således også en sundhedsrisiko. Der skulle findes en anden løsning. Rom ligger i et lavland ved floden og er omgivet af højland på tre sider. Her er der rigeligt med kildevand, men hvordan får man det ind til byen?

I 312 f.v.t. tog romerne fat på at løse dette med en ingeniørmæssig bedrift, der stadig står som noget af det mest imponerende, menneskene har skabt: De byggede den første akvædukt (vandkanal), som blev kaldt Aqua Appia. En akvædukt er en vandledning, der fører vandet fra kilden over dale og gennem bjerge frem til byen, og som er konstruereret sådan, at vandet løber af sted alene ved tyngdekraftens hjælp. Dvs. der er et større eller mindre fald hele vejen. Den første akvædukt var 16,5 km lang og løb hovedsageligt under jorden. De underjordiske kanaler var bygget så store, at man kunne rense og vedligeholde dem. De fortsatte med at bygge disse akvædukter til Rom indtil 226 e.v.t., hvor den sidste blev bygget. På dette tidspunkt var der 11 akvædukter.

Øvelse 1

Se følgende to film: **The Roman Aqueducts** og **Roman Engineering Aqueducts**, og giv på den baggrund en præsentation af, hvordan romerne løste vandforsyningsproblemet. Du kan hente yderligere information i et materiale af Poul Nielsen om Roms vandforsyning, som kan hentes på nettet **her**.

Øvelse 2.

Du finder en oversigt over de 11 akvædukter **her**.

a) Hvor meget vand blev transporteret til Rom hver dag?

b) Hvor meget vand var i gennemsnit til rådighed pr. indbygger i Rom om året?

c) Hvor meget vand bruger en dansker gennemsnitligt om året? Spørg evt. i din egen familie.

d) Hvad brugte Rom denne overdådighed af vand til?

Øvelse 3

Læs uddraget af **Peter Ørsted, Romerne**, og gør rede for den særlige romerske bade-kultur med brug af de store *termer*.

Øvelse 4

Akvædukten Aqua Julia henter vand fra en kilde, der udspringer 350 m over havoverfladen og lander i Rom på en plads, der ligger ca. 59 m over havet.

a) Hvad er det gennemsnitlige fald pr. km? Hvad er det pr. meter?

b) Antag vandledningen har samme hældning hele vejen. Hvor stor er den vinkel vandledningen danner med vandret?

c) Til at bygge akvædukter med en sådan nøjagtighed udviklede de romerske ingeniører forskellige hjælpemidler, bl.a. en såkaldt Chorobat. Find på nettet, hvad dette er, og beskriv, hvordan den kan anvendes til at bygge med en bestemt hældning.

Øvelse 5 – især for A-niveau.

I ovennævnte materiale om Roms vandforsyning kan du læse om sammenhængen mellem vandets gennemstrømningshastighed og faldet. Giv en præsentation heraf og opstil nogle eksempler.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

10.5.2 Magtens og demokratiets bygninger – Hvad signalerer arkitektur?

Selv om der er variation i de græske templers arkitektur, er det, som springer i øjnene, en forbløffende ensartethed. Der er grundlæggende kun tre forskellige søjletyper, dorisk, jonisk og korintisk, og for hver af dem er der bestemte systemer i deres opbygning. Måler man op, hvor meget hver enkelt del fylder, kan man se, at der må have været en slags manual for de arkitekter og håndværkere, der styrede byggeriet.

Den stramhed og enkelhed, der præger byggeriet, udspringer af den samme kultur, som frembragte Euklids *Elementer* og Aristoteles' *Logik*. Vi har ikke overleveret sådanne manualer fra den græske kultur. Men fra Rom, der i vid udstrækning overtog og videreudviklede den græske tradition for byggeri af templer og i forlængelse heraf byggeri af magtens institutioner, har vi en omfattende fremstilling af kravene til arkitekturen. Det er et værk af Vitruvius (ca. 70 f.v.t. – 15 e.v.t.), der simpelthen hedder *Om arkitektur (De Architectura),* og som kom til at danne skole for arkitekturen helt frem til renæssancen.

Projekt: Serlios syv bøger om arkitektur – spiralkonstruktioner

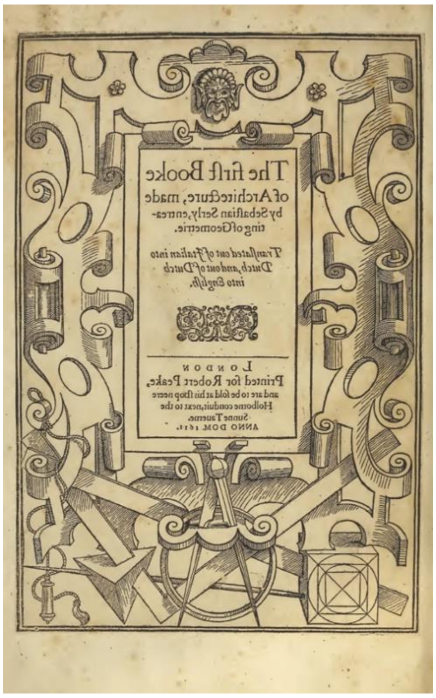
Både Vitruvius og senere teoretikere er svære at læse, ikke mindst fordi de ikke eller kun yderst sparsomt illustrerede deres forklaringer og regler. Men i 1500-tallet udgav den italienske arkitekt Sebastiano Serlio (1475-1554) *De syv bøger om arkitektur*, som han selv gav titlen *Alle værker om arkitektur og perspektiv.* Serlio tager udgangspunkt i Vitruvius, og han forklarer, hvad Vitruvius har ment – og han skrev på italiensk, så samtidens håndværkere og arkitekter kunne læse den. Samtidig er Serlios værk gennemillustreret, så den kan anvendes som en manual.

Opbygningen af *De syv bøger* er tydeligt inspireret af *Euklids Elementer*, og de fremstår nærmest som et aksiomatisk deduktivt værk. Men han valgte at udgive bind 4 om *Søjleordner* som den første bog, åbenbart fordi han vurderede, at der i særlig grad var behov for at give en systematisk fremstilling af dette emne.

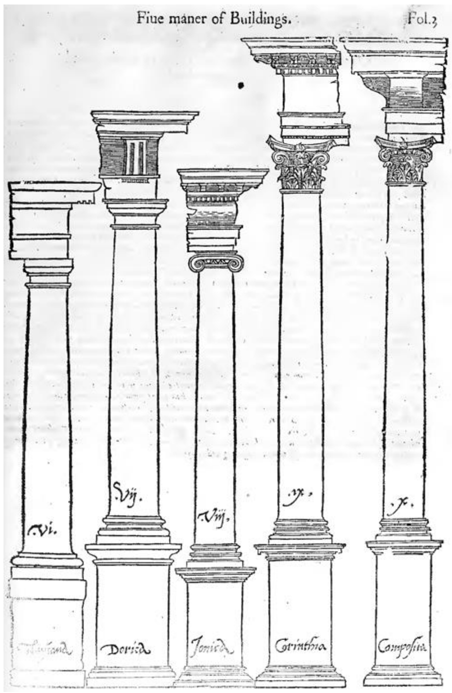
Den stærke optagethed af søjleordner, som gør sig gældende i arkitekturteori og praksis i 1400- og 1500-tallet, afspejler den generelle interesse for orden, systematisering og regelmæssighed. De fem klassiske søjleordner defineredes endeligt i alle deres dekorative og proportionelle detaljer af Sebastiano Serlio (1475-1554), der udgav den første egentlige, illustrerede arkitekturtraktat på tryk (1537), og knæsatte betegnelsen søjleorden. Ordenerne blev fremover et langt mere entydigt normsæt, end der nogensinde havde været tale om i antikken. Selv om de tre grundtyper (dorisk, jonisk og korintisk) er beskrevet af Vitruvius, var der i den klassiske romerske arkitektur tale om et væld af variationer over disse hovetemaer, snarere end fast definerede standarder. I 14-1500-tallet derimod, tilstræbte man en homogenitet i det stilistiske udtryk. Ved anvendelsen af søjleordner komponeret af serier af identisk dimensionerede og dekorativt udformede elementer, adskiller det arkitektoniske formsprog sig også fra det ældre middelalderlige, der typisk rummer variationer i typer og materialer inden for samme forløb af søjler. I disse generelle bestræbelser i tiden omkring 1500 hen imod regularisering og ensartethed i kompositioner og enkeltfigurer var geometri og matematik hjælpediscipliner af stor betydning. (Tankens Magt, bd. 1, s. 580)

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Forsiden af den engelske udgave



Indledende illustration til kapitel 4 om de 5 søjleordner

Øvelse 1

Værket blev hurtigt oversat til andre sprog, bl.a. engelsk. Du kan finde den engelske originaloversættelse fra 1610 **her**. Vær opmærksom på, at filen er meget stor. Den er skrevet med datidens engelsk, men det engelske sprog har ikke forandret sig så meget, så med lidt anstrengelse kan man godt læse teksten. Orienter dig i bogens opbygning, og giv en kort fremstilling heraf.

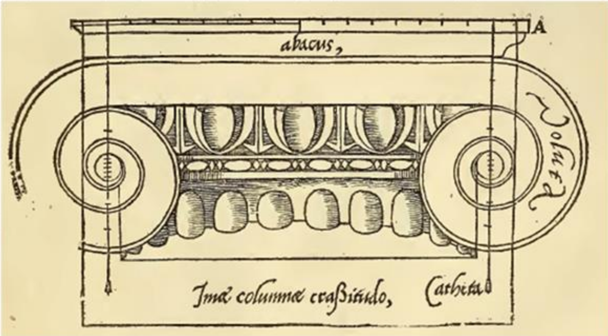
En af de grundlæggende tanker hos Serlio og generelt i renæssancen er, at der skal være nogle faste regler – nærmest som aksiomer – og at arkitekturen bygges op af en række simple elementer – nærmest som definitioner.

Vi udvælger nu en enkelt detalje ved søjlerne, som vi fordyber os i, nemlig konstruktion af spiralerne.

Serlio starter som altid med en tegning med definitionerne (s. 309):

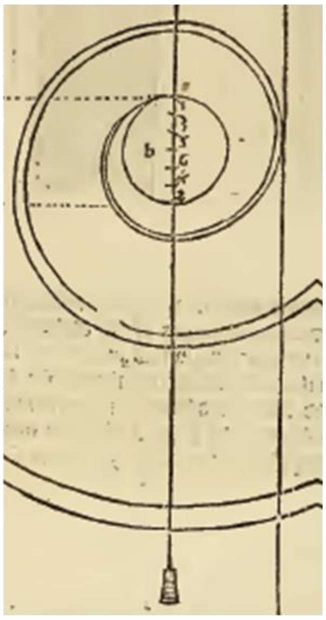
ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup



Vi genkender det klassiske mønster, spiralen, som vi finder i alle kulturer. Serlio indfører nu regler for, hvordan en sådan spiral konstrueres. I teksten redegør han for, hvordan denne tegning skal forstås:

Centrum af spiralen er en cirkel, som man kalder *øjet*.



Den lodrette linje gennem centrum, som måske dannes af en lodlinje, kalder han *kateten*. Den øverste kant hedder, som vi ser ovenfor, *abacus*. Øjet deles i 5 lige store stykker, hvilket giver 6 punkter, som han nummererer som angivet: 1 øverst, 2 nederst og så fremdeles op og ned.

Derefter beskriver han, hvorledes man skal sætte en passers ene ben, hvor der står 1, og som radius tage afstanden op til abacus. Med denne radius tegnes en halvcirkel, der lander hvor lodlinjen hænger.

Dernæst flyttes passeren, den ene ben sættes, hvor der står 2, og nu anvendes som radius afstanden ned til, hvor vi stoppede før, og der tegnes en halvcirkel.

Sådan fortsættes.

Du kan her finde "**Projekt 10.13 Serlios søjleordner og spiralkonstruktioner**", hvor vi prøver at eftergøre Serlios konstruktion.

Mere avancerede spiralkonstruktioner vender vi tilbage til på B- og A-niveau, hvor vi inddrager det såkaldte *gyldne snit.*

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Arkitekturen som pejling af demokratitanken i den vestlige kultur

Magtens og demokratiets bygninger ønsker de pågældende magthavere eller lovgivere skal afspejle, hvad samfundet står for. Da det moderne demokrati begynder at bryde frem, leder man efter forbilleder og finder dem ofte i antikken. Dengang skelnede man ikke strengt mellem det græske og det romerskes, så man kunne godt tage et romersk forbillede, hvis man ville henføre tanken på demokratiets oprindelse. Når man i USA anvendte ord som Capitol og Senat, var det ikke for at henlede tanken på romerske kejsere, men generelt på demokratiske forbilleder.

a) Læs uddraget af artiklen *Kunsten som pejling af demokratitanken i den vestlige kultur*, som du finder **her**.

   i. Giv en redegørelse for synspunkterne, og illustrer nogle af pointerne med to af bygningsværkerne.

   ii. Karakteriser stilen.

   iii. Er bygningerne præget af enkelhed, stramhed, sammenhæng, uden indre modsætninger?

   iv. Hvad karakteriserer funktionalismens arkitektur?

   v. Når man vil noget bestemt med sin arkitektur, taler man om stilen som retorisk figur. Synes du, det lykkes?

10.5.3 Byernes pladser – Ovalen som grundmodel for Peterspladsen

Byernes indretning afspejler i en vis forstand de idéer, samfundet bygger på.

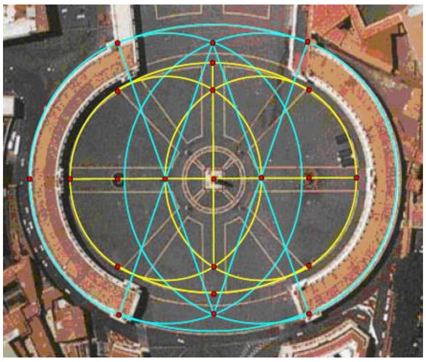
Centrum kan være demokratiets mødeplads, som *Agoraen* i Athen, eller det kan være en markedsplads, en parade- eller processionsgade eller en domkirke.

Øvelse 1

Vælg nogle byer fra forskellige perioder, som I har beskæftiget jer med, eller byer, som du kender godt, og overvej sammenhængen mellem byens struktur og samfundets bærende idéer.

Projekt: Ovalen som grundmodel for Peterspladsen og andre centrale pladser

De store pladser og store bygninger i centrum blev konstrueret efter bestemte geometriske mønstre. Fx blev Peterspladsen i Rom bygget op omkring ovaler.

Perspektivisk maleri af Peterspladsen i Rom samt et foto med de ovale konstruktioner indtegnet.

Du kan her finde "**[Projekt 10.14 Byernes pladser konstrueret som ovaler]**", hvor du selv i et geometriprogram konstruerer ovaler efter samme metode, som de gjorde i oldtiden og i renæssancen.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.5.4 Demokratiet og argumentets rolle

Hvem bestemmer, hvordan byen og samfundet skal indrettes, hvilken vej, man skal gå, og hvordan relationerne til andre byer og stater skal være? Det ideelle svar er, at det skal flertallet i befolkningen. Men hvordan kommer dette til udtryk? Og skal mindretal negligeres? Der har gennem historien været mange svar på dette.

Øvelse 1

a) Find i din historiebog svar på, hvordan det athenienske samfund var administrativt inddelt, og hvordan repræsentanter blev valgt eller udpeget i den demokratiske periode.

b) Find i din historiebog svar på, hvilken rolle senatet spillede i det gamle Rom, hvordan det blev sammensat, og hvilken magt det havde?

Øvelse 2

Det danske samfund er organiseret som et repræsentativt demokrati. Repræsentanterne vælges efter et såkaldt forholdstalssystem. Du kan via Erik Vestergårds hjemmeside **her** finde de dokumenter, der fastlægger valgprocedurer i Danmark. Hent dem, sæt dig ind i dem, og anvend dem til at forklare, hvordan det seneste valg til folketinget eller byrådet/kommunalbestyrelsen resulterede i den sammensætning, det gjorde.

Projekt: Afspejler mandatfordelingen stemmetallet?

Du kan her finde "**Projekt 10.15 Mandatfordelinger undersøgt med geometriske metoder**", hvor vi med geometriske midler undersøger, hvor små forskydninger der skal til, før mandatfordelinger kan ændre sig. Det centrale spørgsmål er: Vil et flertal i stemmer altid medføre et flertal i mandater?

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.6 Læsning af kildetekster – eksemplificeret med en kildetekst af Eratosthenes

Når man beskæftiger sig med et historisk emne i matematik, er det uomgængeligt, at man kommer til at arbejde med autentiske historiske kilder til belysning af emnet – såvel de matematiske aspekter, som de historiske aspekter omkring det samfund og den kultur, hvorfra kilden stammer. Kilden kan i den forbindelse enten være en tekst eller et billede, med et vist matematisk indhold, eller en genstand, med et vist matematisk indhold, fx et måleinstrument. Vi vil nu se et konkret eksempel på, hvordan man kan arbejde med en sådan historisk kilde. Eksemplet bygger på en historisk kilde oversat fra oldgræsk.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.6.1 En kildetekst af Eratosthenes: Eutocius' kommentarer til Archimedes afhandling 'Om kuglen og cylinderen II'

Fra Eratosthenes til Kong Ptolemaios, vær hilset,

De siger at en af de klassiske tragedieforfattere skildrede Minos I færd med at bygge et gravmæle for Glaucus, og da han erfarede at det var hundrede fod på hver side, udbrød han

Det gravmæle du har talt om til en kongelig begravelse er sandelig småt.

Lad det blive fordoblet! Skynd dig, uden at ødelægge dets skønhed, at ændre hver en side i gravmælet til det dobbelte.

Men efter manges mening begik han derved en fejl. For når siderne bliver dobbelt så store, vil en flade blive fire gange så stor og en rumlig figur blive otte gange så stor. Men geometrikerne søgte også en metode til at fordoble en rumlig figur, uden at ændre dens form. Og den slags problemer blev kaldt terningens fordobling. For efter at være forelagt en terning, søgte de at fordoble den. Efter at alle havde været rådvilde I lang tid, fik Chios som den første den idé at hvis man kunne finde en måde at bestemme to på hinanden følgende mellemproportionaler mellem to linjestykker, hvor det største er det dobbelte af det mindste, så vil terningen kunne fordobles. På denne made omformede han sit problem til et nyt problem, som var lige så svært. Et stykke tid senere fortælles det at nogle fra Delfi løb ind i de samme problemer, da de hengav sig til at fordoble et af deres altre i overensstemmelse med et råd fra et orakel. De sendte bud til geometrikerne ved Platons akademi og forventede at de ville fremkomme med en løsning. Efter at disse geometrikere med flid havde forsøgt at bestemme de to mellemproportionaler siges det at det lykkedes for Archytas fra Tarent at finde dem ved hjælp af halvcylindre, og for Eudoxos ved hjælp af de såkaldte krumme kurver. Men det viser sig at de alle har skrevet om problemet i form af en geometrisk udledning og at de ikke kan bygge hvad de har beskrevet eller få det omsat i praksis, bortset fra til en vis grad Menaechmus og da kun med stort besvær. Men jeg har, ved hjælp af et instrument, fundet en nem metode til at finde ikke blot to mellemproportionaler, men lige så mange man måtte ønske sig. Ved hjælp af denne opdagelse vil man være i stand til at omforme en hvilken som helst rumlig figurafgrænset af parallelogrammer til en terning, eller ændre den fra en form til en anden, eller til at frembringe en dermed ligedannet figur og til at forøge den rumlige figur, mens man bevarer dens form, så man både kan bruge den til altre og templer …

På hyldestmonumentet er instrument af bronze og der er bier af bly fæstnet lige under søjlens krone. Under det er udledningen formuleret mere kortfattet sammen med diagrammet, og efter det følger et epigram. Lad dette være skrevet ud for dig i det følgende, så du også har fyndordene hos dig, sådan som de fremstår på hyldestmonumentet …

"Hvis du - min ven - har i sinde at omdanne en hvilken som helst liden terning, til en terning, der er dobbelt så stor, eller til på korrekt vis at udskifte en rumlig figur, så står dette instrument til din rådighed; du kan ved hjælp af det finde målene for en kvægfold, en hule til opbevaring af korn, eller det brede bassin udsprunget fra en dyb kilde ved mellem to linealer at fange de to mellemproportionaler, så deres endepunkter følger de to linealer. Prøv ikke på at følge det beundringsværdige men komplicerede forehavende, der bygger på Archytas cylindre, eller på at gennemskære en kegle efter Menaechmus trefoldige løsning, eller på at tilpasse de krumme kurver som beskrevet af den gudfrygtige Eudoxos. For med disse tavler kan du nemt frembringe et mylder af mellemproportionaler ud fra et beskedent grundlag. Lykkelig er du, Ptolemaios, med din søns ungdommelige energi, du som har skænket ham alt hvad der er kært for muser og Konger, og må han i fremtiden, Oh himmelske Zeus, modtage sceptret fra din hånd. Lad det ske således, og lad alle, der ser denne tilegnelse, udbryde: "Dette er skænket af Eratosthenes fra Cyene".

Hvad handler teksten om?

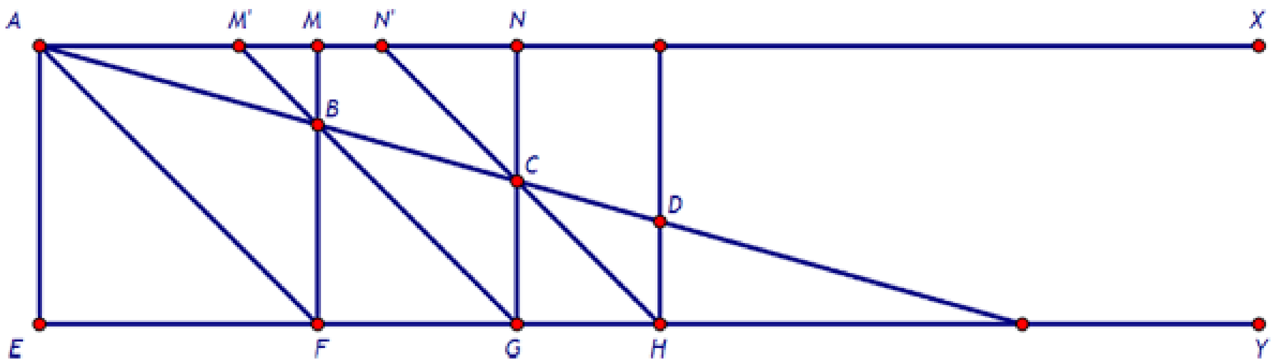
Hvad skal man nu stille op med en sådan kilde? Først og fremmest vil vi prøve at forstå indholdet af teksten, dvs. forstå hvad teksten handler om. Da det er en matematisk-historisk kilde, vil vi i første omgang prøve at forstå det matematiske indhold. Vi ser da, at det er en tekst, der omhandler nogle problemer inden for geometrien.

Øvelse 1

Teksten omtaler to forskellige, men tæt forbundne geometriske problemer.

Identificer disse i teksten, og beskriv dem med dine egne ord.

Det ene af disse problemer omhandler to *mellemproportionaler*. Det er meget svært at forstå dette problem uden det tilhørende diagram. En mulig rekonstruktion ser nogenlunde således ud:



På diagrammet kan vi se fire lodrette linjestykker *AE*, *BF*, *CG* og *DH* med varierende længde. De to yderste linjestykker *AE* og *DH* er de givne linjestykker, og de to midterste linjestykker er de søgte mellemproportionaler. Disse fire linjestykker udgør en såkaldt *geometrisk række*, hvor forholdet mellem to på hinanden følgende linjestykker er konstant:

$$\frac{BF}{AE} = \frac{CG}{BF} = \frac{DH}{CG} = k$$

ISBN 9788770668279

I moderne terminologi svarer længderne af de fire linjestykker altså til fire på hinanden følgende værdier fra en eksponentiel vækstmodel, fordi

$$BF = k \cdot AE$$

$$CG = k \cdot BF = k^2 \cdot AE$$

$$DH = k \cdot CG = k^3 \cdot AE$$

jf. udledningen af renteformlen i kapitel 1: *Variabelsammenhænge*.

For at blive fortrolig med figuren vil vi nu arbejde med den i et dynamisk geometriprogram. Det kan i første omgang virke som lidt snyd, da computeren jo ikke var til rådighed på Eratosthenes' tid. Men dels er det meget vanskeligt at sætte sig ind i hans tankegang, hvis vi kun må tage udgangspunkt i den matematik, der var kendt på Eratosthenes' tid, dels er det meget tidskrævende at skulle udarbejde alt i hånden. Vi vil derfor skyde genvej og dels tillade brugen af moderne hjælpemidler, dels spejle den matematik, der omtales i teksten, i den matematik, som vi selv er fortrolige med.

Øvelse 2

1. Konstruer først et lodret linjestykke *AE* og de to vandrette linjestykker *AX* og *EY* gennem *A* og *E*, der altså begge står vinkelret på *AE*. Konstruer dernæst en passende skrå linje gennem *A*.
   Træk linjen gennem *A*, der halverer vinklen *XAE*. Den skærer grundlinjen *EY* i punktet *F*. Konstruer normalen til grundlinjen gennem *F*. Den skærer den skrå linje i punktet *B*. Træk linjen gennem *B*, der er parallel med *AF*. Den skærer grundlinjen i punktet *G* osv.
   Færdiggør på denne måde figuren.

2. Mål længderne af de lodrette linjestykker *AE*, *BF*, *CG* og *DH*. Er det rigtigt, at deres indbyrdes forhold er konstant?
   Overfør målene til en tabel på formen

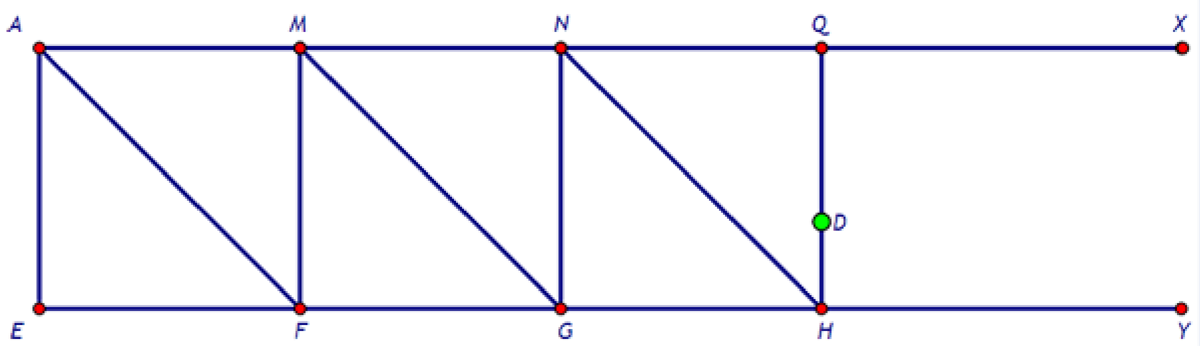
Linjestykke nr.	1	2	3	4
Linjestykke længde	*AF*	*BF*	*CG*	*DH*

Er det rigtigt, at der er tale om en tabel for en eksponentiel vækstmodel?

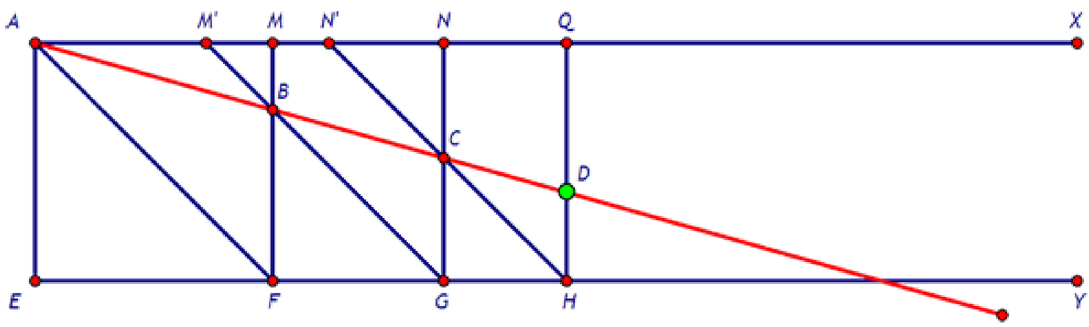
Kan du bevise disse påstande?

3. Hvis konstruktionen er gået godt, kan du ændre på den skrå linje og dermed ændre på placeringen af punkterne *F*, *G* og *H*. Derved kan du (med tilnærmelse) opnå, at det lodrette linjestykke DH netop er det halve af det oprindelige linjestykke *AE*.
   Det er i denne position, at de to mellemproportionaler løser terningens fordobling.
   Kontroller ved beregning, at rumfanget af en terning med sidelængden *BF* netop (med tilnærmelse) bliver halvt så stor som rumfanget af en terning med sidelængden *AE*.
   Kan du forklare, hvorfor det må være sådan?

Vi er nu klar til at se nærmere på instrumentet fra teksten. Her ses en rekonstruktion af et diagram for instrumentet nogenlunde således ud:



Der er tale om en ramme bestående af de yderste linjer *XA*, *AE* og *EY* samt tre forskydelige trekanter *AMF*, *MNG* og *NQH*, hvor den lodrette side for den sidste trekant *QH* er forsynet med en skala, så man kan afsætte et punkt *D* svarende til, at *DH* udgør en given brøkdel af basisstykket *AE*, fx halvdelen eller en tredjedel (som vist ovenfor). Hvad der ikke fremgår af diagrammet er, at der også ligger en lineal langs den øverste linje *AX*, der kan drejes omkring *A*, indtil den går gennem punktet *D*. Det vil få trekanterne til at forskyde sig, så vi netop får frembragt den forrige figur.



Ved at aflæse skæringspunkterne B og C kan vi derfor finde længden af mellemproportionalerne BF og CG. Igen vil det hjælpe meget på forståelsen, hvis vi rent faktisk konstruerer instrumentet. Det kan vi gøre virtuelt i et dynamisk geometriprogram.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Øvelse 3

1. Konstruer først rammen for instrumentet, dvs. det lodrette linjestykke *AE* og de vandrette linjestykker *AX* og *EY*. Konstruer dernæst den skrå linje gennem *A* på en sådan måde, at den kan drejes omkring *A*.

2. Konstruer dernæst den første ligebenede retvinklede trekant *AMF*, der ligger fast i rammen. Den lodrette side *MF* skærer da den drejelige lineal i punktet *B*. Punktet *B* er udgangspunktet for konstruktionen af den næste ligebenede retvinklede trekant *M'NG*. Den næste lodrette side *NG* skærer den drejelige lineal i punktet *C*. Endelig er punktet *C* udgangspunkt for den sidste ligebenede retvinklede trekant *N'QH.* Dermed er de tre forskydelige trekanter på plads. Kontroller konstruktionen ved at dreje linealen gennem *A*. Når den drejelige lineal ligger vandret, skulle trekanterne gerne glide ind i udgangspositionen, hvor de ligger ved siden af hinanden ligesom på den første af figurerne foroven.
   Tjek, at det er tilfældet!

3. Afsæt et frit punkt *D* på den sidste lodrette side *QH*. Mål forholdet $\frac{DH}{QH}$. Dette forhold kan i princippet aflæses på en skala indgraveret på siden. Drej lidt på den drejelige lineal, så den kommer fri af den vandrette position og går gennem punktet *D*. Mål nu tilsvarende forholdene $\frac{BF}{MF}$ og $\frac{CG}{NG}$.
   Kontroller ved beregning, at forholdet $\frac{BF}{MF}$ netop er kubikroden af forholdet $\frac{DH}{QH}$.
   Instrumentet kan altså bruges til at finde kubikrødder.

4. Hvordan skal instrumentet ændres, hvis det i stedet skal måle femte-rødder?

Hvem er afsenderen, hvem er modtageren af teksten?

Vi skulle nu gerne have en god fornemmelse for, hvad det er for et instrument, der omtales i teksten, og hvilket geometrisk problem det løser. Vi vender os derfor mod de mere historiske aspekter af teksten. Teksten er en gengivelse af et brev. Vi kan derfor spørge: *Hvem har skrevet brevet, og hvem er brevet skrevet til?*

Øvelse 4

Der omtales en række navne i teksten. Her vil vi koncentrere os om de væsentligste.

a) Hvad hedder forfatteren til den afhandling, hvor brevet kan læses? Hvornår levede han, og hvor arbejdede han?

b) Hvad hedder brevets forfatter? Hvornår levede han, og hvor arbejdede han?

c) Hvem er brevet stilet til? Hvornår levede han, og hvor arbejdede han?

d) I hvilken anledning er brevet skrevet?

Svarene til spørgsmål om personer eller institutioner nævnt i en historisk kilde findes typisk på internettet.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

L&R Uddannelse EGMONT

Hvilken slags kilde er der tale om? Primær, sekundær eller tertiær? – Hvilken genre er der tale om?

Når vi skal vurdere troværdigheden af en historisk kilde, er det vigtigt at gøre sig klart, om det er en primær kilde (original eller kopi nedskrevet samtidigt med at begivenheden fandt sted) eller en sekundær kilde (kopi eller omtale nedskrevet senere, men med udspring i en primær kilde) eller måske endda en tertiær kilde, som bygger på sekundære kilder eller andre tertiære kilder, fx lærebøger i gymnasiet.

Brevet i vores tilfælde er en sekundær kilde nedskrevet adskillige århundreder efter de begivenheder, der omtales i brevet. Hvor troværdigt er det så?! Der er almen enighed om, at de begivenheder, der omtales i brevet, rent faktisk har fundet sted, selv om vi hverken har fundet søjlen med epigrammet eller det instrument, der omtales i brevet. Derimod er selve brevet omstridt! Måske er det en sammenblanding af forskellige breve, måske endda med bidrag fra breve af helt andre forfattere. Men der er også argumenter, der taler for, at et sådant brev rent faktisk blev nedskrevet ved den lejlighed, der omtales i brevet.

Hvilken genre er teksten skrevet i?

Vi kan forsøge at kaste lys over dette spørgsmål ved at spørge: *Hvorfor skrev Eratosthenes det pågældende brev? Hvilket formål kan det have tjent?*

Øvelse 5

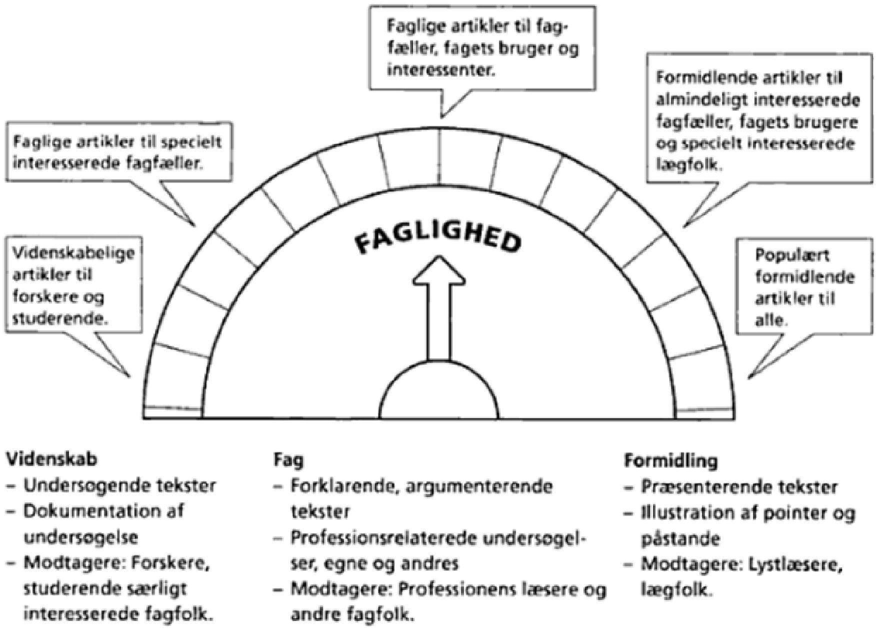
Hvorfor fremstiller Eratosthenes et særligt instrument og overrækker det som en hyldest til kong Ptolemaios? Hvilket formål kunne Eratosthenes have med både at rejse en søjle med inskriptioner og et brev, hvor kongen kan læse det samme, som står på søjlen?

Den primære kilde, Eutocius' kommentar til Archimedes afhandling om kuglen og cylinderen, vil vi lade ligge i denne omgang til fordel for den sekundære kilde, Eratosthenes' brev til kong Ptolemaios. Her kan vi spørge om hvem, det er skrevet for, og hvordan det afspejles i teksten.

Øvelse 6

I den ovenstående kilde er der tale om et brev skrevet til en konge. Hvilke stilistiske træk i brevet viser, at der er tale om et kongebrev? Hvad vil Eratosthenes opnå med at skrive et sådant brev til kongen?

Men det er også interessant at kigge nærmere på genren ved at se på kilden som en matematisk tekst. Matematiske tekster kan fx være skrevet som *akademiske tekster* beregnet for fagfæller (det gælder fx Eutocius' kommentarer til Archimedes). I så fald forudsættes et forholdsvis stort kendskab til matematik hos læseren. Eller de kan være skrevet som *undervisningstekster*. Teksten vil da tage langt større hensyn til forståeligheden, men vil stadigvæk forudsætte et vist grundlæggende kendskab til matematik. Endelig kan de være skrevet som *formidlingstekster*. Den vil da være gøre sig umage med at være såvel forståelig som underholdende ved at inddrage analogier, billeder, anekdoter osv. Man kan sammenfatte genrerne i et såkaldt genre-meter:



Genre-meter: Her gengivet efter Skriv en artikel af Lotte Rienecker et al.

Øvelse 7

Hvor på genre-meteret befinder Eratosthenes brev til Kong Ptolemaios sig? Husk at dokumentere dine konklusioner med passende eksempler/citater fra teksten.

Hvilken type matematik er repræsenteret i teksten? – Om de 5 hovedspor i matematikkens udvikling

Endelig kan vi prøve at se, hvilken slags matematik teksten handler om? Grundlæggende er der to hovedstrømninger i matematikken: Et teoretisk deduktivt aspekt og et praktisk anvendeligt aspekt, dvs. den rene matematik og den anvendte matematik.

Øvelse 8

I teksten findes der eksempler på begge aspekter, men hvor ligger hovedvægten?

1) Teksten omhandler et berømt problem fra matematikkens historie. Traditionelt opererer man med tre store uløste problemer i den græske matematik: Søg på nettet og find information om, hvad de går ud på.

2) Man regner dem i dag ikke bare for uløste, men for uløselige. Ikke desto mindre løses det ene af problemerne i teksten, ligesom der omtales andre tidligere eksempler på løsningen af problemet! Hvordan hænger det nu sammen?
Hvad kræves der traditionelt af en løsning inden for den rene matematik? Hvad er det så for ”spilleregler” fra den rene matematik, som
Eratosthenes bryder for at løse problemet inden for rammerne for den anvendte matematik?

Man kan opdele matematikkens historie i to store adskilte perioder: Den geometriske æra og den algebraiske æra. Se nærmere i indersiden af omslaget til grundbogen. Denne kildetekst hører klart til den geometriske æra. Samtidig kan vi i hele den lange historiske udvikling se nogle bestemte spor, som matematikken hele tiden bevæger sig i:

1. *Mønster- og kunstsporet*

2. *Bevægelses- og maskinsporet*

3. *Det aksiomatisk deduktive spor*

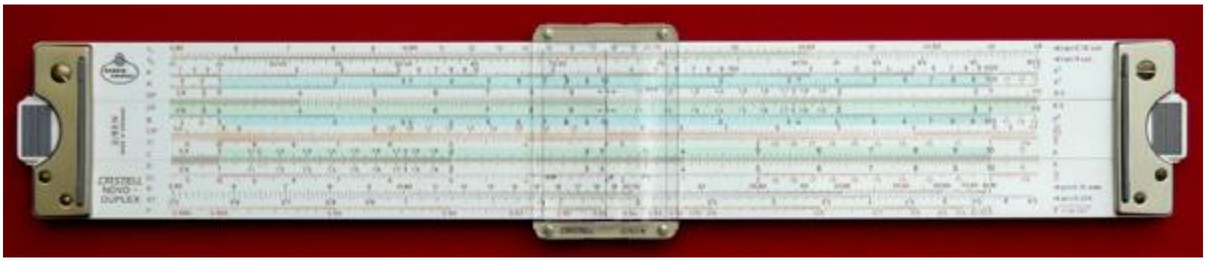
4. *Navigations- og astronomisporet*

5. *Bygge- og arkitektursporet.*

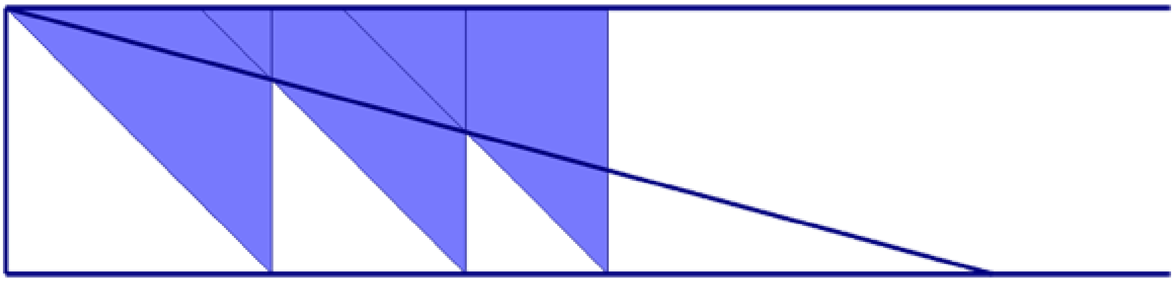
Øvelse 9

Hvilke af de fem hovedspor i matematikkens udvikling er repræsenteret i teksten? Husk at dokumentere dine konklusioner med passende eksempler/citater fra teksten.

I denne kilde omtales et instrument, der bygges for at løse et specielt problem: Terningens fordobling. Det er dog langt fra det mest berømte instrument i den græske matematiks historie, men det vil vi vende tilbage til i anden sammenhæng. Her vil vi nøjes med at konkludere, at instrumenter til at hjælpe med udregninger har en lang historie bag sig. I dag bruger vi elektroniske hjælpemidler, men indtil for bare en generation tilbage brugte man mekaniske hjælpemidler. Vi har fx i kapitel 6 fortalt om den forrige generations brug af regnestokke som denne:



Blandt mange andre skalaer indeholdt de vandrette skalaer såvel tallet x som kvadratet på x, dvs. x^2, og kuben på x, dvs. x^3. De kan derfor bruges til at finde såvel kvadratrødder $\sqrt{x}$ som kubikrødder $\sqrt[3]{x}$ ved at stille den lodrette skyder ud for de øverste skalaer for x^2 og x^3 og aflæse, hvad der står på den nederste skala for x).



Men allerede for over 2000 år siden havde Eratosthenes altså opfundet en simpel regnestok med forskydelige trekanter anbragt mellem to vandrette linealer og en skrå lineal, der lige så simpelt kunne uddrage kubikrødder og dermed løse praktiske problemer, som fx "hvis et opbevaringskammer med sidelængderne … skal gøres større, så det kan rumme 1,5 gang mere, hvor meget større skal sidelængderne så være?"

Det er slet ikke dårligt set af den tids førende naturvidenskabsmand og nok værd at skænke sin storslåede konge som et beskedent tegn på sin egen og folkets taknemmelighed over hans uvurderlige støtte til naturvidenskaberne!

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.6.2 En kildetekst af Archimedes: Skriftet Sandtælleren

"Der er nogle, Kong Gelon, der tror, at sandet er uendeligt i sin mangfoldighed; og med sandet mener jeg ikke blot det, der findes omkring Syrakus og i resten af Sicilien, men også det, der findes i enhver anden egn, beboet eller ubeboet. Der er atter andre, der uden at betragte det som uendeligt dog mener, at intet tal kan angives, som er stort nok til at overgå dets mangfoldighed."

I *Sandtælleren* argumenterer Archimedes for, at der i hele universet ikke findes noget, der er uendeligt stort, selv om vi ofte bruger dette begreb. Han gør dette ved hjælp af et tankeeksperiment, hvor hele universet fyldes med det mindste, man kan forestille sig, nemlig sandkorn. Naturligvis findes der mange ting i naturen, der er mindre end et sandkorn, men det er let at se, at hans argument kan udstrækkes til hvad som helst, der er mindre.

Undervejs har han brug for en lang række vurderinger af størrelser og størrelsesforhold. Og han har ikke mindst brug for et talsystem, der kan udtrykke store tal. Grækerne havde et ret primitivt talsystem, så for at svare på dette spørgsmål udvikler Archimedes her fra grunden et helt nyt talsystem.

Du finder her "**Projekt 10.10 Det udelukkes tredjes princip**" om skriftet *Sandtælleren* (engelsk: *Sandreckoner*) af Archimedes. Projektmaterialet rummer, foruden en række øvelser til læsning af kildeskriftet, følgende:

- Første sider af kildeskriftet i Archimedes' eget sprog.
- Resten af skriftet gengivet i en refererende stil, idet alle symboler og tal er skrevet om til vores talsystem og vores geometriske symboler.
- Efterfølgende er der nogle siders kommentarer. Disse kommentarer kan dels være en hjælp til læsningen af skriftet, dels hjælpe med til at finde svar på spørgsmålene i øvelserne.

Archimedes regnes i dag som en af historiens allerstørste matematikere. Han har ydet bidrag til fysikkens og matematikkens udvikling på utallige områder, og han tænkte så originalt, at han foregreb mange ting, man først rigtig fik hold på 2000 år senere.

ISBN 9788770668279

10.6.3 Fremgangsmåde ved arbejdet med kildetekster

Archimedes regnes i dag som en af historiens allerstørste matematikere. Han har ydet bidrag til fysikkens og matematikkens udvikling på utallige områder, og han tænkte så originalt, at han foregreb mange ting, man først rigtig fik hold på 2000 år senere.

Hvad handler teksten om?

Først og fremmest skal man prøve at forstå indholdet af teksten, dvs. forstå hvad teksten handler om. Da det er matematisk-historiske kilder, vil vi i første omgang prøve at forstå det matematiske indhold. Samtidig vil vi ofte få brug for bedre at forstå den historiske sammenhæng, som kilden er skrevet ind i, og skal måske have læst noget supplerende sekundær litteratur

Hvem er afsenderen, og hvem er modtageren af teksten?

Hvem er forfatteren, hvor og hvornår levede han? Hvad var hans uddannelse, og hvad levede han af? Hvilke verdenshistoriske be-givenheder udspillede sig på hans tid? Hvilke bidrag har forfatteren givet til videnskabens/matematikkens udvikling? Ofte kan man se af forordet eller en egentlig tilegnelse, hvem skriftet er henvendt til. Selv om teksten umiddelbart henvender sig til en fyrste eller anden øvrighed, kan hensigten alligevel godt være at henvende sig til andre.

Hvilken slags kilde er der tale om? Primær, sekundær eller en helt anden form?

Når vi skal vurdere troværdigheden af en historisk kilde, er det vigtigt at gøre sig klart, om det er en primær kilde (original eller kopi nedskrevet samtidigt med, at begivenheden fandt sted) eller en sekundær kilde (kopi eller omtale nedskrevet senere, men med udspring i en primær kilde). Er der tale om lærebøger, er dette ikke kilder, men hører til værker, der kan give en fremstilling af en teori eller en bestemt sag. Der kan også være tale om helt andre former for tekster eller materialer, der præsenterer sig som kilder, men er givet en dramatisk form – som roman, skuespil eller film. Ét aspekt af analysen af sådanne materialer er at tage forfatteren på ordet og analysere det som kilde, for det er jo forfatterens hensigt. Men en sådan analyse skal naturligvis kombineres med en analyse af det som en fiktiv tekst.

ISBN 9788770668279

Hvilken genre er teksten skrevet i?

Vi kan forsøge at kaste lys over dette spørgsmål ved at spørge: Hvorfor skrev forfatteren den pågældende tekst? Hvilket formål kan det have tjent? Tjente den valgte form det formål, han havde?

Hvilken type matematik er repræsenteret i teksten?

Grundlæggende er der to hovedstrømninger i matematikken: Et teoretisk deduktivt aspekt og et praktisk anvendeligt aspekt, dvs. den rene matematik og den anvendte matematik. Men inden for hver er der et stort spektrum, som man skal dybere ned i for at karakterisere matematikken. Med til dette felt hører også spørgsmålet, om vi her præsenteres for matematik, der var ny, da teksten blev skrevet, eller en måde at anvende matematik på, der var original.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

L&R Uddannelse EGMONT

10.6.4 Kildetekster i Hvad er matematik?

Prøv at anvende opskriften i afsnit 6.3 i arbejdet med de følgende kildetekster.

a. Kampen om verdensbilledet – fra oldtiden til moderne naturvidenskab

I afsnit 4.2 og specielt i projekt 10.3 er der en række kildetekster fra de store aktører i kampen om verdensbilledet. Det er hovedsageligt primærkilder i form af tekstuddrag fra centrale værker i videnskabshistorien og breve fra aktørerne, men der er også tekster, hvor aktørerne går skarpt i rette med hinanden. I projektet er disse samtidig ledsaget af en række spørgsmål. Vælg en eller flere af disse tekster ud, anvend opskriften i 6.3 som ledetråd, og formuler selv specifikke spørgsmål til teksterne.

b. Florence Nightingale – den kølige videnskab og det lidenskabelige drama

I indledningen til kapitel 2 i grundbogen fortælles om Florence Nightingales vej ind i statistikken, om hendes originale bidrag hertil og om forskellen i tilgang til de statistiske data mellem hende og andre statistikere som fx lederen af det centrale statistiske kontor i London, William Farr. I projekt 2.5 går vi nogle skridt dybere ned i at forstå Florence Nightingales metode. Samtidig indeholder projektet en dramatisering af hendes synspunkter i form af et fiktivt interview lavet mange år efter hendes død. Mange af de svar, Florence Nightingale giver, er originale citater, men naturligvis klippet sammen på en bestemt måde. Materialet ligger på engelsk og kan således være oplæg til et fagligt samarbejde. Prøv at anvende opskriften i 6.3 som ledetråd, og formuler selv specifikke spørgsmål til teksten.

c. A lady tasting tea – undfangelsen af den bekræftende statistik

“A LADY declares that by tasting a cup of tea made with milk she can discriminate whether the milk or the tea infusion was first added to the cup”. Sådan indledes en af de mest berømte kildetekster i statistikkens historie, Ronald Fishers lille artikel *A lady tasting tea*. Teksten blev udarbejdet i sammenhæng med, at Fisher skrev sit hovedværk *Statistical Methods For Research Workers*, der udkom i 1925. Det er her, hele apparatet med nulhypotese og signifikansniveau udvikles, og den lille artikel er en eksemplarisk demonstration af den nye statistiske metode. Den anden sætning i artiklen lyder: ”We will consider the problem of designing an experiment by means of which this assertion can be tested”. The Lady kunne faktisk smage forskel, men kunne det ikke være tilfældigt? Materialet ligger i projekt 9.1 på engelsk og kan således være oplæg til et fagligt samarbejde. Prøv at anvende opskriften i 6.3 som ledetråd, og formuler selv specifikke spørgsmål til teksten. Man kan starte med at se en lille tegnefilm, der hentes **her**.

d. Forebyggelseskommissionens rapport – en kildetekst bag politiske beslutninger

Kilder behøver ikke være gamle tekster. Når der udformes store reformer eller foretages større lovændringer, sker det ofte på grundklag af rapporter, hvor man har forsøgt at gennemlyse området og opstille forskellige konsekvensanalyser. Forebyggelseskommissionens rapport er et eksempel på dette. Det er ikke en matematisk kildetekst i snæver forstand, men bag mange af argumenterne og beregningerne ligger der en anvendelse af matematik. Rapporten er stor, så vi vil koncentrere os om rapportens kapitel 5 afsnit 5.1 og de første to underafsnit om tobak og alkohol i afsnit 5.2. Rapporten kan hentes via afsnit 5.6 i kapitel 14, *Fagligt samarbejde matematik og samfundsfag*, hvor der også er både en række spørgsmål og udfoldet den teori, man kan få brug for vedr. priselasticitet. Prøv at anvende opskriften i 6.3 som ledetråd, og formuler selv specifikke spørgsmål til teksten.

6.5 Kildetekster i Hvad er matematik?

Lærebogssystemet indeholder mange kildetekster, links til portaler med samlinger af kildetekster og autentiske data, der er arbejdet med i berømte forsøg. Orienter dig selv i materialet ved at se projektoversigterne til hvert kapitel igennem. På den måde får man samtidig et indtryk af, hvilken slags matematik der anvendes i pågældende tekst.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

L&R Uddannelse EGMONT

10.7 Formidling af matematik – krav til skriftlige besvarelser

Formidlingen er en væsentlig del af løsningen på en opgave eller et problem inden for matematik. Det er gennem formidlingen, man demonstrerer sin forståelse af det matematiske problem, og man lærer derfor altid selv meget gennem arbejdet med at formidle det, man er nået frem til.

10.7.1 Generelle krav til skriftlige besvarelser

Det grundlæggende krav til al formidling er, at *modtageren kan følge afsenderens/ elevens tankegang*. Formidling kan have mange former og være både mundtlig og skriftlig. I dette afsnit vil vi koncentrere os om skriftlig formidling.

Kravet om, at modtageren skal kunne følge afsenderens tankegang, forudsætter naturligvis, at afsenderen har en klar tankegang, men også helt grundlæggende, at besvarelsen *dokumenteres* med tabelmateriale, grafiske illustrationer, tegninger mv. Heri ligger bl.a. at der skal være overensstemmelse mellem de symboler og betegnelser, der anvendes i den tekst, man skriver, og som man ser på det illustrerende materiale.

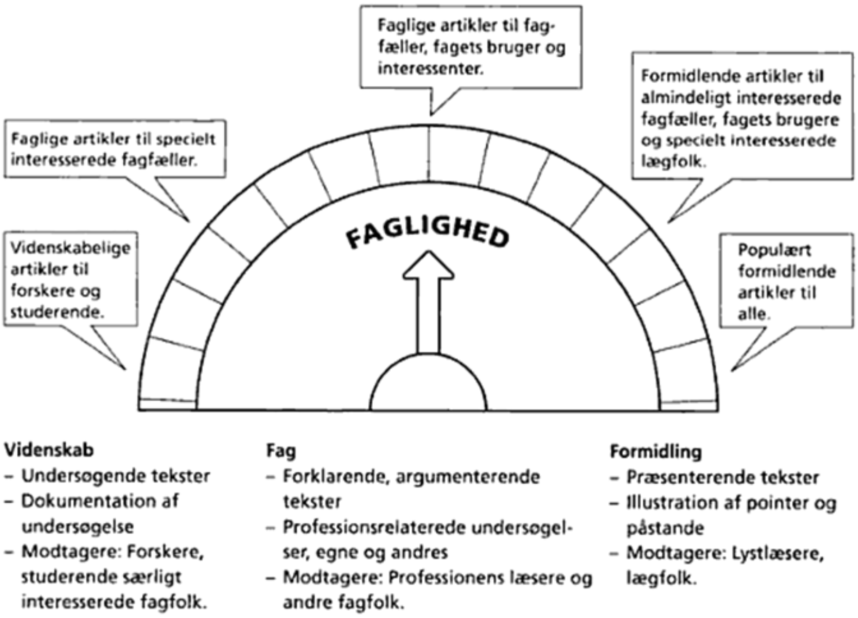
En rapport eller enhver anden skriftlig besvarelse indledes normalt med, at *afsenderen præsenterer problemet*, herunder det datamateriale og de kilder, der kan være knyttet til problemet. Dernæst præsenterer afsenderen normalt *de metoder, der vil blive anvendt* til at løse problemet. Metoder kan være grafiske, formelbaserede og/eller geometriske, de kan rumme simuleringer af parameterværdier eller af et statistisk datamateriale. Metoder omfatter også kildekritisk læsning af tekster og undersøgelse af data samt anvendelse af aksiomatisk deduktive metoder til at udlede sætninger og formler.

Ved at præsentere sine metoder, før man kaster sig ud i at bruge dem, gør man det lettere for modtageren at følge tankegangen. Fx er det en god idé at præsentere en formel på symbolsk form, før man sætter talværdier ind og tager fat på løsningen. Dette sikrer også, at banale skrivefejl o.l. kommer til at fremstå som skrivefejl og ikke forståelsesfejl, når modtageren læser det.

Afsenderen afslutter altid med en *konklusion*. Når en opgave ”handler om noget”, så formuleres konklusionen altid med et sprog, hvor man inddrager dette. Derved gør man læsningen af produktet lettere for modtageren, og man demonstrerer, at man forstod, hvad opgaven gik ud på.

10.7.2 Genreovervejelser

Besvarelsen formidles til en modtager. Hvem er målgruppen, hvem skriver man til? Selv om en elev normalt afleverer sin bevarelse til en lærer, så er det jo en træning i at kunne formidle også efter skolen. Det hjælper en afsender med at formulere præcise besvarelser, hvis man har et klart billede af målgruppen – det er indlysende forskellige opgaver at skrive et læserbrev, at skrive, så ens kammerater kan forstå det, at skrive en populærvidenskabelig artikel eller at skrive en akademisk artikel. Derfor er det også i matematik vigtigt at inddrage genreovervejelser i arbejdet med at udforme skriftlige produkter. Her kan man have gavn af den skematiske fremstilling, der er givet på ”genre-meteret”.



Genre-meter: Her gengivet efter Skriv en artikel af Lotte Rienecker et al.

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

10.7.3 Eksempler på andre typer af skriftlige opgaver

I matematik trænes udformningen af mere sammenhængende skriftlige produkter gennem arbejdet med *temaopgaver*. Der ligger eksempler på sådanne her samt i de enkelte kapitler i grundbogen.

Når man arbejder sammen med et andet fag, er det en god idé at udforme en *rapport*. I kapitel 13, *Fagligt samarbejde matematik og biologi*, ligger en detaljeret beskrivelse af, hvorledes en sådan rapport kan udformes.

Udformningen af den faglige rapport/besvarelse kan af og til suppleres med udformningen af en artikel, hvor det faglige stof præsenteres for ikke-fagfolk. Dette kan trænes gennem udformning af læserbreve, essays, kronikker eller egentlige populærvidenskabelige artikler. Dette kræver genreovervejelser – hvad er det særlige kendetegn ved det ene og det andet skriftlige produkt? Man kan med fordel udvikle dette i et samarbejde med faget dansk – *Hvad er matematik?* rummer meget materiale, der umiddelbart kan anvendes til at træne dette, fx:

- Alle de indledende afsnit i grundbogens kapitler.

- De øvrige fortællende afsnit i grundbogens kapitler som afsnittet om **Titanics forlis** i kapitel 2, afsnittet om **Jordens alder** i kapitel 4, afsnittet om de forskellige **tal og talmængder** i kapitel 7 og afsnittet om **det er usundt at ryge** i kapitel 9.

- Projekter til fagligt samarbejde fra studieretningskapitlerne, fx om **verdensbilleder** i kapitel 11, om **bestemmelse af farvestof i sodavand** i kapitel 12, om **gymnasieelevers sundhedstilstand** i kapitel 13 og om **Kinas økonomiske udvikling** i kapitel 14.

- Projekterne til kapitlerne i grundbogen, fx Projekt **9.6 Vietnamlotteriet**, **Projekt 3.8 Månens bjerge**, **Projekt 4.2 Kroppens forbrænding af alkohol, medicin og andre stoffer**, **projekt 5.7 Biologisk biodiversitet**, **Projekt 6.6 Jordskælvet i Lissabon**, **Projekt 7.6 Uendelighed – Zenons paradokser og Hilberts hoteller**, **Projekt 8.2 Om Caspar Wessel og hans metode** og **Projekt 9.9 Simpsons paradoks**.

- Øvelser og projekter fra dette kapitel 10, se indholdsfortegnelsen.

ISBN 9788770668279

Det afsluttende *studieretningsprojekt* kan have flere former, men et fælles krav er, at afsenderen demonstrerer en evne til at skrive en klassisk akademisk artikel. Dette kan imidlertid godt indgå som ét led, hvor et andet led i besvarelsen er udformningen af en populærvidenskabelig artikel eller et essay, hvor de faglige problemstillinger formidles til ikke-fagfolk. Dette kan være en model for et studieretningsprojekt mellem *matematik og dansk*. Du kan **her** finde et uddybende materiale om samarbejde mellem matematik og dansk.

Men det kan også være en model for et samarbejde mellem *matematik og historie*, hvor kildematerialer indgår med stor vægt. Der er eksempler herpå i afsnit 6. Bogen igennem er der en stor mængde kildetekster og henvisninger til, hvor på nettet sådanne findes.

ISBN 9788770668279

10.8 Projekter

Projekt 10.1 Er der huller i Euklids argumentation.

Et projekt om manglerne i Euklids aksiomsystem og om Hilberts moderne aksiomsystem fra omkring år 1900, der havde som mål at udbedre disse mangler.

Projekt "**Er der huller i Euklids argumentation**" (pdf)

Projekt 10.2 Euklidisk tankegang i europæisk kulturhistorie

Den euklidiske tankegang har påvirket hele den europæiske kulturkreds. Projektet omfatter både eksempler fra Euklids forgængere indenfor filosofi og litteratur – Aristoteles logik og Homers Iliade – og eksempler på sådanne skelsættende værker med tydelige Euklidiske fingeraftryk som Spinozas etik, Newtons optik, Den amerikanske uafhængighedserklæring og Russels og Whiteheads Principia Mathematica.

Projekt "**Euklidisk tankegang i europæisk kulturhistorie**" (pdf)

Projekt 10.3 Terningens fordobling - Regning med passer og lineal

I projektet ser vi nærmere på, hvilke regneoperationer, der kan klares med passer og lineal. Man kan uddrage kvadratrødder, men ikke tredjerødder. I forsøget på at løse dette blev der skabt en ny verden, med kurver som parabler, hyperbler og ellipser.

Projekt "**Terningens fordobling - Regning med passer og lineal**" (pdf)

Projekt 10.4 Videnskabsteori - Lakatos og Eulers polyedersætning

Den ungarske matematiker Imre Lakatos var en af de største formidlere af matematik i det 20. århundrede, og samtidig en af de store videnskabsteoretikere. Han var påvirket af Platons dialoger, men udvikler denne dynamisk på en måde, så han demonstrerer, hvordan gamle rammer for matematik sprænges og ny erkendelse opstår. Hans dialog om Eulers polyedersætning er en klassiker i matematikhistorien. I projektet vil du møde fyldige uddrag af bogen.

Projekt "**Videnskabsteori - Lakatos og Eulers polyedersætning**" (pdf)

Projekt 10.5 Achilleus og skildpadden

Begrebet uendelighed har til alle tider udfordret matematikere og filosoffer, men begrebet spiller også en rolle i andre fag som fx religion. Projektet undersøger den gamle fortælling om Achilleus og skildpadden. Diskussionen om uendelighedsbegrebet rummer en diskussion om forholdet mellem matematik og virkelighed.

Projekt "**Achilleus og skildpadden**" (pdf)

Projekt 10.6 Brecht og Galilei

Naturfilosofien er skrevet i den store bog, som for evigt ligger for vore øjne, skrev Galilei og tilføjede: Bogen er skrevet i det matematiske sprog, og symbolerne er trekanter, cirkler og andre geometriske figurer, uden hvis hjælp det er umuligt at forstå et eneste ord af den, uden hvilket man tomt vandrer gennem en mørk labyrint. Men er vi åbne overfor at læse i bogen? Den tyske forfatter Bertolt Brecht var meget optaget af dette videnskabshistoriske og – filosofiske stof, og skrev i 1938/39 da han var på flugt fra nazismen, stykket Leben des Galilei. I projektet læses uddrag heraf, samt af de senere versioner Brecht lavede.

Projekt "**Brecht og Galilei**" (pdf)

Projekt 10.7 Babyloniernes astronomiske tabeller - Saros-cyklen

Babylonierne opdagede, at der er et mønster i de måneformørkelser, som systemet med Solen, Jorden og Månen skaber med kortere eller længere mellemrum. Hele geometrien i dette system gentages efter en periode på 18 år, 11 dage og 8 timer, eller angivet i antal døgn: Efter 6585,3 døgn. Denne periode kaldes Saros-cyklen. I projektet vil vi ud fra forskellige beregninger diskutere, hvordan de kan have fundet ud af dette.

Projekt "**Babyloniernes astronomiske tabeller - Saros-cyklen**" (pdf)

Projekt 10.8 Fastlæggelse af påsken og andre kalenderproblemer

Det har altid voldt problemer at lave en kalender. Årstal er jo tal, der tælles ud fra et udgangspunkt. Hvordan bliver vi enige om et fælles udgangspunkt? Og hvad er et år? Selv om de forskellige ikke kunne måle så nøjagtigt, så vidste alle, at årets længe er mellem 365 og 366 døgn. Når dette skulle udmøntes i en kalender skete det på mange forskellige måder. Dette og problemet med fastlæggelsen af en dato for påsken er emnet for dette projekt.

Projekt "**Fastlæggelse af påsken og andre kalenderproblemer**" (pdf)

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Projekt 10.9 Fagligt samarbejde om verdensbilleder

I dette projekt lægges op til et fagligt samarbejde om verdensbilleder. Projektet rummer forslag til et samlet forløb, samt en lang række kildematerialer med tekster af de forskellige aktører og tilhørende arbejdsark med spørgsmål. Man kan vælge elementer ud og arbejde dem igennem i hele klassen eller dele op i hold, som så vælger hver sit emne.

Projekt "**Fagligt samarbejde om verdensbilleder**" (pdf)

Projekt 10.10 Archimedes Sandtælleren

I Sandtælleren argumenterer Archimedes for, at der i hele universet ikke findes noget, der er uendeligt stort, selv om vi ofte bruger dette begreb. Han gør dette ved hjælp af et tankeeksperiment, hvor hele universet fyldes med det mindste man kan forestille sig, nemlig sandkorn. Naturligvis findes der mange ting i naturen, der er mindre end et sandkorn, men det er let at se, at hans argument kan udstrækkes til hvad som helst, der er mindre. Undervejs har han brug for en lang række vurderinger af størrelser og størrelsesforhold, og han indfører et helt nyt og genialt talsystem.

Projekt "**Archimedes Sandtælleren**" (pdf)

Projekt 10.11 Det udelukkedes tredjes princip

Dette princip eller aksiom siger, at for en given påstand gælder altid, at enten er påstanden sand eller den modsatte påstand er sand. Der er ikke en tredje mulighed. Selv om man i daglig tale har et begreb som halvdød, så er der ingen tilstand midt imellem. Men gælder det i alle spørgsmål?

Projekt "**Det udelukkedes tredje princip**" (pdf)

Projekt 10.12 Euklids algoritme og inkommensurabilitet

Det største hele tal, som går op i 105 og 154 er tallet 7. Givet to hele tal, så eksisterer altid et største tal, som går op i begge. Men hvordan findes det, hvis de to givne tal er meget store? Det er et vigtigt problem i moderne kodning og kryptologi. Opgaven blev løst af Euklid. Hans metode kaldes i dag for Euklids algoritme. I projektet undersøger vi Euklids algoritme og ser på hvorfor den virker. Vi oversætter problemet fra talteori til geometri, og opdager her en sammenhæng med spørgsmålet om inkommensurable størrelser.

Projektet "**Euklids algoritme og inkommensurabilitet**" (pdf)

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt 10.13 Serlios søjleordner og spiralkonstruktioner

I 1500 tallet udgav den italienske arkitekt Sebastiano Serlio De syv bøger om arkitektur, hvor han i alle detaljer fastlagde regler for byggeri. Værket er skrevet så den kunne anvendes som en manual af samtidens håndværkere, og den er samtidig tydeligt inspireret af Euklids Elementer. I projektet vil vi arbejde med en af detaljerne heri, nemlig konstruktion af spiraler, der har været et mønster, men-neskene har brugt til alle tider.

Projekt "**Serlios søjleordner og spiralkonstruktioner**" (pdf)

Projekt 10.14 Byernes pladser konstrueret som ovaler

De store pladser og store bygninger i centrum blev konstrueret efter bestemte geometriske mønstre. Fx blev Peterspladsen i Rom er bygget op omkring ovaler. I projektet undersøger vi konstruktionen af sådanne pladser med brug af et geometriprogram.

Projekt "**Byernes pladser konstrueret som ovaler**" (pdf)

Projekt 10.15 Mandatfordelinger undersøgt med geometriske metoder

I et repræsentativt demokrati repræsenteres borgerne af en valgt forsamling, der styrer samfundet, regionen, kommunen osv. En retfærdig fordeling af mandaterne viser sig at være vanskeligere, end man umiddelbart skulle tro. Det kræver en hel del matematik at forstå problemerne. I projektet opbygger vi en geometrisk matematisk model for mandatfordelingen for bedre at kunne undersøge og forstå problemet.

Projekt ”**Mandatfordelinger undersøgt med geometriske metoder**” (pdf)

Projekt 10.16 Mandatfordeling ved kommunalvalg

I loven om mandatfordeling ved kommunale valg hedder det: Det samlede stemmetal for hvert valgforbund, divideres med 1, 2, 3 osv., indtil der er foretaget et så stort antal divisioner som det antal mandater, der højst kan ventes at tilfalde valgforbundet. Det valgforbund, der har den største af de fremkomne kvotienter, får det første. Den næststørste kvotient giver ret til det andet mandat og så fremdeles. I projektet vil vi oversætte den sproglige form til formler og undersøge problemerne i mandatfordelingen ud fra konkrete eksempler.

Projekt ”**Mandatfordeling ved kommunalvalg**” (pdf)

ISBN 9788770668279

Af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup

Projekt 10.17. Vikingeborgenes geometriske konstruktion

Vikingeborgene, der blev bygget for 1000 år siden, må være konstrueret ud fra geometriske modeller. Ellers ville man ikke have kunnet bygge så præcist og symmetrisk. Vi har ikke nogle skriftlige overleveringer, der kan fortæller om deres metoder. Men ud de forskellige mål, dels for hele borganlægget, dels for langhusene, så kan vi afprøve forskellige teorier og forsøge at genskabe en borgkonstruktion i et dynamisk geometriprogram. Projektet er velegnet både som en dek af et fagligt samarbejde, og som et rent matematisk projekt. Det indeholder et materiale om ellipsens geometri og konstruktion.

Projekt "**Vikingeborgenes geometriske konstruktion**" (pdf)