**ISBN 9788770668279**




# Projekt 9.12. Pascals trekant

Et af målene i dette afsnit er at generalisere kvadratsætningerne, så vi fx umiddelbart og uden nødvendigvis at bruge et værktøj kan udregne udtrykt som $(2x+3y)^5$. Det viser sig at have overraskende store anvendelser i sandsynlighedsregning! VI starter med at repetere.

## 1. Parenteser og potenser

**Eksempel Parentesregel – gange ind**

At gange ind i en parentes betyder, at vi skal gange ind på alle de led, som er i parentes.

a) $x\cdot(5y+1)=x\cdot 5y+x\cdot 1=5xy+x$

b) $2\cdot(3x-y)=2\cdot 3x-2\cdot y=6x-2y$

**Øvelse 1**

Forklar hvorfor parentesreglen er anvendt korrekt i eksemplet.

**Eksempel Parentesregel – sætte uden for**

a) $x^3+2x=x\cdot x^2+x\cdot 2=x\cdot(x^2+2)$

b) $4h^2-2h=2h\cdot 2h-2h\cdot 1=2h\cdot(2h-1)$

**Øvelse 2**

Forklar hvorfor parentesreglen er anvendt korrekt i eksemplet ved at gøre prøve.

**Eksempel Betydning af potenser**

Når vi skal udregne potenser, så skal vi gange grundtallet med sig selv det antal gange, der står i eksponenten.

a) $7^2=7\cdot 7$ b) $5^3=5\cdot 5\cdot 5$ c) $10^6=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$

**Øvelse 3**

Forklar betydningen af følgende potenser

a) $a^4$ b) $z^{11}$ c) $(y-2)^2$ d) $(x+1)^8$

## 2. Kvadratsætningerne

**Øvelse 4**

Argumenter for følgende udtryk ud fra betydningen af potenser, og hvordan vi ganger ind i parenteser.

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

c) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Disse tre formler kalder vi de *tre kvadratsætninger*. Vi vil i kapitel 7 arbejder mere med dem.

**Øvelse 5**

Anvend kvadratsætningerne til at udregne

a) $(z+7)^2$

b) $(x-9)^2$

c) $(2x+3)^2$

Anvend dit værktøjsprogram til at checke dine udregninger

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT

**ISBN 9788770668279**


**Øvelse 6. Anvend kvadratsætninger fra højre mod venstre**
Anvend kvadratsætningerne til at omskrive

a) $x^2 - 25$

**b)** $x^2 + 12x + 36$

c) $9x^2 - 12x + 4$

De gængse værktøjsprogrammer har indbyggede metoder til at løse sådanne opgaver. På **bogens website ligger en vejledning.** Metoden hedder *kvadratkomplettering*

**Øvelse 7**
Anvend kvadratsætningerne til at udregne følgende *ved hovedregning*.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $11^2$ | b) $15^2$ | c) $19^2$ | d) $104^2$ |
| e) $98^2$ | f) $95 \cdot 105$ | g) $52 \cdot 48$ | f) $29 \cdot 31$ |

## 3 Generalisering af kvadratudtryk
Vi vil nu fokusere på parenteser som $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ osv. Dvs to led, og en eksponenten, der kan være større end 2. Vi vil lede efter et mønster, når vi udregner disse

**Eksempel: Udregning af en tredje potens**
Vi har udregnet $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Vi kan bruge denne viden til at udregne den næste potens:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

**Øvelse 8**

a) Check udregningen af $(a+b)^3$ vha. et matematisk værktøjsprogram.

b) Kan du se et mønster allerede nu? Kom med et bud på udregningen af $(a+b)^4$, og check vha. et matematisk værktøjsprogram.

Hvis vi stiller udregninger op under hinanden så har vi

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Hvis vin udelukkende fokuserer på koefficienterne, dvs *tallene* der står foran bogstavudtrykkene, så får vi:

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

**Øvelse 9 Mønstergenkendelse?**

a) Kom med et bud på en udregning af $(a+b)^5$ og $(a+b)^6$, uden at regne, men ud fra mønstret i udregningerne ovenfor. (*Hint*: *Kan du se en sammenhæng mellem fx koefficienterne i 3. række og i 2. række?*)

b) Check dine bud på udregningerne med et matematisk værktøjsprogram.

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT

**ISBN 9788770668279**


L&R Uddannelse EGMONT

## 4. Pascals trekant

De første 5 rækker i Pascals trekant er følgende:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Rækkerne nummereres oppefra, hvor den øverste række kaldes den 0'te række. Derefter kommer den 1'te række osv. Diagonalerne skråt ned mod venstre nummereres tilsvarende, således at den yderste venstre diagonal med rene 1-taller er den 0'te diagonal. Den næste diagonal med 1, 2, 3, 4 kaldes den 1'te diagonal. Med denne navngivning kan vi nummerere tallene inde i trekanten med $p_{ij}$, hvor *i* er rækkenummer og *j* er diagonalnummer. Dette betyder, at tallet 6 i trekanten ovenfor er $p_{42}$.

**Øvelse 10. Sammenhængen mellem rækkerne i Pascals trekant**

a) Hvad er sammenhængen mellem tallene $p_{32}$ og $p_{31}$ og tallene i række 2.

b) Hvad er sammenhængen mellem tallene $p_{43}$, $p_{42}$ og $p_{41}$ og tallene i række 3.

c) Giv nu et bud på, hvordan vi udregne tallene i række 5 ud fra tallene i række 4.

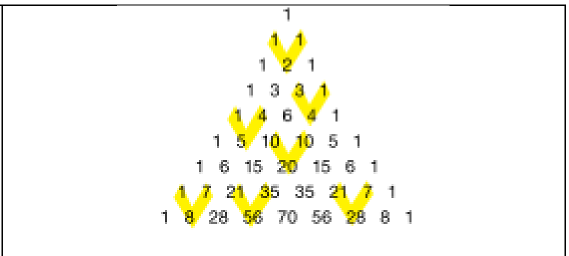
d) Vi så ovenfor, at tallene i række 3 kom fra en kvadratsætning. Kan du give en tilsvarende fortolkning af tallene i række 5, som du har fundet ovenfor.

**Øvelse 11.**

Til højre ses et lille udsnit af Pascals trekant.

På illustrationen kan man se, at en eller anden har foretaget en opmærkning af noget på tegningen.

Kan du give en forklaring på mærkerne?




**Øvelse 12. Brug at et regneark til udregning af tallene i Pascals trekant**

Vi kan med fordel bruge et regneark til at udregne tallene i Pascals trekant. Trekanten er her tiltet, så de to skrå ydersider ligger langs 1. række og 1. søjle i regnearket. Vi udfylder første række og kolonne med 1 taller. Værdien i celle B2 kan udregnes som A2+B1. Udvider vi denne udregning til alle celler, så får vi:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 |
| 5 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 | 1001 |
| 6 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2002 | 3003 |
| 7 | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5005 | 8008 |
| 8 | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 |
| 9 | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 | 24310 | 43758 |
| 10 | 1 | 10 | 55 | 220 | 715 | 2002 | 5005 | 11440 | 24310 | 48620 | 92378 |
| 11 | 1 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 3003 | 8008 | 19448 | 43758 | 92378 | 184756 |

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**

KOPIERING FORBUDT

**ISBN 9788770668279**


## 5. Sumreglen i Pascals trekant

Hvis vi skriver symbolerne ind på tallenes plads får vi

| | | |
|---|---|---|
| 1<br>1 1<br>1 2 1<br>1 3 3 1<br>1 4 6 4 1<br>1 5 10 10 5 1 | svarer til | $p_{00}$<br>$p_{10}$ $p_{11}$<br>$p_{20}$ $p_{21}$ $p_{22}$<br>$p_{30}$ $p_{31}$ $p_{32}$ $p_{33}$<br>$p_{40}$ $p_{41}$ $p_{42}$ $p_{43}$ $p_{44}$<br>$p_{50}$ $p_{51}$ $p_{52}$ $p_{53}$ $p_{54}$ $p_{55}$ |

Vi lægger mærke til, at udregningerne skrevet med symboler er således:

1+3=4 svarer til $p_{30} + p_{31} = p_{41}$

3+3=6 svarer til $p_{31} + p_{32} = p_{42}$

Helt generelt kan vi udtrykke, hvordan vi kommer fra en række, som vi kalder række nummer *n*, til den næste række som vi kalder nummer *n+1* ved formlen: $p_{nk} + p_{n\,k+1} = p_{n+1\,k+1}$ .

> **Sætning 1 Sumreglen i Pascals trekant**
> De tal, der indgår i Pascals trekant bliver til koefficienterne, når vi udregner $(a+b)^n$ netop fordi vi har sumreglen $p_{nk} + p_{n\,k+1} = p_{n+1\,k+1}$ .

**Bevis**:

Vi vil argumentere ud fra et konkret eksempel, men argumentet kan let generaliseres.

Lad os sige, at vi har vist, at tallene i Pascals trekant faktisk er koefficienterne til leddene for $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ … $(a+b)^6$, som vi har gjort i øvelserne ovenfor.

Vi vil nu vise, at det også er tilfældet for $(a+b)^7$.

Hvis vi udregner $(a+b)^7$, så får vi for eksempel led med $a^3 \cdot b^4$, og vi vil argumentere for, at koefficienten kan fås som en sum af to koefficienter fra $(a+b)^6$.

Vi kan skrive

$$(a+b)^7 = (a+b)\cdot(a+b)^6 .$$

Leddet $a^3 \cdot b^4$ har hentet *a*'er fra 3 af de 7 parenteser, og *b*'er fra de resterende 4 parenteser. Dette kan gøres på mange måder, men vi kan dele det op i to tilfælde:

1) Det ene *a* kan komme fra første parentes, og de andre to *a*'er fra to af de sidste 6 parenteser.
2) Alle 3 *a*'er kommer fra de sidste 6 parenteser.

Hvor mange er der i hver af de to tilfælde:

1) Hvor mange måder kan vi vælge 2 ud af 6 parenteser? Det svar står i 6. række, og er $p_{62}$.
2) Hvor mange måder kan vi vælge 3 ud af 6 parenteser? Det står også i 6. række, og er $p_{63}$.

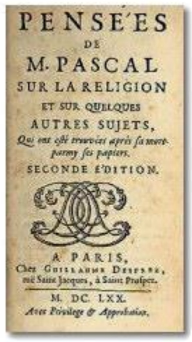
Dvs. koefficienten foran $a^3 \cdot b^4$ er summen af de to tal $p_{62}$ og $p_{63}$, hvilket netop er tallet i Pascals trekant under de to tal $p_{62} + p_{63} = p_{73}$.

Vi kan konkludere, at den 7. række i Pascals trekant netop er koefficienterne til $(a+b)^7$.

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

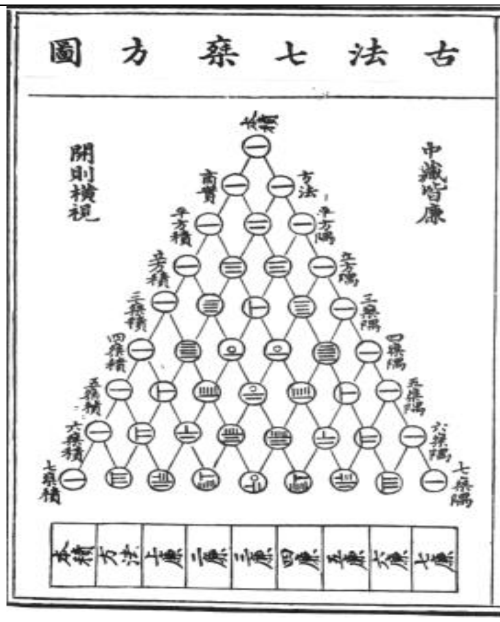
## 6. Pascals trekant er opdaget i mange forskellige kulturer

Pascals trekant har navn efter den franske matematiker, naturvidenskabsmand og filosof Blaise Pascal (1623-1682)..Han var meget alsidig og hans fysiske eksperimenter med tryk og temperatur har givet anledning til at hans navn i dag anvendes som en måleenhed. Hans opdagelse af trekanten, der også bærer hans navn, blev præsenteret i *Traité du triangle arithmétique* fra 1653.




Pascals mest berømte værk hed simpelthen *Tanker*. Det er i sin opbygning og argumentationsform stærkt påvirket af Euklid. Det er behandlet i kapitel 10, Matematik og kultur, som ligger på **bogens website**. Her kan du læse et kort uddrag af bogen..

Men Pascals trekant er en af de bemærkelsesværdige opdagelser i matematikken, der uafhængig af hinanden er gjort i mange kulturer – men ikke i den græske!. Den var kendt i de gamle indiske, muslimske og kinesiske kulturer, og opdagelsen går således et par tusinde år tilbage.
I renæssancen dukker den op i Vesteuropæisk matematik, hvor den til sidst bliver givet en særlig grundig behandling af Blaise Pascal, hvorfor vi i Europa og USA kalder den Pascals trekant, mens fx kineserne kalder den Yang Huis trekant og Iranerne kalder den Khayyams trekant




**Øvelse 13**
Diagrammet indeholder en fejl. Kan du se den?

Inderne introducerer Pascals trekant i forbindelse med kombinatorik (antallet af ord, der kan laves ud fra et givet antal bogstaver). De ældste overleverede referencer er fra 900-tallet, men de referere tilbage til tidligere værker fra før vor tidsregning.

Kineserne introducerer Pascals trekant i forbindelse med algebra såsom uddragning af rødder og løsning af ligninger. Det er her Yang Hui i 1200-tallet gengiver de første otte rækker svarende til binomialformlen op til 8. potens. Diagrammet indeholder i øvrigt en fejl. Kan du se den?

**© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk**
KOPIERING FORBUDT