ISBN 9788770668279

Projekt 9.11 Fødselsdagsproblemet: Kan vi tro på det?

Der er mange matematiske finurligheder, hvor vores intuition spiller os et puds – hvor vi tror, at løsningen på et problem er lige til. I en klasse med 30 elever virker det fx nærmest usandsynligt at to elever har fødselsdag samme dag. Man ville derfor uden betænkning indgå et væddemål med Peter, som påstår, at sandsynligheden er næsten 30 % ! Let tjente penge – ja, men for hvem?

Notér først alle fødselsdatoer for klassens elever på en liste som alle kan se (på tavlen eller via projektor). Er der gengangere?

Eksperimentet

Vi undersøger først problemet ved at simulere det i et værktøjsprogram.
Vi antager som udgangspunkt, at alle fødselsdatoer er lige sandsynlige, idet vi ser bort fra skuddagen d. 29. februar. Der er altså 365 mulige fødselsdatoer i vores model. Disse betegner vi som dag 1 i året, dag 2 i året osv.

Vi vil oprette en liste med 30 tilfældige fødselsdatoer for en klasse med 30 elever:

a) Opret en liste, som du kalder: ***muligedatoer***.

b) Udfyld denne liste med tallene 1-365 i overensstemmelse med ovenstående (udnyt regnearkets faciliteter til at gøre dette automatisk).

c) Opret en liste, som du kalder: ***klassedatoer***. Udfyld denne liste med lige så mange tilfældige fødselsdatoer, som der er elever i klassen (benyt en indbygget funktion, der trækker tilfældige tal, fra listen ***muligedatoer***). Denne udfyldning svarer netop til at simulere fødselsdatoer for en klasse med 30 elever.

d) Er der nogen gentagelser? Gentag simuleringen 10 gange: Hvor ofte forekommer der gentagelser?

Vi vil automatisk tælle antallet af gentagelser for hver simulering:

e) Opret en liste, som du kalder ***hyppigheder***.

f) Udfyld denne liste med hyppighederne for hver af de 365 fødselsdatoer i listen ***muligedatoer*** (benyt en indbygget funktion, der tæller, hvor mange gange hvert af tallene i listen ***muligedatoer*** optræder i liste ***klassedatoer***).

Bemærk: De fleste datoer vil forekomme 0 eller 1 gang. Men hvis der er gentagelser, vil der også være en enkelt eller to datoer med hyppighed 2 og en sjælden gang en dato med hyppighed 3

ISBN 9788770668279

Vi vil give et skøn over sandsynligheden for at to elever i klassen har fødselsdag samme dag:

Når der forekommer gentagelser, så vil tallet 2 eller 3 optræde i listen ***hyppigheder***, og vi kan derfor tælle antallet af simuleringer, hvori der forekommer gentagelser, ved hver gang at bestemme maksimumværdien for listen ***hyppigheder***.

g) Opret en celle, hvori du for hver simulering bestemmer maksimumværdien for listen ***hyppigheder*** (benyt en indbygget funktion).

h) Gentag simuleringen 10 gange, og tæl, hvor mange gange der forekommer gentagelser, dvs. hvor mange gange tallet 2 eller 3 forekommer.

i) Giv på baggrund af dine iagttagelser et skøn over sandsynlighed for, at der forekommer gentagelser.

Vi vil illustrere fordelingen af antal simuleringer hvori der forekommer gentagelser:

j) Opret en liste, som du kalder ***maxværdier***. Udfyld denne liste, idet du for hver simulering opsamler den fundne maksimumværdi (kald den fx ***max*** og benyt en indbygget funktion, som kan ”fange” ***max*** hver gang, du foretager en ny simulering).

k) Opret et diagram, som viser maksimumværdierne for hver af simuleringerne, og gentag simuleringen 100 gange. Hvordan ser fordelingen ud? Giv på baggrund af dine iagttagelser et skøn over sandsynlighed for, at der forekommer gentagelser, idet du beregner:

$$\text{sansynligheden for gentagelser} = \frac{\text{antal simuleringer med gentagelser}}{\text{antal simuleringer i alt}}$$

Vil du stadig tage imod Peters væddemål?

ISBN 9788770668279

Teorien bag

Vi vil nu prøve at regne på sandsynligheden.
Her skal vi inddrage skuffeprincippet (se kapitel 7, afsnit 1.2 *Talsans*):

> Hvis n genstande skal anbringes i m dueslag, hvor $n > m$, så må mindst et dueslag indeholde mere end en genstand.
>
> Her er n = 10 duer og m = 9 dueslag, altså må et dueslag indeholde mere end en due!
>
> Men hvis der i stedet var færre duer end 9, så skulle ingen af dem dele dueslag!

Skuffeprincippet giver altså en logisk garanti, for hvornår der med sikkerhed er gentagelser, nemlig hvis der er mere end 365 elever i en klasse. Men her vil vi se på en sandsynlighedsteoretisk version af skuffeprincippet: Selv om der er færre end 365 elever i klassen kan der jo godt tilfældigvis være to med samme fødselsdag. Og det er sandsynligheden for dette vil vil forsøge at udregne.

Vi vender nu problemet om og fokuserer på sandsynligheden for, at der *ikke* forekommer nogen gentagelser – altså at ingen i klassen har fødselsdag samme dag, og vi vil nu gå ud fra, at klassen består af op til i alt 50 elever (hvilket fx kan være to normale klasser, der er slået sammen i idræt).

Når vi skal vælge en tilfældig fødselsdagsdato for elev nr. 1, så har vi 365 muligheder, så sandsynligheden for at tildele elev nr. 1 en fødselsdato, som ingen andre har (vi kalder det en *gunstig* dato), må være:

$$\frac{365-0}{365} = 1 .$$

For elev nr. 2 har vi en mulighed mindre, fordi den ene af de 365 dage er optaget, så derfor bliver sandsynligheden for at tildele elev nr. 2 en gunstig fødselsdato:

$$\frac{365-1}{365} = \frac{364}{365} = 0{,}997$$

For elev nr. 3 har vi endnu en mulighed mindre, fordi de to af de 365 dage er taget, så derfor bliver sandsynligheden for at tildele elev nr. 3 en gunstig fødselsdato:

$$\frac{365-2}{365} = \frac{363}{365} = 0{,}994$$

Sådan kan vi fortsætte indtil alle elever har fået tildelt en gunstig fødselsdagsdato.

Sandsynligheden for at alle elever får en fødselsdagsdato, som ingen andre har, kan så beregnes som produktet af de fundne sandsynligheder.

Vi vil beregne sandsynligheden for at elev nr. 1 til elev nr. 50 får en gunstig dato:

a) Opret en liste, som du kalder ***klassen***.

b) Udfyld denne liste med tallene fra 1-50, svarende til at hver elev i klassen får et nummer.

c) Opret en liste, som du kalder ***ssgunstigdato***.

d) Udfyld denne liste med sandsynligheden for at den aktuelle elev får en gunstig dato (udnyt regnearkets faciliteter til at få beregnet denne værdi automatisk ned igennem listen).

Vi vil beregne sandsynligheden for at elev nr. n får en gunstig dato, når alle eleverne før ham, har fået en gunstig dato:

e) Opret en liste, som du kalder ***ssallegunstige***.

f) Udfyld denne liste med produktet af alle de *hidtil beregnede sandsynligheder*, dvs. i cellen svarende til elev nr. 3 beregnes sandsynligheden ved:

$$(\text{sandsynlighed elev nr 1})\cdot(\text{sandsynlighed elev nr 2})\cdot(\text{sandsynlighed elev nr 3}) = 0{,}992$$

hvor sandsynlighederne findes i listen ***ssgunstigdato*** eller:

$$(\text{samlet sandsynlighed elev nr 2})\cdot(\text{sandsynlighed elev nr 3}) = 0{,}992$$

hvor den samlede sandsynlighed netop er den foregående i den liste, vi er i gang med at udfylde, nemlig ***ssallegunstige*** (udnyt regnearkets faciliteter i beregningen).

Denne liste indeholder altså netop den samlede sandsynlighed for, at der *ikke* forekommer gentagelser set i relation til antallet af elever i klassen.

Vi vil beregne sandsynligheden for, at der forekommer gentagelser set i relation til antallet af elever i klassen:

Det kan vi gøre, fordi dette svarer til præcis den omvendte situation!

g) Opret en liste som du kalder ***ssgentagelser***.

h) Udfyld denne liste med de omvendte samlede sandsynligheder (udnyt regnearkets faciliteter til at beregne værdierne i listen svarende til: ***1 – ssallegunstige***).

i) Opret et diagram, der viser den samlede sandsynlighed for gentagelser som funktion af antallet af elever i klassen, dvs. et plot, hvor ***klassen*** afsættes på førsteaksen og ***ssgentagelser*** afsættes på andenaksen.

j) Hvordan stemmer de udregnede sandsynligheder overens med dit eksperimentelle skøn over sandsynligheden for, at der forekommer gentagelser i din egen klasse?

k) Hvor mange elever skal der være i en klasse før sandsynligheden for, at der forekommer gentagelser, er over 0,5? Dette svarer jo netop til den situation, hvor det faktisk vil være mere sandsynligt, at der *er* gentagelser!

Dette var væddemålets endeligt – nu er det slut med Peters lettjente penge!
På Wikipedia og andre steder kan du finde flere informationer om fødselsdagsparadokset, der på engelsk kaldes Birthday Problem/Paradox