ISBN 9788770668279

Projekt 8.9 Stykkevis definerede funktioner

I mange situationer har vi brug for at kunne definere funktioner og tegne grafer, der fremkommer ved at "lime en række grafer sammen", og hvor den resulterende graf fremstår med en række knæk. Tænk fx på en skatteskala, hvor der betales forskellige procenter i forskellige intervaller. Eller tænk på en dosering af medicin – eller indtagelse af rusmidler – hvor der over tid både indtages nyt og forbrændes det, der er optaget.

Denne type funktioner kaldes af naturlige grunde for *stykkevis definerede funktioner* (på engelsk *piecewise*).
Det følgende kan gennemføres for alle funktionstyper, og vi vil i B- og A-bøgerne vende tilbage til andre vigtige eksempler fx fra svingningsteorien. Men her vil vi koncentrere os om de lineære og eksponentielle modeller.

Til at opstille funktionsudtrykkene har vi brug for følgende variant af forskriften for henholdsvis lineære og eksponentielle funktioner:

- Givet et startpunkt (x_0, y_0) og en bestemt hældningskoefficient a for en lineær funktion, opskriv forskriften.
- Givet et startpunkt (x_0, y_0) og en bestemt fremskrivningsfaktor a for en eksponentiel funktion, opskriv forskriften.

1. Det lineære tilfælde:

Betragt to punkter på grafen: Det givne punkt (x_0, y_0) og et variabelt punkt (x, y)
Vi anvender formlen for a-tallet for lineære funktioner:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$a \cdot (x - x_0) = y - y_0 \qquad \text{Gange over}$$

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0) \qquad \text{Isoler } y \text{ og roker rundt}$$

Fortolkning af dette udtryk:
- Vi placerer os i koordinatsystemnet i det givne punkt (x_0, y_0), som vi anvender som udgangspunkt for grafen.
- Vi tæller x'erne ud fra startværdien x_0, dvs i punktet x på 1.aksen er vi gået $(x - x_0)$ frem i forhold til udgangspunktet.
- a--tallet bestemmer herfra grafens forløb, dvs hvad y-værdien bliver, når vi går et sådant stykke frem: Nemlig udgangspunktet, y_0 + a gange tilvæksten i x-koordinaten

Eksempel: Opskriv forskriften for en lineær funktion direkte
En lineær funktion har hældning -4 og grafen går gennem punktet (6,7). Opskriv en regneforskrift.
Løsning: Indsæt i formlen

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

$$f(x) = 7 - 4 \cdot (x - 6)$$

Denne kunne omskrives til $f(x) = -4 \cdot x + 31$, men det er ikke nødvendigt, og det første udtryk er lettere at fortolke

ISBN 9788770668279

Eksempel: Stykkevis lineære funktioner

En lineær funktion er givet ved $h_1(x) = 1.5x + 5$

Grafen for en anden lineær funktion, $h_2(x)$ skal have hældning 2.5, og forløbe fra det punkt på grafen for $h_1(x)$, hvor x er 8.

a) Opskriv en forskrift for $h_2(x)$

Løsning: Indsæt i formlen

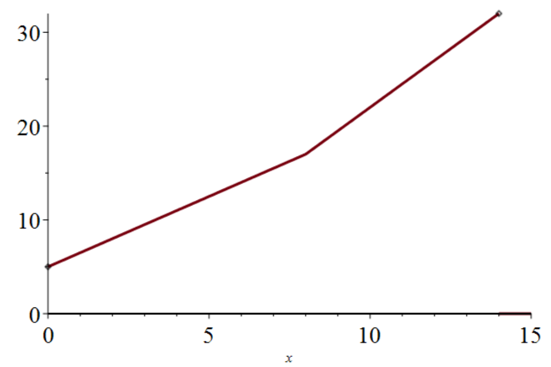
$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$
$$h_2(x) = h_1(8) + 2.5 \cdot (x - 8)$$
$$h_2(x) = 17 + 2.5 \cdot (x - 8) \qquad \text{udregn } h_1(8) = 17$$
$$h_2(x) = 2.5 \cdot x - 3 \qquad \text{reducer}$$

b) Vi ønsker at justere ovenstående plot, så vi får tegnet grafen for $h_1(x)$ i intervallet $[0;8]$, og grafen for $h_2(x)$ i intervallet $[8;14]$.

Løsning: Her udnytter vi værktøjets specielle kommando. Den standardnotation der anvendes er følgende:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1.5x + 5, & 0 \le x < 8 \\ 2.5 \cdot x - 3, & 8 \le x < 14 \end{cases}$$

Grafen ser således ud:



Øvelse 1 En skatteskala med indbygget progression

Antag et land har en bundgrænse for betaling af skat på 50.000, og at man derefter betaler 38% i intervallet op til 360.000. Man skal endelig betale 54% af den del af indkomsten, der overstiger 360.000. Vi udelader alt om fradrag og specialiteter om sammenhæng mellem indkomst og overførselsindkomster.

a. Giv en *grafisk* fremstilling af skatteskalaen og opstil et funktionsudtryk, der kan repræsentere skalaen.

b. Anvend funktionsudtrykket til at svare på: Hvor meget skal man betale i skat, når man har en skattepligtig indkomst på 510.000. Kontroller ved grafisk aflæsning.

c. Hvor meget skal man tjene før man kommer op på at betale 45% af sin indkomst i skat?

Øvelse 2 Sumkurver – Lorenzkurver

I kapitel 2, afsnit 4 mødte vi stykkevis definerede funktioner i form af sumkurver, og specielt Lorenzkurver. Slå tilbage og forklar hvad en Lorenzkurve er, og hvad det har med stykkevis definerede funktioner at gøre.

L&R Uddannelse EGMONT

2. Det eksponentielle tilfælde:

Betragt to punkter på grafen: Det givne punkt (x_0, y_0) og et variabelt punkt (x, y)

Vi indsætter punkterne i forskriften: $y = b \cdot a^x$

$$y = b \cdot a^x$$
$$y_0 = b \cdot a^{x_0}$$

Divider på venstre og på højre side, så gælder:

$$\frac{y}{y_0} = \frac{b \cdot a^x}{b \cdot a^{x_0}}$$

: $\frac{y}{y_0} = a^{x - x_0}$ Forkort og brug potensregler

$y = y_0 \cdot a^{x - x_0}$ Gang over og isoler y

Fortolkning af dette udtryk:

- Vi placerer os i koordinatsystemnet i det givne punkt (x_0, y_0), som vi anvender som udgangspunkt for grafen.
- Vi tæller x'erne ud fra startværdien x_0, dvs i punktet x er vi gået $x - x_0$ frem i forhold til udgangspunktet.
- a-tallet bestemmer herfra grafens forløb, dvs hvad y-værdien bliver, når vi går et sådant stykke frem: Nemlig udgangspunktet, y_0 gange a opløftet i et tal svarende til det stykke vi går frem

Eksempel: Opskriv forskriften for en eksponentiel funktion direkte

En eksponentiel funktion har en fremskrivningsfaktor (et a-tal) på 0.75 og grafen går gennem punktet (6,7). Opskriv en regneforskrift.

Løsning: Indsæt i formlen: $y = y_0 \cdot a^{x - x_0}$

$g(x) = 7 \cdot 0.75^{x-6}$

$g(x) = 39.331 \cdot 0.75^x$ Omskrevet til klassisk form

men den sidste omskrivning er ikke nødvendigt, og det første udtryk er lettere at fortolke.

Eksempel: Stykkevis eksponentielle funktioner

En eksponentiel funktion er givet ved $k_1(x) = 2 \cdot 1.2^x$.

Grafen for en anden eksponentiel funktion $k_2(x)$ skal have fremskrivningsfaktor på 0.8, og forløbe fra det punkt på grafen for $k_1(x)$, hvor x er 6.

a) Opskriv en forskrift for $k_2(x)$.

Løsning. Vi indsætter i formlen:

$y = y_0 \cdot a^{x - x_0}$

$k_2(x) = k_1(6) \cdot 0.8^{(x-6)}$

$k_2(x) = 5.97 \cdot 0.8^{(x-6)}$ Udregn $k_1(6)$

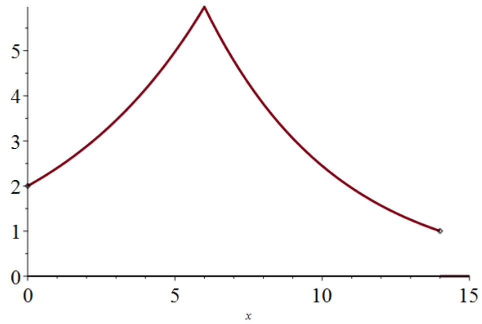
$k_2(x) = 22.781 \cdot 0.8^x$ Reducer

b) Vi ønsker at justere ovenstående plot, så vi får tegnet grafen for $k_1(x)$ intervallet [0;6] og grafen for $k_2(x)$ i intervallet [6;14].

Løsning: Her udnytter vi værktøjets specielle kommando. Den standardnotation der anvendes er følgende:

$$p_1(x) = \begin{cases} 2 \cdot 1.2^x, & 0 \le x < 6 \\ 5.9720 \cdot 0.8^{(x-6)}, & 6 \le x < 14 \end{cases}$$

Grafen ser således ud:



ISBN 9788770668279

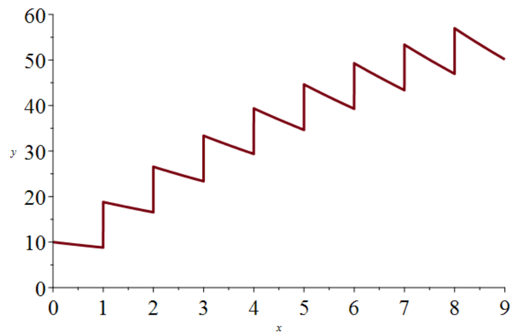
Øvelse 3: Dosering af medicin

En patient får tilført 10mg af en bestemt medicin hver time. Kroppen nedbryder ca. 12 % af den medicin man har i kroppen hver time. Vi betragter et forløb over 9 timer

a) Giv en grafisk fremstilling af situationen og opstil et funktionsudtryk for medicin indholdet i kroppen.

b) Giv ud fra grafen et bud på, hvad de sker, når der er forløbet mange timer.

Kurven ser ud til at bøje af. Hvis vi vil se på, hvad der sker, når *x* bliver meget stor, så kan vi fokusere på alle de øverste punkter i den savtakkede kurve, og fx afsætte 50 punkter.



c) Argumenter for, at y-værdierne til de øverste punkter er:

10

$10+10\cdot 0.88$

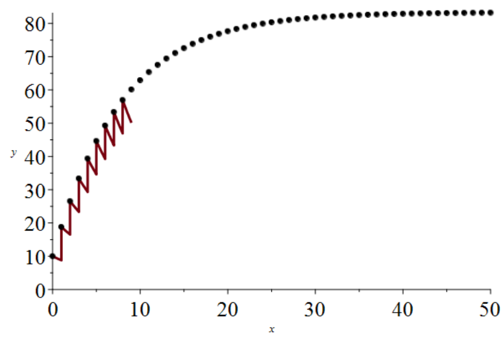
$10+10\cdot 0.88+10\cdot 0.88^2$

....

d) Udfør et punktplot. Det skal se således ud, hvor vi også har indtegnet den savtakkede kurve for de første værdier.

Hvis vi vil beregne, hvad der sker, når x går mod uendelig, så er dette åbenbart lig med

$s=10+10\cdot 0.88+10\cdot 0.88^2+\ldots+10\cdot 0.88^n+\ldots$



Men det er jo en sum af den type vi undersøgte i kapitel 3 under rentes- og annuitetsregning. Vi udledte der en sumformel

$$s=10+10\cdot 0.88+10\cdot 0.88^2+\ldots+10\cdot 0.88^n+\ldots$$

$$s=10\cdot(1+0.88+0.88^2+\ldots+0.88^n+\ldots)$$

$$s=10\cdot\sum_{i=0}^{\infty}0.88^i=10\cdot\frac{1}{1-0.88}=\frac{10}{0.12}=83.33$$

Konklusion: Medicinindholdet i kroppen nærmer sig asymptotisk niveauet 83.33.