ISBN 9788770668279

Projekt 8.7 Logaritmernes oprindelse og Den franske revolutions logaritmefabrik

Indhold

Den franske revolution, der blev indledt med stormen på Bastillen 14. juli 1789 og videreført under parolen om *frihed, lighed og broderskab (Liberté – Egalité – Fraternité),* fik med sine ideer om menneskerettigheder og om samfundets indretning en enorm betydning for hele den verdenshistoriske udvikling. I Frankrig selv kom den hurtigt til at vende op og ned på alting.

Videnskaben havde i 1700-tallet et højt niveau i Frankrig, og Paris var det naturlige centrum i oplysningstidens Europa. Det var her, man for første gang i historien satte sig for at lave en encyklopædi, et leksikon over alt hvad menneskene ved, skrevet af de største eksperter på hvert sit område. Arbejdet, der blev ledet af filosoffen Diderot og matematikeren d'Alembert, var med til at give de intellektuelle og hele det videnskabelige miljø en tro på mennesket og på videnskabens muligheder for at bidrage til et bedre liv. De franske kejsere var også interesserede i videnskabens muligheder, men ofte blot som underholdning. Solkongen Ludvig den 14. var således interesseret i hydraulik og ansatte den dansk videnskabsmand Ole Rømer, ikke til at bygge kanaler og sluser, men til at konstruere et system, så Versailles-parkens 1400 springvand kunne springe uafbrudt.

En flok naturvidenskabsmænd gør sig klar til at møde Solkongen på Versailles. Verdens førende videnskabsmænd arbejdede hos Solkongen i Versailles i 1600- og 1700-tallet. At få lov til at fremlægge sin forskning for den franske konge var den største hæder man kunne opnå, og kan sammenlignes med at få Nobelprisen i dag.

ISBN 9788770668279

Øvelse 1
Find selv på nettet yderligere oplysninger om encyklopædisterne. Hvem var de, hvad drev dem i deres arbejde, hvilken rolle spillede de i samfundet, og hvilken kom de til at spille i den franske revolution?

De revolutionære ønskede at gøre op med alt det gamle og gøre alt nyt. Gamle videnskabscentre blev lukket og nye universiteter, som École Polytechnique, der skulle uddanne ingeniører i stor skala, og École Normale, der fik til opgave på kort tid at omlægge hele den franske skoleundervisning og uddanne lærere hertil, blev etableret. École Normale producerede nærmest lærere på samlebånd, hver 4. måned blev 1400 nyuddannede efter et koncentreret kursus sendt ud som instruktører med den opgave selv at uddanne nye lærere.

For at demokratisere undervisningen og gøre regning til et fag alle kunne lære, og for at lette arbejdet i naturvidenskaberne og finde et fælles sprog på tværs af grænserne, besluttede man at afskaffe alle gamle mål for længder, vægt og rumfang og indføre titalssystemet overalt.

Øvelse 2
Hvilke gamle mål for længder, vægt, rumfang eller antal kender du?

Også tidsregningen startede de forfra, hvor år 0 blev sat til datoen for den franske republiks grundlæggelse 22. september 1792. De bevarede årets inddeling i 12 måneder, men gav dem nye navne og satte hver måned til 30 dage. De overskydende 5-6 dage på et år var særlige festdage. En måned blev inddelt i 3 uger hver med 10 dage, døgnet blev inddelt i 10 timer hver med 100 minutter, og hvert minut blev igen opdelt i 100 sekunder. Det var et opgør med det gamle 60-talsystem, som stammer helt tilbage fra Babylonien et par tusinde år fvt. Dette opgør skulle også føres igennem i geometrien. I stedet for det gamle vinkelmål, hvor en ret vinkel er 90° indførte man nygrader, hvor en ret vinkel er 100°. Selv om det umiddelbart forekommer indlysende at gå over til titalssystemet stødte det på store vanskeligheder netop med vinkelmålene. Alle matematiske tabeller var indrettet efter 60-talssystemet.

ISBN 9788770668279

1. Tabeller

I alle kulturer har tabeller været uundværlige hjælpemidler for matematikere, astronomer og andre videnskabsfolk. Tabeller over himmellegemernes bevægelse kender vi fra mayaerne, babylonierne og grækerne, og de har hjulpet med til at se mønstre, finde et system og fx lave pålidelige kalendere. Optegnelserne, der gennem århundreder blev stadig mere omfattende, blev foretaget i 60 talsystemet.

Da Ptolemaios omkring 300 fvt opdagede de sammenhænge mellem sider og vinkler, der blev grundlaget for trigonometrien, begyndte han at udarbejde de første trigonometriske tabeller, som vi omtalte i kapitel 6 om Vektorer og Trigonometri. Tabellerne blev efterhånden stadigt mere nøjagtige, de blev uundværlige hjælpemidler i geometriske beregninger, og de var udarbejdet i 60-talssystemet.

Da Napier og Briggs omkring 1620 konstruerer de første logaritmefunktioner, som vi omtaler nedenfor, sker det i form af et omfattende tabelværk, og da logaritmerne hurtigt viser sig uundværlige for alle større beregninger udarbejdes også særlige logaritmetabeller over de trigonometriske funktioner, igen i 60-talsytemet.

Tabeller er uundværlige hjælpemidler i matematik. Derfor besluttede de revolutionære i Frankrig, at der i forlængelse af indførelsen af titalssystemet skulle udarbejdes nye tabeller over både de trigonometriske funktioner og over logaritmefunktionerne.

På nettet findes på adressen http://locomat.loria.fr/ en enorm samling af matematiske tabelværker fra hele historien. Foruden alle kildeteksterne er der en række artikler af forskere til fri download

2. Konstruktionen af logaritmerne

I 1500-tallet var det blevet almindeligt at bruge decimalsystemet i stedet for romertallene, hvorved addition og subtraktion (plus og minus) var blevet lettere. Men multiplikation (gange) og division var stadig vanskelige opgaver, for slet ikke at tale om at opløfte i potens eller uddrage rødder!

Ikke mindst astronomer som Tycho Brahe havde brug for hjælpemidler til de store beregningsopgaver. Han havde dygtige assistenter, der hjalp med de tidkrævende opgaver, men lange beregninger var altid forbundet med en risiko for at regne forkert, hvilket jo kunne få stor betydning for fx bestemmelse af planetbaner. Derfor ledte man efter metoder, der kunne lette disse beregninger ved at omdanne gange og division til plus og minus.

Det blev den skotske godsejer John Napier (1550-1617), der løste dette gennem konstruktion af et omfattende tabelværk over tal, han kaldte *logaritmer*, og som ifølge Napier havde disse "*vidunderlige egenskaber*". Napier har ikke selv fortalt, hvad der satte ham i gang med dette arbejde, der kom til at tage 20 år af hans liv, men man ved, at en af hans nære venner, en læge John Craig var med i følget, da den skotske kong James d. 1 i 1590 rejste til Danmark for at forberede sit bryllup med den danske prinsesse Anna, søster til Chr. d. IV.

Det blev et langt ufrivilligt ophold på grund af tilfrosne farvande og voldsomme vinterstorme. Mens de er i Danmark besøgte følget, herunder Dr. John Craig, Tycho Brahe på øen Hven.

John Napier (1550-1617)

ISBN 9788770668279

Tycho Brahe (1546-1601) var Europas førende astronom, og kongen havde allerede i 1576 stillet Hven i Øresund til rådighed for ham, så han kunne etablere sine observatorier her. Man formoder, at Dr. John Craig efter sin hjemkomst har fortalt John Napier om Tycho Brahe, og om hvor omfattende et arbejde det er at beregne himmellegemernes gang. Vi ved, at lægen havde brevforbindelse med Tycho Brahe i tiden efter, og her begynder Napier det arbejde, der fører frem til konstruktionen af logaritmerne. Du kan finde en nærmere redegørelse for ”den danske forbindelse” **her**.
Tycho Brahe kendte og anvendte faktisk en metode, der kunne omdanne gange og division til plus og minus via omskrivninger med brug af trigonometriske funktioner! Denne beregningsproces blev kendt under navnet Prostaphaeresis, der er en sammentrækning af de græske ord for addition og subtraktion. Metoden blev fra omkring 1580 udbredt blandt astronomer og en af datidens største eksperter inden for dette felt var ansat hos Tycho Brahe. Den historie er behandlet i **Projekt 8.13 *Prostaphaeresis: Logaritmiske beregninger med sin og cos*,** som findes via bogens website.

Napier ser altså behovet for at udvikle et nyt hjælpemiddel til at udføre store beregninger.
Men hvordan han fik idéen til sine logaritmer ved vi ikke med sikkerhed. Meget taler for, at den simpelthen udsprang af potensreglen: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
hvor vi ser en multiplikation på venstre side er knyttet til en addition på højreside.

I et værk fra 1544 skrev forfatteren Michael Stifel om talfølger som disse:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

at ”*addition i den øverste række svarer til multiplikation i den nederste række, ligesom subtraktion i den øverste svarer til division i den nederste*.”

Øvelse 4
Forklar hvad forfatteren mener med denne formulering. Indfør gerne symbolsprog i din forklaring.

I kapitel 3: *Procent og rentesregning* diskuterede vi udvidelsen af potensbegrebet, og af hvordan a^x kan defineres for alle tal på en sådan måde, at reglen ovenfor stadig vil gælde. Det blev også diskuteret på Stifels tid. Han skriver endda:” *Man kunne skrive en helt ny bog om de vidunderlige egenskaber, disse tal har, men jeg må på dette sted lade det ligge, lukke øjnene og gå videre*.” Napier kendte til dette værk, der havde titlen *Arithmetica Integra*, og det er tankevækkende, at netop formuleringen om tallenes *vidunderlige egenskaber* kom til at indgå på titelbladet, da han udgav sine tabeller.

Napiers ide er således meget kort fortalt, at havde vi en tabel som den ovenfor med sammenhørende værdier for ”alle” tal, så kan vi udregne produktet af to tal fra den nederste række fx tallene 7,61 og 10,93 ved at aflæse, hvilke tal der står i den øverste række, addere disse og finde denne sum i den øverste række, og endelig gå ned og aflæse hvilket tal dette hører sammen med i den nederste række.

Øvelse 5
a) Bestem de tal x og y, der står i den øverste række i tabellen ovenover henholdsvis 7,61 og 10,93, ved at løse ligningerne $2^x = 7{,}61$ og $2^y = 10{,}93$ med en solve-kommando.
b) Udregn $x + y$, og bestem det tal i den nederste række, som x+y hører sammen med ved at udregne 2^{x+y}.
c) Kontroller på dit værktøj, at dette faktisk er produktet $7{,}61 \cdot 10{,}93$.
Bemærk, at de udregninger vi foretager i a) og i b) faktisk svarer til opslag i tabeller!

John Napiers logaritmer

Napier udgav sit første tabelværk om logaritmerne i 1614. Det var ikke de logaritmer, vi kender i dag. Napiers logaritmer $\log_N$ opfyldte en lidt anden regel, nemlig *forholdsreglen*:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} \Rightarrow \log_N(x_1) - \log_N(x_2) = \log_N(x_3) - \log_N(x_4)\ .$$

Navnet *logaritme* er også græsk og betyder netop *forholdstal*. I første omgang kaldte Napier i øvrigt disse nye tal for *kunstige tal*, men senere kom de til at hedde *logaritmer*.

Øvelse 6

Vis ved hjælp af ligningen $\frac{a \cdot b}{b} = \frac{a}{1}$ følgende formel for Napiers logaritme:

$$\log_N(a \cdot b) = \log_N(a) + \log_N(b) - \log_N(1)$$

Da den engelske matematiker og astronom Henry Briggs (1556-1630) ser Napiers første tabelværk i 1614 bliver han begejstret for de nye muligheder. Briggs ser den enkle forbedring af Napiers logaritme, der kunne opnås ved at konstruere logaritmerne, således at det sidste led i ligningen ovenfor bliver 0. Han besøger Napier i 1615, og de bliver enige om at gennemføre ændringen. Men Napier dør kort efter, så Briggs gør selv arbejdet færdig, og i 1628 udkommer de første tabeller over det, som vi i dag kalder titalslogaritmen og betegner log.

Øvelse 7

På **bogens website** ligger et særskilt projekt om en praktisk implementering af Napiers logaritmer gennem opfindelsen af en forløber fr den moderne regnestok, **projekt 8.2, *Napiers stave***

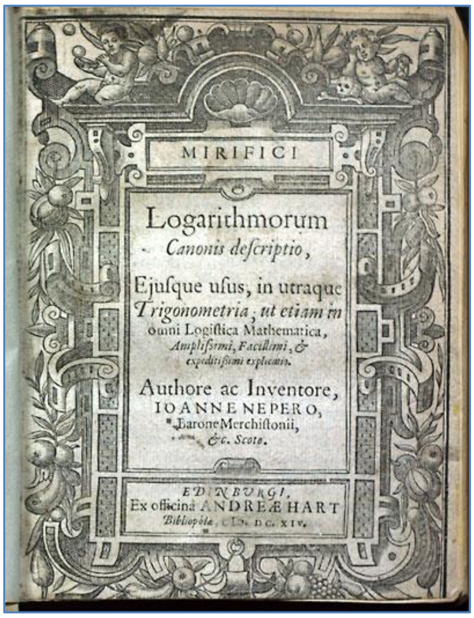
Henry Briggs logaritmer

Den engelske matematiker og astronom Henry Briggs (1556-1630), som var professor på Gresham College i London, var en stor beundrer af Napier, og det fortælles om ham, at:
"When Merchiston first published his Logarithms Mr. Briggs, then reader of the astronomy lectures at Gresham College in London, was so surprised with admiration of them that he could have no quietness in himself until he had seen that noble person whose only invention they were."
(kommentar: John Napier var lord of Merchiston, og blev I samtiden ofte blot kaldt for *Merchiston*)

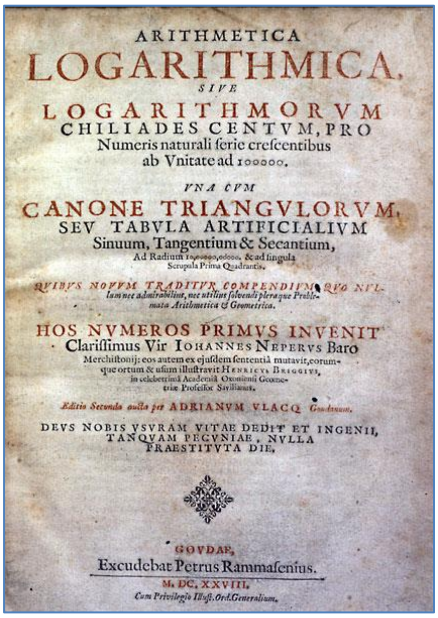
Briggs lavede en aftale med Napier om, at aflægge ham et besøg på en bestemt dato i 1615, og ifølge anekdoten, skulle Briggs have sagt:
"My Lord, I have undertaken this long journey purposely to see your person, and to know by what engine of wit or ingenuity you came first to think of this most excellent help unto astronomy; but, my Lord, being by you found out, I wonder nobody else found it out before, when now being known it appears so easy."
(citeret efter James Roy Newman, A history of Mathematics).

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.
EDINBVRGI, Ex officina ANDREÆ HART Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

John Napiers Mirifici logarithmorum cannonis descriptio, 1614.


ARITHMETICA
LOGARITHMICA,
SIVE
LOGARITHMORVM CHILIADES CENTVM, PRO Numeris naturali serie crescentibus ab Vnitate ad 100000.
VNA CVM
CANONE TRIANGVLORVM, SEV TABVLA ARTIFICIALIVM Sinuum, Tangentium & Secantium, Ad Radium 10,00000,0000. & ad singula Scrupula Prima Quadrantis.
QVIBVS NOVVM TRADITVR COMPENDIVM, QVO NVLlum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraque Problemata Arithmetica & Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT Clarissimus Vir IOHANNES NEPERVS Baro Merchistonij: eos autem ex ejusdem sententia mutavit, eorumque ortum & usum illustravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxoniensi Geometriae Professor Savilianus.
Editio Secunda aucta per ADRIANVM VLACQ Goudanum.
DEVS NOBIS VSVRAM VITAE DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIAE, NVLLA PRAESTITVTA DIE.
GOVDAE,
Excudebat Petrus Rammasenius.
M. DC. XXVIII.
Cum Privilegio Illust. Ord. Generalium.

Briggs's Arithmetica Logarithmica i Valcq, 1628.

Napier og Briggs må have befundet sig godt i hinandens selskab, fordi Briggs blev en hel måned på Merchiston, og han skulle have besøgt Napier i sommeren 1617, men da var Napier i mellemtiden afgået ved døden.

Briggs fik den idé (som i øvrigt fik Napiers velsignelse), at definere
$\log(10)=1$ og $\log(1)=0$.

Således bliver (*) til
$$\log_N(x_1\cdot x_2)=\log_N(x_1)+\log_N(x_2)-0$$
$$\log_N(x_1\cdot x_2)=\log_N(x_1)+\log_N(x_2),$$
som svarer til den måde vi regner med logaritmer i dag.

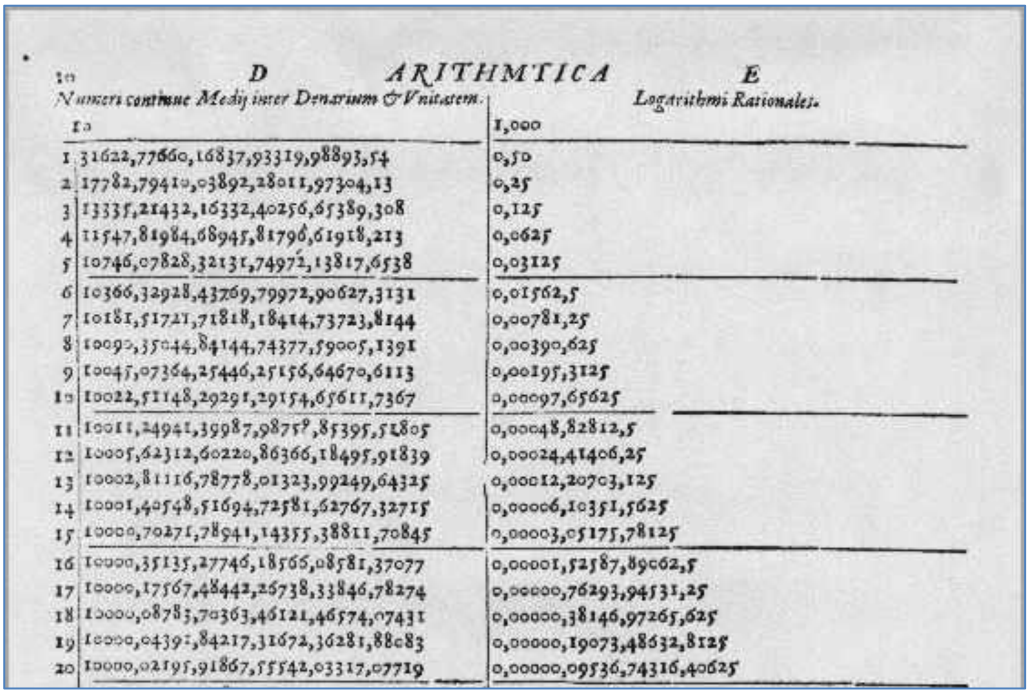
Briggs udnyttede ovenstående i beregninger til en tabel, der udkom i 1624, og som indeholdt logaritmer beregnet ved hjælp af roduddragning. Briggs foretog roduddragning mere end 50 gange, og han regnede med 36 decimaler! Han fik så en grundtabel som vist nedenfor, som han på snedig vis brugte til at udregne logaritmer til andre tal end dem i tabellen.

Øvelse 8

Briggs begyndte med $\log(10)=1$, hvoraf han fandt, at $\log(\sqrt{10})=0{,}5$.

a. Benyt reglen $\log_N(x_1\cdot x_2)=\log_N(x_1)+\log_N(x_2)$ til at vise dette, idet du udnytter, at $10=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}$
b. Fortsæt beregningerne, og vis, at der netop er tale om en halvering af resultatet af logaritmen, når 2. rod, 4. rod, 8 rod osv., som det fremgår af mønsteret i Briggs tabel nendenfor.

ISBN 9788770668279



10 D ARITHMETICA E

Numeri continue Medij inter Denarium & Vnitatem.		Logarithmi Rationales.
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98759,85395,52805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18565,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04392,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125
20	10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000,09536,74316,40625

Uddrag af Henry Briggs logaritmetabel i Arithmetica Logarithmica, som den hollandske matematiker Adrian Vlacq udgav i 1628, hvor han udfyldte hullerne i Briggs tabel, men samtidigt ydmygt betegnede sit arbejde som 2. udgave af Briggs tabeller.

3. Tabelfabrikken og princippet i interpolation

Da man under den franske revolution beslutter at indføre titalssystemet overalt bliver der som omtalt ovenfor brug for nye trigonometriske tabeller. Når man alligevel skal i gang, besluttes så yderligere at lave helt nye og langt mere nøjagtige logaritmetabeller fra bunden. Det er et kæmpearbejde, som man pålægger matematikeren de Prony (1755 – 1839) til dennes store utilfredshed. Det tog 20 år af Napiers liv, og nu vil man have tabeller med omkring 20 decimaler! Der skal beregnes op mod en halv million værdier. Hvordan skal han dog organisere det?

Men så får han nærmest en åbenbaring gennem læsning af Adam Smiths epokegørende værk om *Nationernes Velstand*. Det er i dette værk, man finder den første gennemgribende argumentation for betydningen af *arbejdsdeling*. Prony har senere fortalt om denne inspiration:

> *"I came across the chapter where the author treats of the division of work; citing, as an example of the great advantages of this method, the manufacture of pins. I conceived all of a sudden the idea of applying the same method to the immense work with which I had been burdened, and to manufacture logarithms as one manufactures pins. I have reason to believe that I had already been prepared for this conception by certain parts of mathematical analysis, on which I was then lecturing at the Ecole Polytechnique."*

Du kan hente et større uddrag af *Nationernes Velstand*, indeholdende det, som Prony omtaler, **her.**

En Engelsk tyvepundsseddel, der viser Adam Smith og hans berømte nålefabrik, der illustrerer betydningen af arbejdsdeling:

ISBN 9788770668279

Prony oprettede derfor en tabelfabrik med tre niveauer af arbejdere. Det øverste niveau, teoretikerne, bestod af nogle få professionelle matematikere som han selv. De besluttede hvilke formler, der skulle anvendes, hvilke særlige værdier i tabellerne, der skulle beregnes helt fra bunden, og hvor mange decimaler, der skulle arbejdes med.

Det mellemste niveau, bestod af et hold matematikere, der kunne forestå udregningen af disse særlige værdier. Der var et par tusinde af disse værdier. Beregnerne skulle have en solid uddannelse, som fx ingeniører for at kunne gennemføre disse avancerede beregninger.

Det laveste niveau, assistenterne, bestod endeligt af et stort hold arbejdere, fra 60 til 80 i alt, der var ansvarlige for at udfylde resten af tabelværdierne ved brug af såkaldte interpolationsmetoder, der i realiteten kun krævede kendskab til addition og subtraktion af hele tal. På dette niveau var udregningerne helt mekaniske, og det var på ingen måde afgørende, om man forstod ideen bag *interpolationsmetoden*. Hvem som helst kunne derfor i princippet udføre interpolationen.

Prony får den ide at bruge arbejdsløse frisører til arbejdet! Før revolutionen havde det franske aristokrati været storforbrugere af speciallister i håropsætning for at kunne sætte de yderst kunstfærdige frisurer, som var på mode blandt adelen. Revolutionen havde derfor kastet et stort antal parykmagere, frisører osv. ud i arbejdsløshed. Prony tilbød dem at blive omskolet til at kunne lægge tal sammen og trække tal fra hinanden og arbejde i tabelfabrikken.

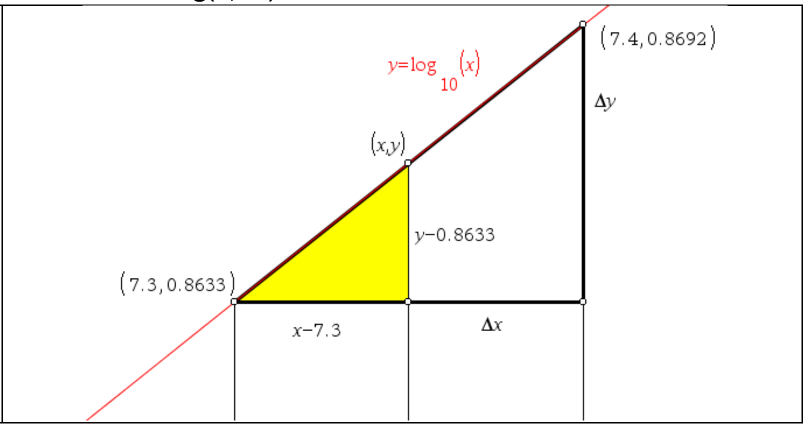

Ung kvinde med sin frisør. Stik af Dupin (1778)

Øvelse 9. Hvad er interpolation?

Interpolation betyder, at man ud fra kendte værdier i en tabel beregner værdier, man ikke havde i forvejen. Antag vi har bestemt logaritmerne til tal med én decimal, så vi kender tallene log(7,1), log(7,2), log(7,3) og log(7,4) i tabellen. Hvordan beregnes nu logaritmerne til tallene imellem disse?

Den simpleste metode er at trække en linje mellem to kendte punkter på grafen, fx punkterne (7.3,log(7.3)) og (7.4,log(7.4)), som vi ved, er lig med (7.3 , 08633) og (7.4 , 0.8692) og anvende denne linje til at beregne den nye logaritmeværdi - i dette tilfælde log(7,35).

x	log(x)
7.1	0.8513
7.15	
7.2	0.8573
7.25	
7.3	0.8633
7.35	
7.4	0.8692



Vi regner med 4 decimaler.

a) Hvilken metode vil du anvende til at bestemme værdien i 7,35?

b) Bestem nu ved lineær interpolation y-værdien hørende til x = 7,35 og sammenlign med log(7,35) ved at slå denne op på værktøjet.

c) Find her efter på samme måde tilnærmede værdier for logaritmen til 7,15 og 7,25.

4. Pronys tabeller

På siden: http://locomat.loria.fr/cadastre/cadastre.html
kan man finde links til Pronys tabeller samt en oversigt over, hvilke personer der deltog i arbejdet.

I tabeloversigten skal man scrolle ned til årene 1793-96, her finder man ind til Pronys tabeller.

Uddrag af Pronys logaritmetabeller, der først blev trykt i 1891 i en noget reduceret udgave:

de 0ᶜ00' à 0ᶜ25'　　　　**Log Sin.**

0ᶜ	00"	10"	20"	30"	40"	50"	60"	70"	80"	90"		
00'	−∞	$\bar{5}$·19611988.	$\bar{5}$·49714987	$\bar{5}$·67324113	$\bar{5}$·79817987.	$\bar{5}$·89508988	$\bar{5}$·97427113.	$\bar{4}$·04121792.	$\bar{4}$·09920986	$\bar{4}$·15036239	$\bar{4}$·19611988.	99'
01	$\bar{4}$·19611988.	$\bar{4}$·23751256	$\bar{4}$·27530112	$\bar{4}$·31006323.	$\bar{4}$·34224791.	$\bar{4}$·37221113	$\bar{4}$·40023986.	42656879	45139238.	47487347	49714987.	98
02	49714987.	51833916	53854255.	55784770	57633111.	59405987	61109321	62748363.	64327789	65851786	67324112	97
03	67324112.	68748155	70126984.	71463380.	72759877	74018790.	75242235	76432158.	77590345.	78718446	79817984.	96
04	$\bar{4}$·79817984.	$\bar{4}$·80890370	$\bar{4}$·81936914.	$\bar{4}$·82958830.	$\bar{4}$·83957252.	$\bar{4}$·84933235	$\bar{4}$·85887767	$\bar{4}$·86821770.	$\bar{4}$·87736107	$\bar{4}$·88631591	$\bar{4}$·89508984.	95
05	$\bar{4}$·89508984.	$\bar{4}$·90369001.	$\bar{4}$·91212317	$\bar{4}$·92039570.	$\bar{4}$·92851358	$\bar{4}$·93648251	$\bar{4}$·94430785.	$\bar{4}$·95199467	$\bar{4}$·95954781	$\bar{4}$·96697183	$\bar{4}$·97427106	94
06	$\bar{4}$·97427106	$\bar{4}$·98144965.	$\bar{4}$·98851150.	$\bar{4}$·99546036.	$\bar{3}$·00229978.	$\bar{3}$·00903316.	$\bar{3}$·01566373	$\bar{3}$·02219460.	$\bar{3}$·02862871.	$\bar{3}$·03496888	$\bar{3}$·04121783.	93
07	$\bar{3}$·04121783.	$\bar{3}$·04737814.	$\bar{3}$·05345228	$\bar{3}$·05944264	06535150.	07118104.	07693337.	08261050.	08821437	09374686	09920975.	92
08	09920975.	10460478.	10993361.	11519785.	12039904.	12553867	13061820.	13563899	14060241	14550974	15036224	91
09	$\bar{3}$·15036224	$\bar{3}$·15516112	$\bar{3}$·15990755	$\bar{3}$·16460265	$\bar{3}$·16924757	$\bar{3}$·17384332	$\bar{3}$·17839095.	$\bar{3}$·18289144	$\bar{3}$·18734578	$\bar{3}$·19175490	$\bar{3}$·19611970	90
10	$\bar{3}$·19611970.	$\bar{3}$·20044107.	$\bar{3}$·20471986	$\bar{3}$·20895691	$\bar{3}$·21315302	$\bar{3}$·21730898.	$\bar{3}$·22142554	$\bar{3}$·22550345	$\bar{3}$·22954342	$\bar{3}$·23354616	$\bar{3}$·23751235.	89
11	23751235.	24144264.	24533768.	24919809	25302450.	25681748	26057763.	26430549	26800164.	27166659	27530087	88
12	27530087.	27890499.	28247944	28602472.	28954129.	29302961	29649014.	29992331.	30332955	30670929	31006293.	87
13	31006293.	31339087.	31669350.	31997120	32322435	32645332	32965846.	33284011.	33599862	33913433	34224756	86
14	$\bar{3}$·34224756	$\bar{3}$·34533863	$\bar{3}$·34840786	$\bar{3}$·35145555.	$\bar{3}$·35448200.	$\bar{3}$·35748750	$\bar{3}$·36047235	$\bar{3}$·36343683.	$\bar{3}$·36638120	$\bar{3}$·36930575	$\bar{3}$·37221073	85
15	$\bar{3}$·37221073	$\bar{3}$·37509642.	$\bar{3}$·37796305	$\bar{3}$·38081089.	$\bar{3}$·38364017	$\bar{3}$·38645115.	$\bar{3}$·38924404	$\bar{3}$·39201909.	$\bar{3}$·39477652.	$\bar{3}$·39751655	$\bar{3}$·40023940	84
16	40023940	40294529	40563442	40830701.	41096324	41360334.	41622747	41883585	42142865	42400607	42656828	83
17	42656828	42911547.	43164780.	43416545.	43666858	43915738.	44163199	44409258	44653931	44897234	45139180	82
18	45139180	45379787.	45619067	45857037.	46093710.	46329099	46563220	46796086.	47027710.	47258104	47487283	81
19	$\bar{3}$·47487283	$\bar{3}$·47715259	$\bar{3}$·47942045.	$\bar{3}$·48167652	$\bar{3}$·48392093.	$\bar{3}$·48615381.	$\bar{3}$·48837526	$\bar{3}$·49058541	$\bar{3}$·49278437.	$\bar{3}$·49497225	$\bar{3}$·49714916.	80
20	$\bar{3}$·49714916.	$\bar{3}$·49931521	$\bar{3}$·50147052.	$\bar{3}$·50361518.	$\bar{3}$·50574930	$\bar{3}$·50787299.	$\bar{3}$·50998634.	$\bar{3}$·51208946.	$\bar{3}$·51418244.	$\bar{3}$·51626538	$\bar{3}$·51833838	79
21	51833838	52040154.	52245494.	52449867	52653283	52855751	53057279	53257877.	53457552	53656314	53854169	78
22	53854169	54051128.	54247197	54442385	54636700.	54830149	55022740	55214481	55405380.	55595442	55784677	77
23	55784677.	55973090	56160690	56347483.	56533476.	56718675	56903089.	57086722.	57269582	57451676	57633009	76
24	$\bar{3}$·57633009	$\bar{3}$·57813588	$\bar{3}$·57993420.	$\bar{3}$·58172510.	$\bar{3}$·58350864	$\bar{3}$·58528489.	$\bar{3}$·58705390	$\bar{3}$·58881574	$\bar{3}$·59057046.	$\bar{3}$·59231812	$\bar{3}$·59405877	75
		90"	80"	70"	60"	50"	40"	30"	20"	10"	00"	99ᶜ

Log Cos.

Øvelse 10

Når man læser tallene skal man være opmærksom på, at Prony bruger en overstregning til at markere en negativ heltalsdel, dvs. det første egentlige tal i tabellen $\bar{5}\,19611988$ skal derfor læses som $0{,}19611988 - 5 = -\ 4{,}80388012$.

Prony regnede i nygrader, og han opdelte en lige (180⁰) vinkel (dvs. 200 nygrader) i 200000 lige store vinkler, dvs. han arbejdede med vinkler på $\frac{200}{200000} = 0{,}001$ nygrader.

Prøv nu at forklare opbygningen af tabellen ved at kontrollere udregningen af nogle af tallene i tabellen og udfylde en tabel, som nedenstående.

Fx får vi $\log(\sin(0.001)) = -\ 4.80388012$ og $\log(\sin(0.010)) = -\ 3.80388012$:

0ᶜ.	00``	10``	20``
00`	udefn	- 4.80388012	
01`	−3.80388012		
02`			

ISBN 9788770668279

Øvelse 11

Assistenterne har kun regnet med decimaldelen, som de har opfattet som det hele tal 19611988, hvor de i virkeligheden har arbejdet med langt flere cifre, men tabellen er til sidst blevet afrundet.

Den nederste række har de fx udregnet som den følgende liste af hele tal:

57633009	57813588	57993420	58172510	58350864	58528489	58705390	58881574	59057046	59231812	59405877

Vi kan illustrere princippet bag deres interpolation således:
Udnyt dit værktøj til at udregne de tilhørende differenser, dvs. forskellene mellem to på hinanden følgende tal i listen, i en ny liste: dif1. Fortsæt med at beregne de tilhørende differenser til dif1 i en ny liste: dif2, samt de tilhørende differenser til dif2 i en ny liste: dif3.
Disse 3 differenslister illustrerer beregningsbidraget fra det nederste niveau (assistenterne), idet det mellemste niveau (ingeniørerne) havde forsynet dem med talværdierne i den første række (fikspunktet) og den sidste differensliste (som vi har kaldt dif3), hvorefter de møjsommeligt har arbejdet sig baglæns til den første liste, dvs. den liste af tal, der skulle med i den endelige tabel.
Det kan se sådan ud i et værktøjsprogram. I praksis vil den sidste søjle med stor tilnærmelse være konstant.

	A tabel	B dif1	C dif2	D dif3
◆		=δlist(tabe	=δlist(dif1	=δlist(dif2
1	57633009	180579	-747	5
2	57813588	179832	-742	6
3	57993420	179090	-736	7
4	58172510	178354	-729	5
5	58350864	177625	-724	7
6	58528489	176901	-717	5
7	58705390	176184	-712	6
8	58881574	175472	-706	5
9	59057046	174766	-701	
10	59231812	174065		
11	59405877			

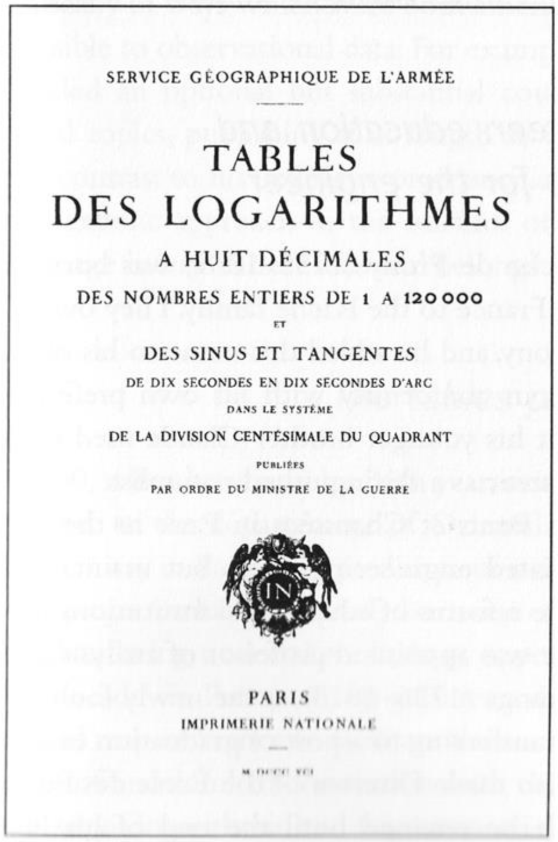
ISBN 9788770668279

Det tog ca. ti år for Pronys tabelfabrik at udarbejde tabellerne. Beregningen blev udført af to uafhængige hold, så man kunne kontrollere de to tabeller mod hinanden for eventuelle regnefejl. De to tabeller bestod begge af 19 bind med 251 folioark i hvert bind, hvor hvert folioark rummede 100 håndskrevne tabelværdier.

Men da man derefter skulle trykke tabellerne gik det galt. De økonomiske omkostninger var skyhøje og den franske økonomi kunne ikke alene klare det ambitiøse projekt.

Forsøget på at gøre det til et internationalt projekt strandede også - englænderne ville ikke gå over til titalssystemet generelt. Også i Frankrig havde man forladt ideen om at indføre titalssystemet i kalenderen og ved gradmålinger.

Tabellerne blev først trykt i 1891 og i en noget reduceret udgave. Men ideen om nygrader havde slået rod nogen steder. I dag anvendes de fx ved landmåling.



SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE

TABLES
DES LOGARITHMES
A HUIT DÉCIMALES
DES NOMBRES ENTIERS DE 1 A 120000
ET
DES SINUS ET TANGENTES
DE DIX SECONDES EN DIX SECONDES D'ARC
DANS LE SYSTÈME
DE LA DIVISION CENTÉSIMALE DU QUADRANT
PUBLIÉES
PAR ORDRE DU MINISTRE DE LA GUERRE

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

M DCCC XCI

Øvelse 12

Ovenfor ses forsiden af Pronys logaritmetabeller. Hvad fortæller teksten om tabellernes opbygning?

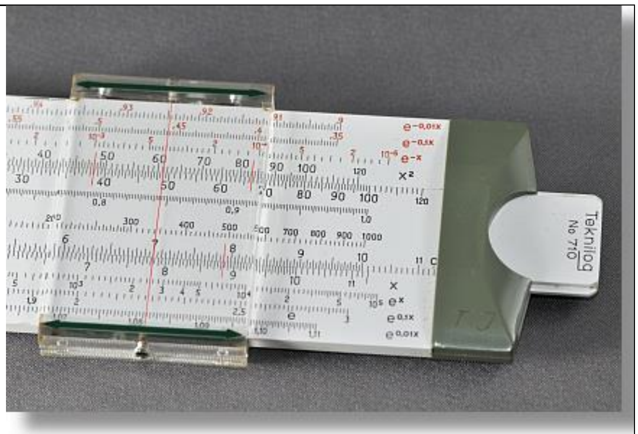
ISBN 9788770668279

5. Afrunding – Logaritmers anvendelse i praksis

Logaritmetabellerne udfyldte et stort behov og tabellerne spredtes hurtigt selv om det er under 30-års-krigen. Allerede i årtiet efter findes der kopier af tabellerne i de fjerneste egne af Europa. Logaritmernes indtog er en ren sejrsmarch – med et slag er det blevet muligt hurtigt at foretage store og komplekse beregninger. Og eftersom det hele var trabellagt, var det et håndværk, der var til at lære også på skoleniveau.

Brugen af logaritmetabeller var en fast del af undervisningen i realskoler og på gymnasier frem til lommeregnernes indtog. Men i skolerne og til praktiske beregninger kunne man godt klare sig med et mere beskedent antal decimaler.

Kort før lommeregnerens indtog fik danske gymnasieelever udleveret regnestokke som denne, hvor logaritmiske skalaer var indgraveret, så man ikke behøvede tabeller. Alle beregninger kunne udføres med regnestok. Princippet heri var allerede set af John Napier og er behandlet i projekt 8.2 om Napiers Bones.



Øvelse 13 Kildekritisk metode
Ethvert land er stolt af sine store personer i kultur og videnskab. Men det må jo ikke sætte en mur op for den kildekritiske metode. I 1915 udkom Napier Tercentenary memorial Volume, hvori der er gengivet en tale, som Lord Moulton holdt I anledningen af 300 året for logaritmernes opfindelse, og han siger bl.a.

> *"There is one aspect in which it has occurred to me that I may perhaps find something to contribute, even though it be but the widow´s mite. The invention of logarithms came on the world as a bolt from the blue. No previous work had led up to it, nothing had foreshadowed it or heralded its arrival. It stands isolated, breaking in upon human thought abruptly without borrowing from the work of other intellects or following known lines of mathematical thought."*

Diskuter indholdet i dette citat i lyset af det materiale, du har været igennem.

Litteratur

Der findes en meget omfattende litteratur om logaritmerne. Undervejs er der henvist til en del. Her nævnes kun yderligere to specielle materialer
På hjemmesiden http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-introduction findes en grundig gennemgang af hele denne historie, herunder af de bidrag i skabelsen og udviklingen af logaritmerne der blev leveret af John Napier fra Skotland, Henry Briggs fra England og Joost Bürgi fra Schweitz.
På adressen: http://www.archive.org/details/moderninstrument00horsuoft findes et stort materiale fra konferencen i anledning af de 300 året: Modern instruments and methods of calculation: A handbook of the Napier Tercentenary Exhibition, E. M. Horsburg, Edinburgh, 1914.
Endvidere kan anbefales Erik Vestergård: *En revolution i regnekunsten*