Projekt 8.5 Linearisering og anvendelsen af logaritmiske koordinatsystemer

(*Dette projekt forudsætter, at man har arbejdet med logaritmefunktionerne, fx i kapitel 3 eller i projekt 8.4, så man er fortrolig med logaritmereglerne*)

Indhold

Logaritmefunktioner kan komprimere enorme og uoverskuelige intervaller af tal, fx tallene fra 1 til 100 milliarder, og ekspandere meget små talområder fx tallene fra 0,00001 til 1, så det samlet bliver små og overskuelige områder. I dette tilfælde henholdsvis intervallet fra 0 til 11, og intervallet fra -5 til 0. Disse intervaller skrives symbolsk således: $[0;11]$ og $[-5;0]$.

Øvelse 1. Log-funktionen kan ekspandere og komprimere intervaller

- Argumenter for påstanden, at logaritmefunktionen transformerer intervallet fra 1 til 100 milliarder til intervallet fra 0 til 11. (*Hint*: tænk på eksponentiel notation).
- Argumenter for påstanden, at logaritmefunktionen transformerer intervallet fra 0,00001 til 1 til intervallet af tal fra -5 til 0. (vink: tænk på eksponentiel notation).

Denne egenskab udnyttes af en række fag, der håndterer fænomener, hvor de variable har talværdier fra meget små til enorme tal.

Logaritmeregnereglerne giver også mulighed for at transformere eksponentielle modeller og potensmodeller til *lineære udtryk*. Det er eksempler på en mere generel metode, der kaldes *linearisering*, og som går ud på at omforme komplicerede udtryk og grafiske sammenhænge, vi ikke umiddelbart kan overskue, til udtryk, der er mere overskuelige og lettere at genkende. Lineære sammenhænge udmærker sig frem for alle andre variabelsammenhænge ved, at vi med øjet kan identificere disse.

I kapitel 5 om *Potensmodeller* så vi eksempler på en transformation af data over planeters omløbstid om Solen og deres afstand fra Solen, der resulterede i, at der fremkom en lineær sammenhæng. Denne linearisering skete ved at opløfte de to sæt af data i hver sin potens. Vi kunne også have valgt at lave en logaritmisk transformation af de to datasæt, og så se, hvordan det grafiske billede er af de transformerede data. Denne teknik vil vi nu demonstrere generelt i de to tilfælde: Eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge.

ISBN 9788770668279

1. Linearisering af eksponentielle sammenhænge.

Vi har givet en eksponentiel udvikling: $y = b \cdot a^x$, som vi omskriver ved hjælp af log:

	$\log(y) = \log(b \cdot a^x)$,	Anvend log på begge sider
	$\log(y) = \log(b) + \log(a^x)$	Udnyt logaritmeregel 1
	$\log(y) = \log(b) + x \cdot \log(a)$	Udnyt logaritmeregel 3
(I)	$\log(y) = \log(a) \cdot x + \log(b)$	Roker rundt

Nu omdøbes de variable således:

$\log(y)$ betegnes Y , $\log(b)$ betegnes B , $\log(a)$ betegnes A ,

og med de nye betegnelser bliver (I) til:

$$Y = A \cdot x + B .$$

Dette genkender vi som en lineær sammenhæng mellem *Y* og *x*. Konklusionen sammenfattes i følgende

Sætning 1 Logaritmisk transformation af eksponentielle sammenhænge
En eksponentiel sammenhæng mellem de variable x og y svarer til en lineær sammenhæng mellem den variable *x* og den transformerede variabel $Y = \log(y)$.
Dette betyder, at grafen for en eksponentiel sammenhæng bliver til en ret linje, hvis vi tegner den i et *enkelt-logaritmisk koordinatsystem*, hvor 2. aksen er en logaritmisk skala

Bemærkning: Når et tal *y* afsættes på en logaritmisk skala, betyder det, at afstanden fra *y* ned til 1. aksen er lig med $\log(y)$, målt i en passende enhed.

Øvelse 2. Eksponentiel model for insektpopulations udvikling
Tabellen viser udviklingen i antallet af insekter i populationen i en periode på 60 døgn.

Antal døgn (x)	0	10	20	30	40	50	60
Antal insekter (y)	3012	5925	11656	22928	45103	88725	174535

I en model antager vi, at antallet af insekter i populationen som funktion af tiden kan beskrives ved en eksponentiel udvikling

$$y = b \cdot a^x ,$$

hvor y er antallet af insekter til tiden x målt i døgn.

a) Bestem *a* og *b* ved eksponentiel regression.

b) Tilføj en række til tabellen, hvori $\log(y)$ udregnes.

c) Udfør nu en lineær regression på de sammenhørende værdier af x og $\log(y)$, og undersøg om lineariseringen af denne eksponentielle udvikling stemmer overens med teorien ovenfor.

ISBN 9788770668279

2. Linearisering af potenssammenhænge.

Vi har givet en potensudvikling: $y = b \cdot x^a$, som vi omskriver ved hjælp af log:

	$\log(y) = \log(b \cdot x^a)$	Anvend log på begge sider
	$\log(y) = \log(b) + \log(x^a)$	Udnyt logaritmeregel 1
	$\log(y) = \log(b) + a \cdot \log(x)$	Udnytter logaritmeregel 3
(II)	$\log(y) = a \cdot \log(x) + \log(b)$	Roker rundt

Nu omdøbes de variable således:

$\log(y)$ betegnes Y, $\log(b)$ betegnes B, $\log(x)$ betegnes X,

og med de nye betegnelser bliver (II) til:

$$Y = a \cdot X + B.$$

Dette genkender vi som en lineær sammenhæng mellem *Y* og *X*. Konklusionen sammenfattes i følgende

Sætning 2 Logaritmisk transformation af potenssammenhænge
En potens sammenhæng mellem de variable x og y svarer til en lineær sammenhæng mellem den transformerede variabel $X = \log(x)$ og den transformerede variabel $Y = \log(y)$.
Dette betyder, at grafen for en potens sammenhæng bliver til en ret linje, hvis vi tegner den i et *dobbelt-logaritmisk koordinatsystem*, hvor både 1. og 2. aksen er logaritmiske skalaer.

Bemærkning: Når et tal *x* afsættes på en logaritmisk skala, betyder det, at afstanden fra x ind til 2. aksen er lig med $\log(x)$, målt i en passende enhed.

Øvelse 3. Potenssammenhængen mellem planeternes afstand til solen og deres hastighed

Tabellen viser nogle planeters afstand til og gennemsnitshastighed i deres bane omkring solen. Afstanden til solen er angivet i AE (astronomisk enhed).

Planet	Merkur	Venus	Jorden	Mars	Jupiter	Saturn
Afstand (AE)	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,555
Gennemsnitshastighed (km/s)	47,89	35,03	29,73	24,13	13,06	9,64

I en model antager vi, at gennemsnitshastigheden (målt i km/s) som funktion af afstanden (målt i AE) kan beskrives ved en potensudvikling

$$y = b \times x^a,$$

hvor y er gennemsnitshastigheden (målt i km/s), og x er afstanden (målt i AE).

a) Bestem *a* og *b* ved potensregression.

b) Tilføj to rækker til tabellen, hvori logaritmen til x-værdierne hhv. $\log(y)$ udregnes.

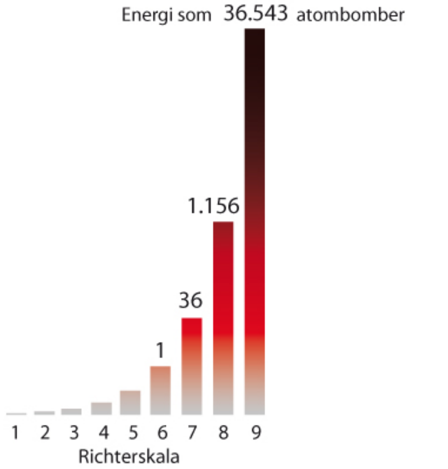
c) Udfør nu en lineær regression på de sammenhørende værdier af logaritmen til x-værdierne og $\log(y)$, og undersøg om lineariseringen af denne potensudvikling stemmer overens med teorien ovenfor.

Vi vil nu præsentere tre spektakulære anvendelser af linearisering og logaritmiske koordinatsystemer: Richterskalaen for jordskælv, pH skalaen for syre og basers styrke, og decibelskalaen der måler lydstyrke

ISBN 9788770668279

3.1 Richter-skalaen – et mål for hvor kraftige jordskælv er

Et jordskælvs styrke bliver altid angivet med et tal fra Richterskalaen. Denne skala blev udviklet i 1935 af Charles F. Richter og andre amerikanske geologer til at sammenligne styrken af forskellige jordskælv. Den grundlæggende ide var at omregne udsvinget på en seismograf til, hvad dette udsving ville være, hvis seismografen befandt sig 100 km fra jordskælvets epicenter. Herefter blev det maksimale udsving i denne bestemte afstand ved hjælp af en logaritmisk formel omregnet til et tal, der netop er det tal, vi siden har kaldt Richtertallet.
Skalaen af Richtertal var konstrueret således, at jordskælv af styrke 7 på Richterskalaen giver 10 gange så store udsving, som jordskælv af styrke 6. Og den energi der udløses af jordskælv, når vi går et trin op på Richterskalaen vokser endnu mere dramatisk.
Ved et jordskælv af styrke 7,0 udløses en energi ved overfladen, der er ca. 30 gange større end ved jordskælv af styrke 6,0.



Energien er angivet med enheden Hiroshimabomber(!) og vi ser en stejlt stigende kurve. Prøv, at lave en tabel, hvor logaritmen til tallene udregnes. Hvad ser vi?

Den danske geolog Inge Lehman (1888 – 1993) var en af pionererne i arbejdet med at forstå, hvordan bølgerne fra jordskælv udbredes gennem Jorden. I sine studier i 1930'erne, hvor hun sammenlignede og bearbejdede data fra mange hundrede jordskælv – det var i tiden før computere – indså hun, at en række af måleresultaterne ikke kunne forklares inden for den hidtidige opfattelse af Jordens opbygning. De mange data kunne ikke bortforklares, så teorien om Jordens opbygning måtte laves om. I en artikel fra 1936 med den korte titel: P` fremlagde hun som den første en ny og siden anerkendt teori om, at Jordens kerne består af to dele, en indre fast og en ydre flydende del. Inge Lehman blev 104 år og skrev sin sidste videnskabelige artikel som 99-årig.

ISBN 9788770668279

3.2 pH-skalaen – et mål for hvor stærke syrer og baser er

I kemi anvendes en logaritmisk skala, der kaldes pH-skalaen, til at angive om en bestemt opløsning er sur (som vi kender fra citrusfrugter eller fra mavesyre, hvis man har prøvet at kaste op), eller om den er basisk (som man kender fra sæbe og stærke rengøringsmidler som ammoniak).

Rent teknisk finder man pH værdien som: $\mathrm{pH} = -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right)$, hvor $\left[H_3O^+\right]$ er koncentrationen af H_3O^+-ioner.

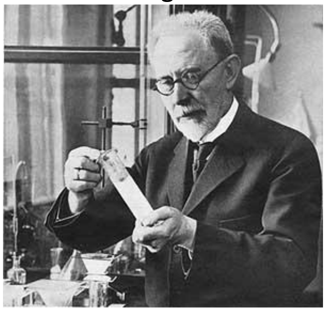
For almindeligt rent vand er koncentrationen $\left[H_3O^+\right] = 10^{-7}$, så derfor er:

$$\mathrm{pH}(\text{vand}) = -\log\left(\left[H_3O^+\right]\right) = -\log\left(10^{-7}\right) = -(-7) = 7$$

7 er således det neutrale sted på pH-skalaen. Ionkoncentrationerne for forskellige opløsninger svinger fra forsvindende små tal som fx ved ammoniakopløsninger, hvor den er mindre end 10^{-13} til saltsyre, hvor den er den er mellem 0,1 og 1. Logaritmefunktionen komprimerer intervallet så det bliver overskueligt.

- pH-tal over 7 svarer til basiske opløsninger.
- pH-tal under 7 svarer til syreagtige opløsninger.
- pH for almindelig kaffe er 5,0, for øl er det 4,5 og for cola 2,5.

Via **bogens website** er der adgang til et projektmateriale om ph, gerne i et samarbejde mellem matematik og kemi i studieretningen.



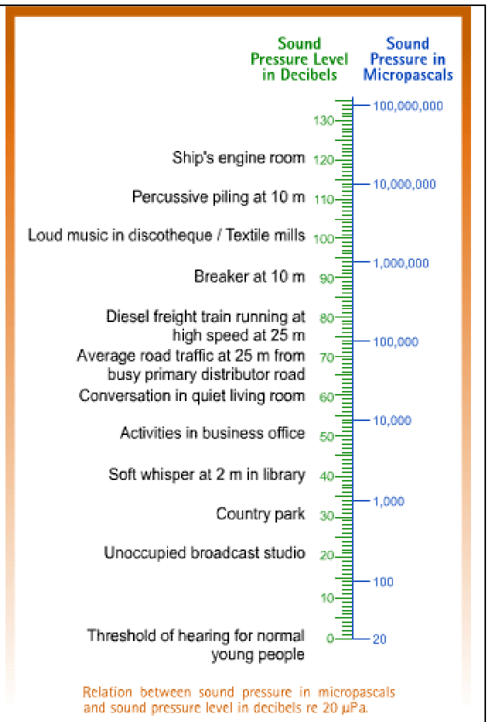
pH-skalaen blev udviklet af de danske kemikere S.P.L. Sørensen og Johannes Brøndsted, mens de arbejdede som forskere på Carlsberg. Den omtales første gang i en artikel af S.P.L. Sørensen fra 1909.

3.3 Decibel-skalaen – et mål for lydstyrke

Lyd forplanter sig gennem luften fra en lydkilde til vores ører via svingninger. En højtalers membran sætter luften i svingninger, og når disse rammer vores trommehinder, sættes disse i tilsvarende svingninger, så vi kan opfatte musikken, som den blev spillet. Står man tæt ved højtalerne under en rockkoncert, kan man rent fysisk mærke disse svingninger i luftens molekyler som et pulserende lydtryk på kroppen. Lydtrykket kan måles, og det interval vores ører kan opfatte er enormt – fra de svageste lyde til et lydtryk, der er mere end 10^{10} gange så stort.

Lydtrykket måles normalt i en enhed, der kaldes decibel, hvor det faktiske lydtryk, vi kan opfatte, er logaritmisk transformeret til en skala fra 0 til ca. 150 (men i virkeligheden uden en øvre grænse).

De laveste værdier, unge mennesker kan opfatte, har et lydtryk på 20 mikro-pascal. Det er lyden af et blad, der glider hen over nogle fliser. På decibelskalaen sættes dette til 0.
20 dB svarer til en hvisken, 80 dB svarer til en trafikeret gade, 110 til en rockkoncert.



Hver gang vi går 20 DB frem på dB-skalaen, så stiger lydtrykket med en faktor 10.
Via **bogens website** kan man finde yderligere materiale om støj, lyd og decibel