ISBN 9788770668279

Projekt 8.1 Andengradspolynomier og andengradsligningen

(*Dette projekt er hentet fra kapitel 2 i B-bogen. Det rummer således en mulighed for at gøre arbejdet med andengradspolynomier færdig på dette trin*)

Indhold

Andengradspolynomier er en ny type funktioner, som bygger videre på *førstegradspolynomier*, der har forskriften $f(x) = a \cdot x + b$. Førstegradspolynomier kender vi fra C-bogen, hvor de blev kaldt for *lineære funktioner*.

Øvelse 1:

a) Førstegradspolynomiets består af to led et *konstant led* og et *førstegradsled*. Angiv disse.

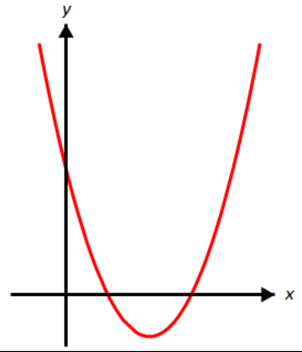
Vi siger, at førstegradspolynomiet indeholder to parametre (tal). Disse kaldes også førstegradspolynomiets *koefficienter*.

b) Angiv disse, og forklar betydningen af disse parametre i relation til førstegradspolynomiets graf.

c) Giv et bud på, hvad man forstå ved et nulte-gradspolynomium. Overvej fx, hvordan grafen for en sådan funktion ser ud.

Andengradspolynomiet opstår ud fra førstegradspolynomiet ved, at vi tilføjer et *andengradsled* til de to eksisterende led i forskriften. Et andengradsled er et led, hvor x opløftes til anden potens.

Definition: Andengradspolynomium
Et andengradspolynomium er en funktion med forskriften
$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad a \neq 0$
Parametrene *a*, *b* og *c* kaldes andengradspolynomiets koefficienter.
Den ovenstående forskrift kaldes standardformen for andengradspolynomiet.
Grafen for et andengradspolynomium kaldes en parabel.



ISBN 9788770668279

Øvelse 2:
Angiv koefficienterne *a*, *b* og *c* i de følgende andengradspolynomier:

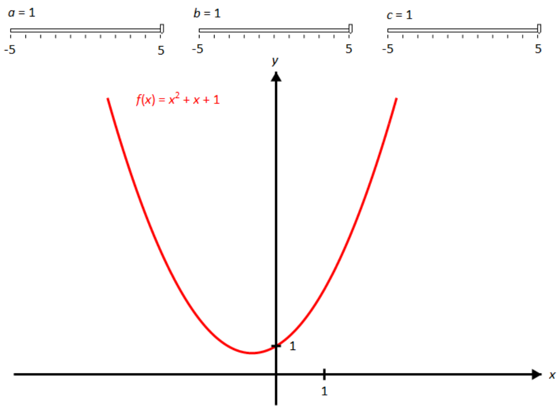
a) $p(x)=2x^2-7x+25$ b) $p(x)=0{,}25x^2+2x-3{,}5$ c) $p(x)=-4x^2+2x+1$

d) $p(x)=-x^2$ e) $p(x)=x^2-4$ f) $p(x)=3x^2-9x$

1 Betydningen af koefficienterne *a*, *b* og *c*

I forskriften for andengradspolynomiet indgår som nævnt de tre koefficienter *a*, *b* og *c*. De har hver for sig en karakteristisk betydning for parablens form og beliggenhed i koordinatsystemet.

Øvelse 3: **Betydningen af a, b og c**
Vi vil nu undersøge betydningen af andengradspolynomiets koefficienter ved hjælp af skydere i et værktøjsprogram, ligesom vi gjorde med koefficienterne *a* og *b* i den lineære funktion i C-bogen.



a) Tegn en graf for andengradspolynomiet $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ med en skyder for hver af parametrene *a*, *b* og *c*. Brug fx *x*-intervallet fra -5 til 5 og *y*-intervallet fra -10 til 10. Sæt som udgangspunkt alle skyderne på værdien 1, og husk: *Variabelkontrol*, dvs. sæt undervejs de ”inaktive” skydere på 1.

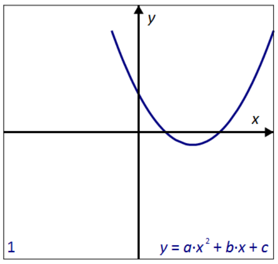
b) Tilføj grafen for den konstante funktion $f(x)=c$, svarende til den konstante del af andengradspolynomiet. Hvad sker der med graferne for *f* og *p*, når vi varierer på parameteren *c*? Hvilken betydning har parameteren *c* for parablens beliggenhed? Hvad sker der med parablen, hvis *c* har værdien 0? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for *c*?

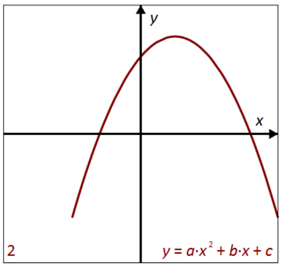
c) Tilføj grafen for den lineære funktion $g(x)=b\cdot x+c$, svarende til den lineære del af andengradspolynomiet. Hvad sker der med graferne for *g* og *p*, når vi varierer på parameteren *b*? Hvilken betydning har parameteren *b* for parablens beliggenhed? Hvad sker der med parablen, hvis *b* har værdien 0? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for *b*?

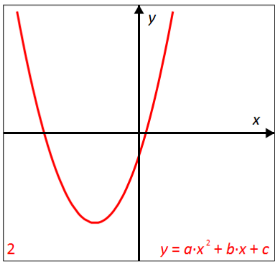
d) Tilføj grafen for andengradspolynomiet $h(x)=a\cdot x^2$, svarende til andengradsleddet i andengradspolynomiet. Skjul evt. de foregående hjælpefunktioner *f* og *g*.
Hvad sker der med graferne for *h* og *p*, når vi varierer på parameteren *a*? Hvilken betydning har parameteren *a*? Hvad sker der med parablen, hvis *a* får den forbudte værdi 0? Hvordan kan vi aflæse fortegnet for *a*?

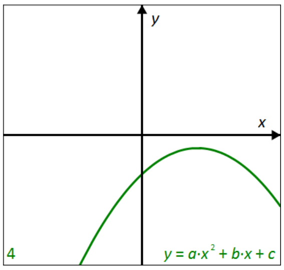
ISBN 9788770668279

Øvelse 4:
Nedenfor ses fire parabler. Aflæs fortegnene for koefficienterne *a*, *b* og *c* for det tilhørende andengradspolynomium.





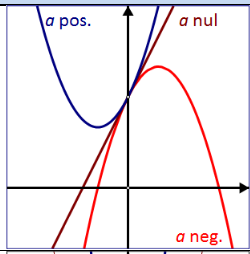
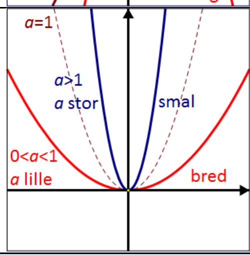
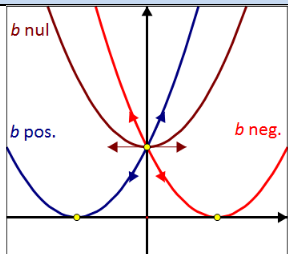




Øvelse 5:
Skitser grafen for en parabel der opfylder betingelserne:

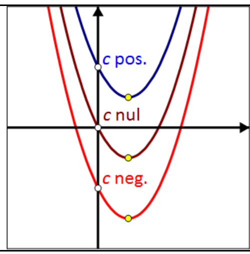
a) $a>0$, $b>0$ og $c>0$ b) $a<0$, $b<0$ og $c>0$. c) $a>0$, $b>0$ og $c<0$.

Vi har i det foregående eksperimenteret med parablers form og beliggenhed og også udledt en lang række karakteristiske egenskaber for parablen udtrykt ved dens koefficienter *a*, *b* og *c*. Vi opsamler nu de vigtigste af disse egenskaber, som vi alt i alt har fundet frem til:

<table>
<tr><td colspan="2">Sætning 1: Betydningen af koefficienterne a, b og c i et andengradspolynomium
$p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Betydningen af a:</td></tr>
<tr><td>Fortegnet for a:
Hvis a er negativ, vender parabelgrenene nedad (parablen er sur)
Hvis a er nul, er der ikke tale om et andengradspolynomium. Grafen udarter da til en ret linje.
Hvis a er positiv, vender parabelgrenene opad (parablen er glad)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Størrelsen af a:
Hvis a ligger tæt på 0, er krumningen lille og parablen derfor meget flad.
Hvis a ligger langt fra 0, er krumningen stor og parablen derfor meget smal</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Betydningen af b:</td></tr>
<tr><td>Koefficienten b angiver parablens hældning omkring skæringspunktet med y-aksen. Sammen med koefficienten a kontrollerer b også placeringen af symmetriaksen for parablen, der er givet ved $x=-\frac{b}{2a}$.
Fortegnet for b:
Hvis b er negativ, er andengradspolynomiet aftagende omkring skæringspunktet med y-aksen.
Hvis b er nul, er hældningen omkring skæringspunktet nul og parablen skærer y-aksen i sit toppunkt.
Hvis b er positiv, er andengradspolynomiet er voksende omkring skæringspunktet med y-aksen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Betydningen af c:</td></tr>
</table>

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Koefficienten *c* angiver skæringspunktet med *y*-aksen. *Fortegnet for c:* Hvis *c* er negativ, skærer parablen y-aksen under *x*-aksen. Hvis *c* er nul, går parablen gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt (0,0). Hvis *c* er positiv, skærer parablen *y*-aksen over *x*-aksen.	

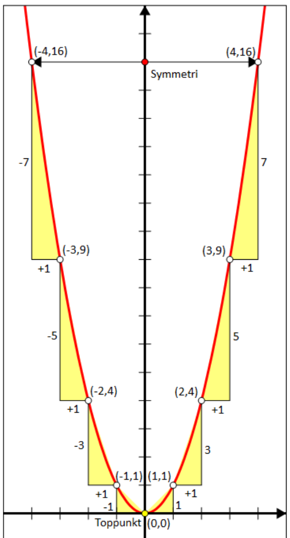
Øvelse 6:
Hvor ligger parablens toppunkt i forhold til *y*-aksen, hvis *a* og *b* har samme fortegn? Hvor ligger det, hvis *a* og *b* har modsat fortegn?

2. Parablens symmetri og toppunkt

Vi vil nu undersøge parablens form nærmere. Vi vil starte med det simpleste andengradspolynomium $p(x)=x^2$, den såkaldte *prototype* med *enhedsparablen* som graf. Derfra vil så arbejde os frem mod at vise, at alle graferne for vilkårlige andengradspolynomier har samme form som prototypen. Hvis vi kan forstå prototypen, kan vi altså forstå dem alle!.

Prototypen for andengradspolynomiet $p_1(x)=x^2$

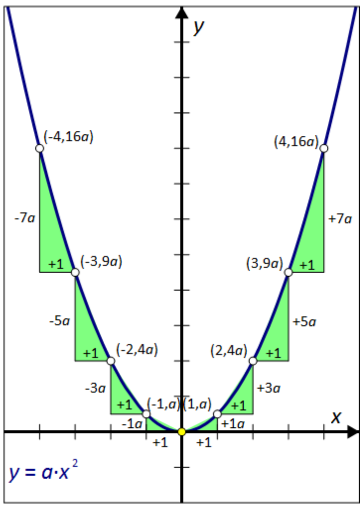
Enhedsparablen er særlig simpel.
Den er tydeligvis symmetrisk omkring *y*-aksen, fordi kvadratet på tallene *x* og $-x$ er det samme.
Den har toppunkt i $(0,0)$, som er et globalt minimum for funktionen, fordi alle kvadrattal er positive eller i det mindste 0, og derfor er alle *y*-værdierne større end eller lig med 0.
Endelig går den gennem punktet $(1,1)$. Når vi går én ud fra toppunktet (hvad enten vi går fremad eller bagud langs *x*-aksen), går vi altså samtidigt én op. Fortsætter vi med at gå én fremad (eller bagud), gennemløber vi på samme måde alle kvadrattallene 4, 9, 16, 25, … . Tilvæksterne svarer netop til de ulige tal 1, 3, 5, 7, … og de voksende stigningstal viser, hvordan parablen bliver mere og mere stejl i takt med, at vi fjerner os fra toppunktet. Faktisk vokser stigningen jævnt; dette vil vi præcisere, når vi går i gang med differentialregningen.



Prototypen $p(x)=x^2$

Andengradspolynomiet $p_a(x)=a\cdot x^2$

Hvis fx *a* har værdien 2, ser vi at alle *y*-værdier bliver dobbelt så store. Det viser at grafen er blevet strakt ud med en faktor 2 i lodret retning ud fra *x*-aksen, dvs. alle *y*-værdierne blevet to gange så store. Men derudover er formen uændret, dvs. grafen er stadigvæk symmetrisk omkring *y*-aksen.
Tilsvarende hvis *a* har værdien -3, så har alle *y*-værdierne skiftet fortegn, og de er samtidigt blevet numerisk tre gange så store. Denne gang vender parablen altså grenene nedad, men derud over har den samme form.
Da parablen denne gang går gennem punkterne $(-1,a)$ og $(1,a)$, ser vi, at når vi går én ud fra toppunktet, går vi samtidigt stykket *a* op (eller ned, hvis *a* er negativ).
Konstanten *a* regulerer altså parablens krumning: For små værdier af *a* (tæt på 0) er parablen meget bred og den krummer kun lidt, mens den for store værdier af *a* (langt over 1) er meget slank og krummer voldsomt.



Andengradspolynomiet $p_a(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Vi vil nu prøve at forstå sammenhængen mellem parablen $y = a \cdot x^2$ og $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (samme *a*-værdi!). Vi kan forstå det ud fra en tabel-repræsentation, en graf-repræsentation og en symbolsk repræsentation. Den symbolske repræsentation er den mest generelle, men for at skyde os ind på ideen, kigger vi først på tabel- og graf-repræsentationerne. Når vi tegner graferne for andengradspolynomierne, kan vi tydeligt se slægtsskabet med enhedsparablen: De har et tydeligt toppunkt, der er tydeligvis symmetri, og de ser ud til at krumme på samme måde.

Øvelse 7: Tabel-repræsentation

a) Benyt et værktøjsprogram til at bestemme funktionstabellen for $p(x) = x^2 - 4x + 7$, hvor skridtlængden for *x* er 1.

b) Find toppunktet for parablen i tabellen, og vælg et udsnit af tabellen, fx 7 punkter på hver side af toppunktet (dvs. 15 i alt), så du tydeligt kan se hvordan funktionsværdien vokser, når du bevæger dig væk fra toppunktet.

c) Bestem tilsvarende en funktionstabel for prototypen $p_1(x) = x^2$, og udvælg på samme måde 15 punkter i denne tabel.

d) Sammenlign nu de to funktionstabeller med udgangspunkt i de to toppunkter – opstil fx de to tabeller ved siden af hinanden i et regneark, således at de to toppunkter står i samme række. Hvilken sammenhæng ser du mellem *x*-værdierne i samme række? Lad fx x_1 være en tilfældig *x*-værdi i tabellen for p og x_2 en tilfældig *x*-værdi i tabellen for p_1 og opskriv sammenhængen mellem x_1 og x_2. Beskriv på lignende vis sammenhængen mellem *y*-værdierne i samme række i de to funktionstabeller.

Besvar nu de samme spørgsmål for andengradspolynomierne:
1) $p(x) = x^2 - 5x + 8$, der sammenholdes med $p_1(x) = x^2$
2) $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$, der sammenholdes med $p_2(x) = 2x^2$

Øvelse 8: Graf-repræsentationen

a) Tegn grafen for andengradspolynomiet $p(x) = x^2 - 4x + 7$ i et dynamisk geometriprogram og afsæt toppunktet for parablen ved hjælp af et passende værktøj. Tegn også grafen for prototypen $p_1(x) = x^2$.

b) Tegn den forskydningsvektor (orienteret linjestykke), der forbinder toppunktet (0,0) for enhedsparablen med toppunktet for parablen $y = x - 4x + 7$.
Hvis du parallelforskyder (0,0) langs denne forskydningsvektor, fører parallelforskydningen altså toppunktet fra enhedsparablen over i toppunktet for den forskudte parabel.

c) Afsæt nu et frit punkt på enhedsparablen og parallelforskyd det langs den ovenstående forskydningsvektor. Hvad observerer du, når du trækker i punktet? Hvad fortæller det, om de to parabler?

d) Prøv derefter at besvare de samme spørgsmål for graferne for andengradspolynomierne:
1) $p(x) = x^2 - 5x + 8$, der sammenholdes med $p_1(x) = x^2$
2) $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$, der sammenholdes med $p_2(x) = 2x^2$

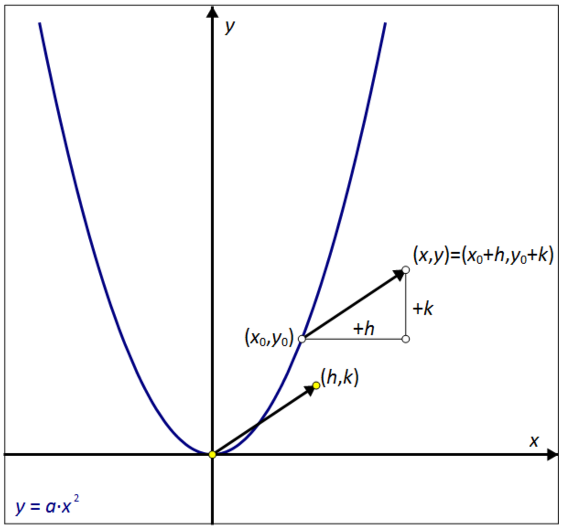
De foregående øvelser kunne tyde på, at grafen for andengradspolynomiet $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har samme form som grafen for $p_a(x) = a \cdot x^2$. Hvis vi kan vise dette, vil vi altså netop have påvist, at alle parabler har samme form, og at det kun er beliggenheden, der adskiller dem.

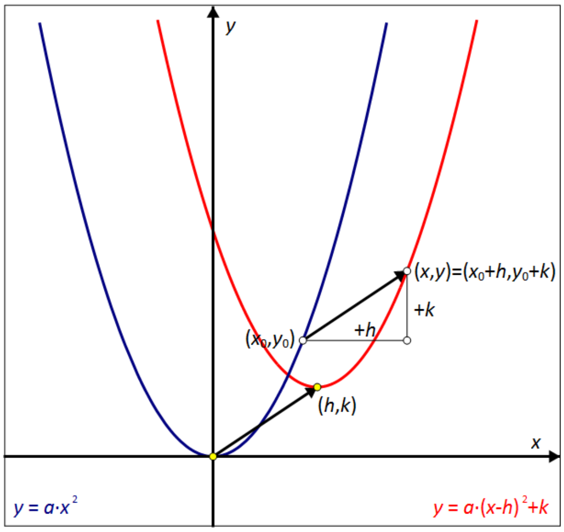
Vi vil derfor nu undersøge, hvad der sker, når vi parallelforskyder grafen for andengradspolynomiet $p_a(x) = a \cdot x^2$ med det vandrette stykke *h* og det lodrette stykke *k*. Vi vil benytte en blanding af geometriske og symbolske argumenter. Vi starter derfor med at tegne grafen for $p_a(x) = a \cdot x^2$ og afsætter et frit punkt (x_0, y_0) på grafen.

ISBN 9788770668279

Dette punkt forskydes med det vandrette stykke *h* og det lodrette stykke *k* over i punktet (*x*,*y*). Der gælder derfor sammenhængen

$$x = x_0 + h$$
$$y = y_0 + k$$





Når det uafhængige punkt (x_0, y_0) gennemløber parablen $y = a \cdot x^2$ vil det afhængige punkt nu gennemløbe den forskudte parabel. Denne kan derfor enten tegnes som *det geometriske sted* frembragt af det afhængige punkt (*x*,*y*) drevet af det uafhængige punkt (x_0, y_0). Eller den kan tegnes som *sporet* af det afhængige punkt (*x*,*y*). Vi ønsker nu at finde funktionsforskriften for den forskudte parabel.

Det uafhængige punkt (x_0, y_0) ligger på parablen $y = a \cdot x^2$, så derfor skal punktets koordinater passe ind i forskriften, dvs.

$$y_0 = a \cdot x_0^{\,2} \qquad (*)$$

Det afhængige punkt (x, y) er givet ved $(x_0 + h, y_0 + k)$, dvs.

$$x = x_0 + h \qquad \text{og} \qquad y = y_0 + k$$

Når vi isolerer hhv. x_0 og y_0 får vi

$$x_0 = x - h \qquad \text{og} \qquad y_0 = y - k$$

Dette indsættes i (*):

$$y - k = a \cdot (x - h)^2$$

Når vi isolerer y, får vi:

$$y = a \cdot (x - h)^2 + k$$

Forskriften for den forskudte parabel er altså givet ved $p(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$. Men er det nu også et andengradspolynomium? Ja, for vi kan gange parentesen ud og omskrive den til standardformen:

$y = a \cdot (x-h)^2 + k$	Ligningen for den forskudte parabel
$y = a \cdot (x^2 - 2h \cdot x + h^2) + k$	Gang parentesen ud (kvadratsætningen)
$y = a \cdot x^2 - 2a \cdot h \cdot x + a \cdot h^2 + k$	Gang ind i parentesen med *a*
$y = a \cdot x^2 + (-2a \cdot h) \cdot x + (a \cdot h^2 + k)$	Saml leddene til standardformen
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	Sæt $b = -2a \cdot h$ og $c = a \cdot h^2 + k$

ISBN 9788770668279

Vi spørger nu: Kan alle andengradspolynomier frembringes på denne måde? Svaret er bekræftende.
Hvis vi starter med et andengradspolynomium $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, så kan vi nemlig finde et h og et k, der opfylder ligningerne:

$b=-2a\cdot h$ og $c=a\cdot h^2+k$

Det er nemmest at finde h, dvs. det vandrette forskydningsstykke:

$$b=-2a\cdot h$$

$$h=-\frac{b}{2a}$$ Divider -2a over

Øvelse 9

Overvej at denne værdi samtidig er x-koordinaten for toppunktet. Således at symmetriaksen for parablen har ligningen: $x=-\frac{b}{2a}$.

Det er noget mere kompliceret at finde udtrykket for k, men for fuldstændighedens skyld udleder vi også en formel for k, dvs. det lodrette forskydningsstykke:

$$c=a\cdot h^2+k$$

$$k=c-a\cdot h^2$$ Isoler k

$$k=c-a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2$$ Indsæt det fundne udtryk for h

$$k=c-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}$$ Brug en potensregel

$$k=c-\frac{a\cdot b^2}{4a^2}$$ Brug en brøkregel: a ganges på i tælleren

$$k=c-\frac{b^2}{4a}$$ Forkort det ene a væk i tæller og nævner

$$k=\frac{4a\cdot c}{4a}-\frac{b^2}{4a}$$ Omskriv c til en brøk med samme nævner

$$k=\frac{4a\cdot c-b^2}{4a}$$ Sæt på fælles brøkstreg

$$k=-\frac{b^2-4a\cdot c}{4a}$$ Sætter minus ud foran brøken

$$k=-\frac{d}{4a}$$ Kald tælleren for d (diskriminanten)

Vi samler ovenstående i hovedsætningen for parabler:

Sætning 2: Parablens form og beliggenhed – toppunkt og symmetrilinje

Grafen for andengradspolynomiet $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ har samme form som parablen med forskriften $p_a(x)=a\cdot x^2$, idet den er en parallelforskydning af denne.

Parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje $x=-\frac{b}{2a}$ og har toppunkt i $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right)$, hvor d er den såkaldte diskriminant for andengradspolynomiet givet ved $d=b^2-4a\cdot c$.

Koefficienten a bestemmer parablens *krumning*: Går vi stykket 1 vandret ud fra toppunktet, skal vi gå stykket a lodret op (hvis a er positiv) og ellers lodret ned (hvis a er negativ).

ISBN 9788770668279

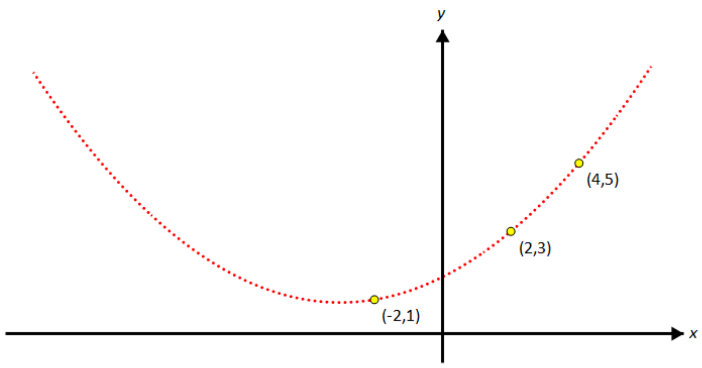
Øvelse 10:
Den ovenstående måde at analysere en funktion ud fra en prototype er standard for mange funktioner, ikke blot for andengradspolynomier. Prototypen $f_0(x)$ genererer en hel *funktionsfamilie* ud fra vandrette og lodrette forskydninger samt vandrette og lodrette skaleringer. På *hjemmesiden* er der et projekt, hvor vi dykker dybere ned i funktionsfamilier frembragt ud fra en prototype og bl.a. får et gensyn med den eksponentielle vækst.

Øvelse 11:
Vi har flere gange brugt begrebet *krumning* uden at præcisere, hvad vi forstår herved. Der findes forskellige krumningsmål for kurver og grafer, og vi vil under differentialregningen vende tilbage med de præcise definitioner. På *hjemmesiden* ligger en kort første introduktion til begrebet.

3. Bestemmelse af forskrift ud fra graf - andengradsregression

Vi kan ud fra grafen bestemme værdien af de tre koefficienter a, b og c i forskriften for andengradspolynomiet. Dvs. vi kan ikke alene bestemme fortegnet for de tre konstanter, men deres faktiske værdi.

Eksempel: Bestemmelse af forskrift ved løsning af ligningssystem
Der er givet følgende graf og tilhørende punkter for en funktion, som vi får oplyst er et andengradspolynomium:



Vi ved at et andengradspolynomium har en forskrift på formen

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Vi skal bestemme a, b og c.
Ud fra forskriften og de tre opgivne punkter opstilles tre ligninger med de tre ubekendte a, b og c:

Punkt	Indsætter i $p(x)$	Udregner funktionsværdien udtrykt ved
$(-2,1)$	$p(-2)=1$	$4a-2b+c=1$
$(3,2)$	$p(3)=2$	$9a+3b+c=2$
$(4,5)$	$p(4)=5$	$16a+4b+c=5$

Man kan godt bestemme a, b og c i hånden. Men det nemmeste er at bruge solve-kommandoen i et værktøjsprogram:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} \mathbf{p}(-2)=1 \\ \mathbf{p}(2)=3 \\ \mathbf{p}(4)=5 \end{cases}, \{a,b,c\}\right) \blacktriangleright a=\frac{1}{12} \text{ and } b=\frac{1}{2} \text{ and } c=\frac{5}{3}$$

Konklusion: Det søgte andengradspolynomium har forskriften $p(x) = \frac{1}{12} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{3}$.

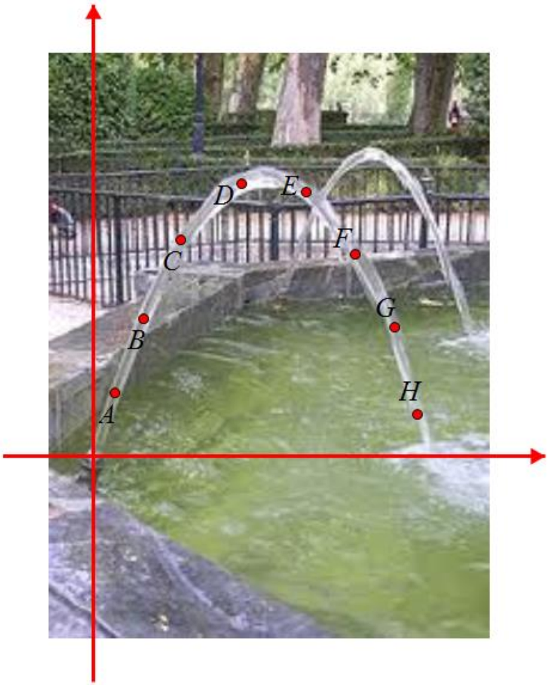
Øvelse 12:
Grafen for et andengradspolynomium f går igennem punkterne $(-2,-8)$, $(1,3)$ og $(10,-5)$.
Bestem forskriften for f ved løsning af et ligningssystem.

ISBN 9788770668279

Øvelse 13:
a) Argumenter for, at man ikke kan bestemme forskriften for andengradspolynomiet ud to punkter-
b) Givet tre punkter i et koordinatsystem. Kan man altid bestemme et andengradspolynomiet, hvis graf går gennem de valgte tre punkter?
c) Hvad gør man, hvis man kender 4 punkter?

Eksempel: Bestemmelse af forskrift ved andengradsregression
Hvis vi kender flere end tre punkter og punkterne ikke passer præcist med forskriften for et andengradspolynomium, selvom vi har en formodning om, at der ligger et andengradspolynomium bag datapunkterne, så skal vi bruge en anden metode.
Lad os fx se på billedet af et springvand. Billedet kan lægges ind i et dynamisk grafprogram, sammen med et passende koordinatsystem, hvorved vi kan aflæse koordinaterne til et passende antal punkter:

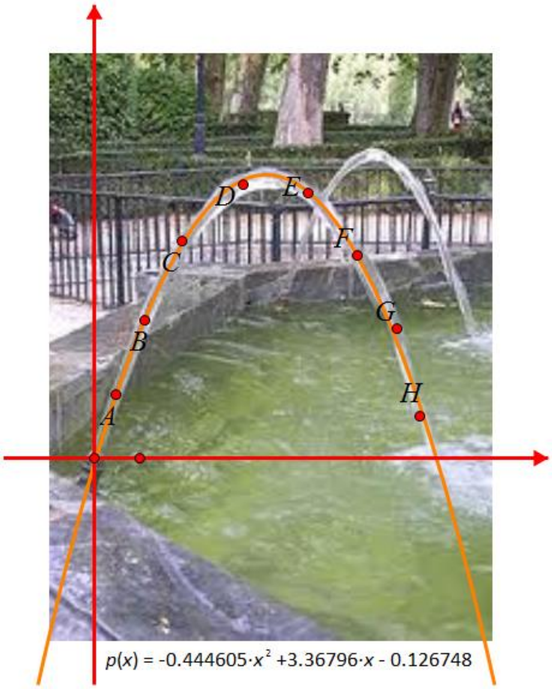
A: (0.48, 1.40)
B: (1.11, 3.04)
C: (1.93, 4.79)
D: (3.28, 6.03)
E: (4.71, 5.85)
F: (5.79, 4.47)
G: (6.67, 2.86)
H: (7.17, 0.93)

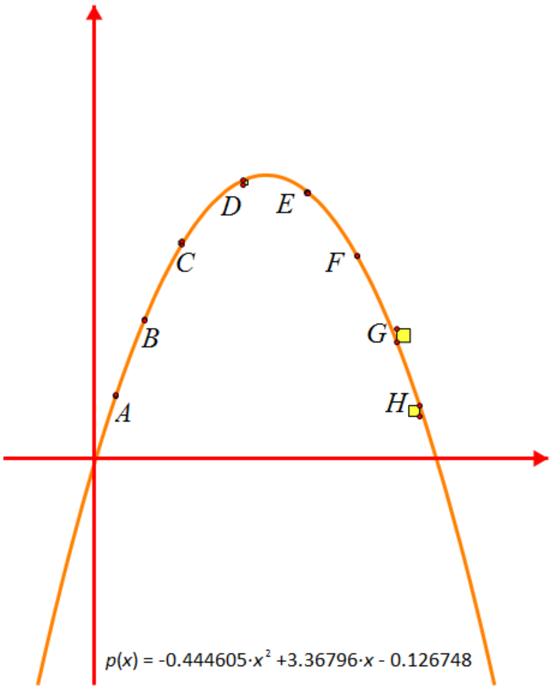


Vi vælger at tro på, at dråberne bevæger sig stort set som en kanonkugle, dvs de følger en parabelbue. Sammenhængen mellem de to variable, længden x og højden y af dråbens vej fra hanen til landing i bassinet, må derfor kunne beskrives ved et andengradspolynomium.
Virkeligheden er altid noget "grumset" i forhold til teorien, men man kan sige, at det vi tror på, er, at der bag målepunkterne ligger nogle ideelle teoretiske værdier, som vi ikke umiddelbart kan se, men som målepunkterne er en genspejling af. De teoretiske værdier ligger præcist på en parabel, men på grund af bl.a. måleusikkerhed ligger målepunkterne spredt tilfældigt rundt omkring den teoretiske parabel.

Værktøjsprogrammerne har en indbygget metode, der kaldes *andengradsregression*, til at tegne den *bedst mulige parabel* gennem datapunkterne. Metoden kaldes også *kvadratisk regression*. Ligesom ved lineær regression bygger metoden på *mindste kvadraters metode*. Til hvert datapunkt knyttes det punkt på parablen, der har den samme x-værdi. Det lodrette linjestykke, det såkaldte residual, mellem datapunktet og grafpunktet udspænder et kvadrat. Det er summen af disse residualkvadraters arealer, der udgør et mål for hvor god modellen er. I en andengradsregression bestemmes koefficienterne a, b og c nu således, at summen af residualkvadraternes arealer er mindst mulig. Der findes formler for a, b og c, der er indbygget i værktøjsprogrammet. Under emnet differentialregning viser vi i detaljer hvordan man finder koefficienterne. Her bruger vi blot den indbyggede andengradsregression i værktøjsprogrammet.

ISBN 9788770668279





Når værktøjsprogrammet udregner forskriften for det andengradspolynomium, der bedst mulig passer til de givne datapunkter, udregner den samtidigt et mål for, hvor godt andengradspolynomiet og regressionsgrafen passer med målepunkterne. Dette mål har i matematik symbolet r^2 og kaldes ofte forklaringsgraden. I kapitel 9 om statistik går vi nærmere ind i den såkaldte regressionsanalyse og får et mere præcist billede af, hvilken rolle forklaringsgraden spiller i vurderingen af andengradsregressionen.

Et godt grafisk værktøj til at svare på, hvor godt andengradspolynomiet passer med målepunkterne, er det såkaldte residualplot, som vi også kender fra lineær, eksponentiel og potens regression.

Øvelse 14:

a) Benyt et værktøjsprogram til at bestemme såvel forklaringsgraden som residualplottet for den ovenstående andengradsregression.

b) Vurder om forskellen mellem model og målepunkter kan tilskrives rene tilfældigheder, eller om der er tale om en systematisk afvigelse.

Øvelse 15:

a) Bestem toppunktet for den parabel, som springvandet frembringer.

b) Hvor højt op over hanens munding kommer springvandet?

Eksempel: Bestemmelse af forskrift ved kvadratisk regression

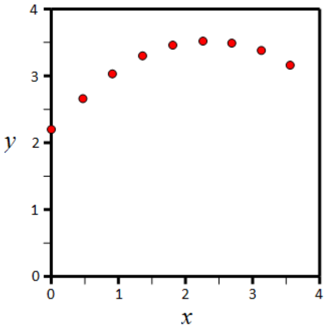
Når man kaster en bold, så vil bolden følge en bestemt kurve, der ifølge Galileis bevægelseslove bør ligne en parabel (vi ser bort fra luftens modstand mod bevægelsen). Et sådant kast kan optages med et lille kamera og analyseres i et værktøjsprogram. Det gøres ved at indlægge et passende koordinatsystem og udnytte, at afstanden mellem de to røde kegler er sat til 3.00 m. Når man spoler filen frem billede for billede kan man nu afsætte boldens centrum som en prik og få aflæst såvel tidspunktet som x- og y-koordinaterne. På *hjemmesiden* kan du hente den originale tabel med datapunkterne – her nøjes vi med et udsnit:

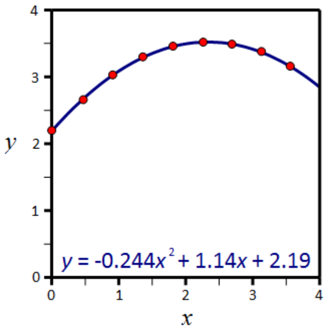
$t = 0$ s

ISBN 9788770668279

Tid *t* (s)	Længde *x* (m)	Højde *y* (m)
0.0	0.00	2.20
0.1	0.47	2.66
0.2	0.91	3.00
0.3	1.36	3.30
0.4	1.81	3.46
0.5	2.26	3.52
0.6	2.69	3.49
0.7	3.13	3.38
0.8	3.56	3.16

Vi ønsker at analysere baneformen og fokuserer derfor på sammenhængen mellem *x* og *y*. Vi plotter datapunkterne i et koordinatsystem og udfører andengradsregression, se figurerne.





Vi finder som vist forskriften:

$$y = -0{,}244x^2 + 1{,}14x + 2{,}19$$

Her passer konstantleddet 2,19 meget godt med den højde bolden slippes i $(2{,}20)$. Tilsvarende passer førstegradskoefficienten 1,14 meget godt med hældningen for tangenten.

Øvelse 16

Udnyt formlen for hældningskoefficienten af en linje bestemt af to punkter på de to første dataværdier i tabellen til at give et bud på tangentens hældning.


t = 0.2s


t = 0.4 s


t = 0.6 s


t = 0.8 s

Øvelse 17:

a) Hvad bliver forklaringsgraden for regressionen i eksemplet ovenfor?

b) Tegn også et residualplot for regressionen mellem længden *x* og højden *y* og vurder om forskellen mellem model og målepunkter kan tilskrives rene tilfældigheder, eller om der er tale om en systematisk afvigelse.

Øvelse 18:

Bestem toppunktet for parablen, og bestem dermed boldens maksimale højde over gulvet.

ISBN 9788770668279

4. Andengradsligningen

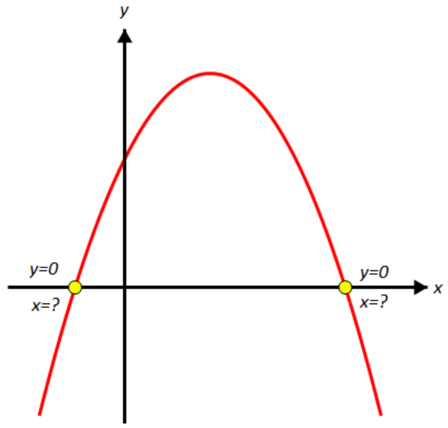
I det foregående så vi, at konstanten c i andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$ bestemmer parablens skæring med y-aksen. I det følgende vil vi undersøge parablens beliggenhed i forhold til x-aksen og se på, hvordan vi kan bestemme en parabels eventuelle skæringspunkter med x-aksen.

Øvelse 19:
En parabels beliggenhed i forhold til x-aksen kan beskrives ved en af følgende tre situationer:

1. Parablen skærer ikke x-aksen
2. Parablen rører x-aksen i et punkt
3. Parablen skærer x-aksen i to punkter.

Overvej i hvert tilfælde, hvordan parablen ligger, når $a > 0$ og når $a < 0$.

Når vi vil bestemme mulige skæringspunkter for en parabel med x-aksen, så skal vi løse ligningen $f(x) = 0$, fordi vi skal bestemme de x-værdier, der giver funktionsværdien nul.



Dvs. vi skal løse ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.
Vi kalder denne type ligning for en andengradsligning, fordi højestegradsleddet er et andengradsled.

Sætning 3: Andengradsligningens løsningsformel
Antallet af løsninger til andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ afhænger af fortegnet for andengradsligningens diskriminant $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$:

$d < 0$	Andengradsligningen har ingen løsning.
$d = 0$	Andengradsligningen har netop én løsning: $x = \frac{-b}{2a}$
$d > 0$	Andengradsligningen har to løsninger: $x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$ og $x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

Beviset for sætning 3 følger nedenfor

ISBN 9788770668279

Eksempel: Løsning af en andengradsligning

Vi skal løse ligningen $x^2+2x-8=0$

Løsningsmetode 1

Ligningen løses med brug af løsningformlen.

I andengradsligningen $x^2+2x-8=0$ er $a=1$, $b=2$ og $c=-8$.

Diskriminanten d bliver så $d=2^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36>0$.

Dvs. andengradsligningen har to løsninger:

$$x=\frac{-2-\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \qquad \text{og} \qquad x=\frac{-2+\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Vi kan kontrollere om løsningerne er korrekte ved at indsætte de fundne værdier i andengradsligningen:

Løsning $x=-4$: $(-4)^2+2\cdot(-4)-8=16-8-8=0$.

Løsning $x=2$: $2^2+2\cdot2-8=4+4-8=0$.

Da vi i begge tilfælde får nul, så er begge de fundne løsninger korrekte, og der findes ikke flere!

Konklusion: Ligningen har løsningerne x = -4 og x = 2.

Løsningsmetode 2

Ligningen løses med brug af en solve-kommando.

Solve($x^2+2x-8=0$,x) $\quad x=-4$ and $x=2$

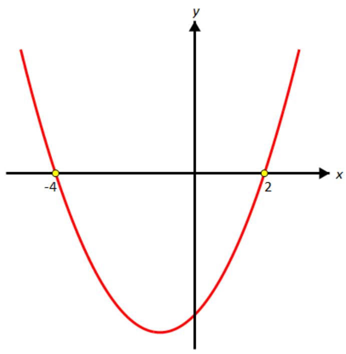
Konklusion: Ligningen har løsningerne x = -4 og x = 2.

Bemærk: Hvis andengradsligningen ingen løsninger har, så vil værktøjsprogrammet svare med ”False”.

Løsningsmetode 3

Ligningen løses grafisk:

Vi tegner grafen, og ser om grafen skærer *x*-aksen. Hvis den gør det, så benytter vi værktøjsprogrammets muligheder for at bestemme disse skæringspunkters *x*-koordinater. Vi angiver hvilken metode, vi bruger.



Konklusion: Ligningen har løsningerne x = -4 og x = 2.

Øvelse 20

Løs følgende andengradsligninger. Du skal anvende hver af de tre løsningsmetoder mindst én gang:

a) $x^2-12x+20=0$ b) $-x^2-2x+3=0$ c) $2x^2-4x+2=0$ d) $3x^2-5x+6=0$

ISBN 9788770668279

Bevis for sætning 3.

Bevisets ide er at omskrive ligningen ved hjælp af en af kvadratsætningerne: $(e+f)^2 = e^2 + 2 \cdot e \cdot f + f^2$ *, hvor vi her har anvendt e og f, fordi der er så mange andre symboler i spil. Men det særligt smarte er her, at vi anvender den "baglæns":* $e^2 + 2 \cdot e \cdot f + f^2 = (e+f)^2$ *, fordi vi så ender med en ligning, hvor vi bare kan tage kvadratroden.*

Vi løser andengradsligningen ved at omskrive skridt for skridt:

$ax^2 + bx + c = 0$	
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	Gange med 4a
$2^2a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$	Udnyt $4 = 2^2$, så alle faktorer i 1. led er kvadrater
$(2ax)^2 + 4abx + 4ac = 0$	Anvend potensregel på første led
$(2ax)^2 + 4abx = -4ac$	Træk $4ac$ fra på begge sider
$(2ax)^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$	Læg b^2 til på begge sider
$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$	Omskriv det andet led til et *dobbelt produkt*, så vi har *to kvadrater og et dobbeltprodukt* på højre side
$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$	Anvend den første kvadratsætning, og omskriv højresiden til *et kvadrat med to led* (se øvelse nedenfor)
$(2ax+b)^2 = d$	Erstat $b^2 - 4ac$ med d, som er ligningens diskriminant

Nu vil vi tage kvadratroden, men vi må passe på, vi må ikke tage kvadratroden af negative tal:
Vi er derfor nødt til at opdele i flere tilfælde:

$d<0$	$(2ax+b)^2 = d$	
	Ingen løsning!	Den omvendte funktion til at kvadrere er at tage kvadratroden, men vi ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal, så derfor har ligningen ingen løsning.
$d=0$	$(2ax+b)^2 = 0$	
	$2ax + b = 0$	Anvend kvadratroden og udnyt $\sqrt{0} = 0$
	$2ax = -b$	Træk b fra på begge sider
	$x = \frac{-b}{2a}$	Divider med $2a$
$d>0$	$(2ax+b)^2 = d$	
	$2ax + b = -\sqrt{d}$ eller $2ax + b = \sqrt{d}$	Anvend kvadratroden. Vi får 2 muligheder, idet både $(-\sqrt{d})^2 = d$ og $(\sqrt{d})^2 = d$
	$2ax = -b - \sqrt{d}$ eller $2ax = -b + \sqrt{d}$	Træk b fra på begge sider
	$x = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ eller $x = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$	Dividerer med $2a$

Hermed har vi bevist sætning 3.

ISBN 9788770668279

Øvelse 21
I beviset ovenfor anvendte vi den første kvadratsætning:

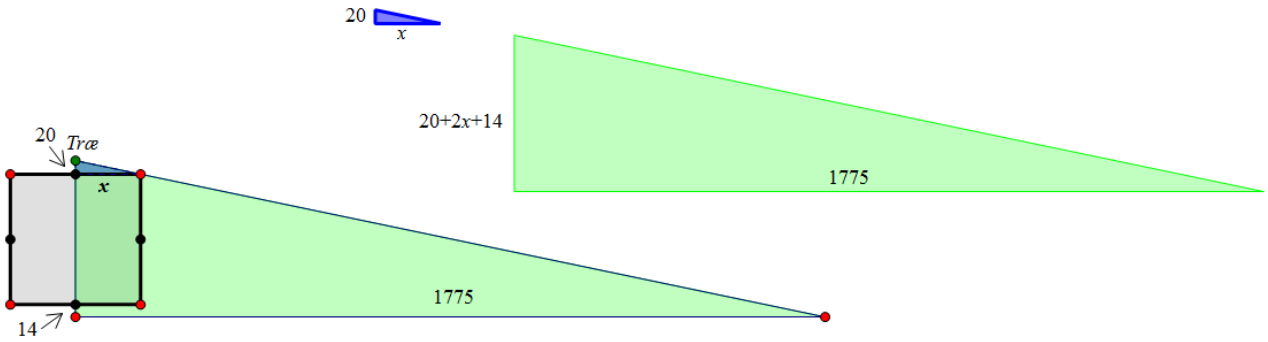
> *Kvadratet på en toleddet størrelse er kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt*

til omskrivningen:

$$(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 = (2ax+b)^2$$

Vi bruger her kvadratsætningen omvendt, dvs. vi går fra *kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt* (dvs. fra to kvadrater og et dobbeltprodukt) til *kvadratet på en to-leddet størrelse* (dvs. et kvadrat med to led). Denne proces kaldes kvadratkomplettering, og de fleste værktøjsprogrammer har typisk en indbygget kommando, fx CompleteSquare, der kan gennemføre omskrivninger på denne måde. Undersøg dit eget værktøj!

Øvelse 22: Kinesisk andengradsligning
En gammel kinesisk by er omgivet af en kvadratisk mur. I midten af hver af siderne er der en byport. 20 meter foran porten i nord står der et træ. Hvis man går 14 meter direkte væk fra porten i syd og dernæst 1775 meter til højre kan man lige netop skimte træet. Hvor stor er byen?
Benyt tegningen nedenfor til at opstille en andengradsligning, og løs problemet.



Øvelse 23: Babylonisk andengradsligning
På babylonske lertavler har man fundet regnestykker, som faktisk er opstilling og løsning af andengradsligninger. Her er et eksempel fra lertavlen BM 13901 (let tilrettet tekst):

> *Jeg har lagt arealet til to tredjedele af siden i mit kvadrat og det er 0;35. Du tager 1, "koefficienten". To tredjedele af 1 er 0;40. Halvdelen deraf, 0;20, ganger du med 0;20, (og resultatet) 0;6,40 lægger du til 0;35, og (resultatet) 0;41,40 har 0;50 til kvadratrod. 0;20 som du gangede med sig selv, trækker du fra 0;50 og 0;30 er (siden i) kvadratet.*

I C-bogen så vi hvordan babylonierne regnede i 60-talssystem, så de tal, der er gengivet i teksten er skrevet i 60-talssystemet.

a) Omskriv de tal, der indgår i teksten til 10-talssystemet som vist i nedenstående beregning (bemærk, at semikolon skiller de hele tal fra decimalerne), idet vi anvender et værktøjsprogram ved det sidste lighedstegn:

$$0;6,40 = 0\cdot 60^0 + 6\cdot 60^{-1} + 40\cdot 60^{-2} = \frac{1}{9}$$

b) Lad nu x betegne siden i kvadratet, og opstil en andengradsligning, der svarer til teksten.

c) Løs den fundne andengradsligning, og kontroller derved det resultat, som teksten foreskriver.

ISBN 9788770668279

4.1 Grafisk løsning af andengradsligningen

Da løsning af andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ svarer til at bestemme x-koordinaten i skæringspunkterne mellem parablen $p(x)=ax^2+bx+c$ og x-aksen, formulerer vi nu sætning 3 i en grafisk udgave:

Sætning 4: Grafisk løsning andengradsligningen
Antallet af skæringspunkter mellem parablen for andengradspolynomiet $p(x)=ax^2+bx+c$ og x-aksen afhænger af diskriminanten $d=b^2-4\cdot a\cdot c$ på følgende måde:

$d<0$	Parablen skærer ikke x-aksen
$d=0$	Parablen rører x-aksen netop ét sted, nemlig i det punkt, hvor $x=\frac{-b}{2a}$
$d>0$	Parablen skærer x-aksen to steder, nemlig i de to punkter, hvor: $x=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ eller $x=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Løsningerne til andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ kaldes også for andengradspolynomiets rødder.

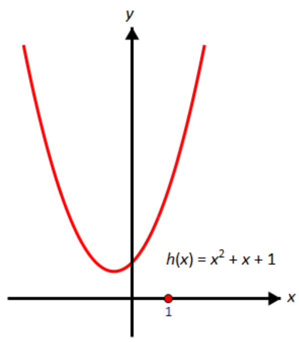
Eksempel: Negativ diskriminant – ingen skæringspunkter – ingen rødder
For andengradspolynomiet

$$p_1(x)=x^2+x+1$$

har koefficienterne følgende værdier $a=1$, $b=1$ og $c=1$.
Diskriminanten d bliver:

$$d=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$$

Konklusion: Andengradspolynomiet har ingen rødder, dvs. parablen skærer ikke x-aksen.



ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Eksempel: Diskriminant nul – et skæringspunkt – en rod

For andengradspolynomiet

$$p_2(x) = x^2 + 4x + 4$$

er koefficienterne $a = 1$, $b = +4$ og $c = 4$.

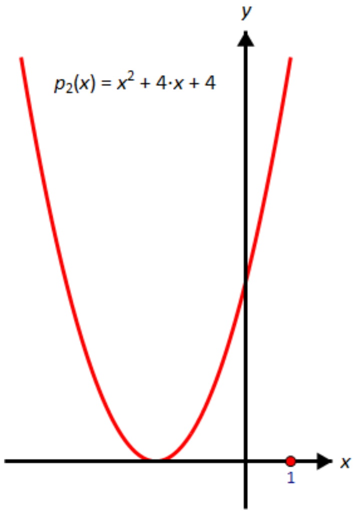
Diskriminanten d bliver:

$$d = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 .$$

Parablen skærer altså x-aksen i ét punkt. Vi bestemmer x-koordinaten i skæringspunktet:

$$x = \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

Konklusion: Andengradspolynomiet har en rod, og parablen skærer x-aksen i punktet $(-2,0)$.



Eksempel: Positiv diskriminant – to skæringspunkter – to rødder

For andengradspolynomiet

$$p_3(x) = x^2 - 6x + 5$$

er koefficienterne $a = 1$, $b = -6$ og $c = 5$.

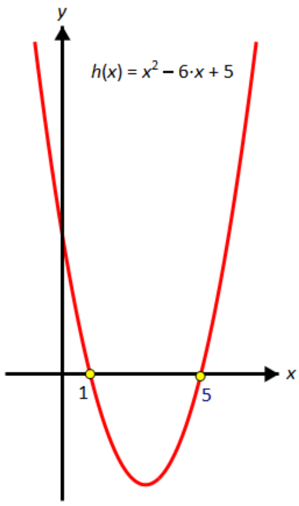
Diskriminanten d bliver:

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0 .$$

Parablen skærer altså x-aksen i to punkter. Vi bestemmer x-koordinaten i hvert af de to skæringspunkter:

$$x = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Konklusion: Andengradspolynomiet har to rødder, og parablen skærer x-aksen i de to punkter $(1,0)$ og $(5,0)$.



Øvelse 24

Bestem diskriminanten for andengradspolynomierne, og undersøg om parablerne skærer, rører eller ikke- skærer x-aksen:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ b) $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$ c) $h(x) = -2x^2 - 8x - 6$

Eksempel: Rod i et polynomium

Vi vil undersøge om 2 er en rod i andengradspolynomiet $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$.

En rod i et andengradspolynomium er en løsning til andengradsligningen $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

Hvis 2 derfor er en rod, så skal $x = 2$ gøre ligningen sand. Vi får:

$$3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 3 = 3 \cdot 4 - 20 + 3 = 12 - 20 + 3 = -5 \neq 0$$

Konklusion: 2 er *ikke* en rod i f.

Øvelse 25

Undersøg, om følgende andengradspolynomier har nogen rødder, og bestem i givet fald disse:

a) $f(x) = x^2 - 12x + 20$ b) $g(x) = -3x^2 + 40x - 200$ c) $h(x) = 5x^2 + 30x + 100$ d) $i(x) = -4x^2 + 100x$

ISBN 9788770668279

Eksempel: Skæring mellem parabel og vandret linje

Vi tegner graferne for de to funktioner

$f(x)=3$ og $g(x)=x^2+2x+4$

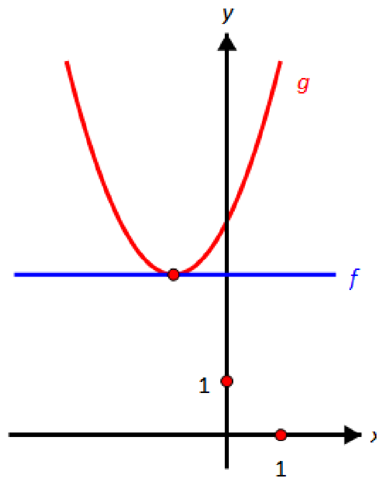
i samme koordinatsystem.

Vi ser, at der er et skæringspunkt, og bestemmer dette til $(-1,3)$.

Vi kan også beregne koordinaterne til skæringspunktet.

I skæringspunktet er funktionsværdierne for de to funktioner ens.

Dvs. vi skal løse ligningen:



$f(x)=g(x)$

$3=x^2+2x+4$

$0=x^2+2x+1$ Træk 3 fra på begge sider

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$ Anvend løsningsformlen

$x=\dfrac{-2}{2}$ Diskriminanten var 0

$x=-1$

y-koordinaten må være 3, da f er konstant lig med 3.

Konklusion: Skæringspunktet mellem parablen og linjen er punktet $(-1,3)$.

Øvelse 25

a) For hvilke værdier af k er der henholdsvis ingen, ét eller to skæringspunkter mellem parablen i eksemplet ovenfor og linjen med ligning $y=k$. Giv en grafisk løsning, ved at lade $f(x)=k$, og indføre en skyder for k.

b) Løs ligningen $g(x)=k$ ved beregning, og anvend din viden om diskriminantens betydning for antallet af løsninger til at svare på, for hvilke værdier af k ligningen har henholdsvis ingen, én eller to løsninger.

Eksempel: Skæring mellem parabel og skrå linje

Vi tegner graferne for de to funktioner

$f(x)=2x+10$ og $g(x)=x^2+2x+4$

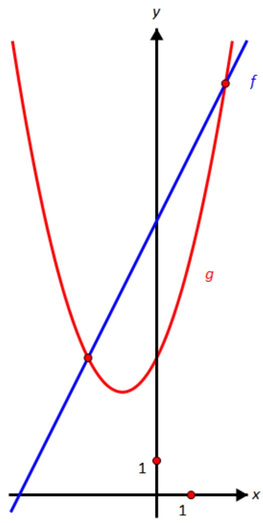
i samme koordinatsystem.

Vi ser, at der er to skæringspunkter, og bestemmer disse til $(-2,4)$ og $(2,12)$.

Vi kan også beregne koordinaterne til skæringspunkterne.

I skæringspunkterne er funktionsværdierne for de to funktioner ens.

Dvs. vi skal løse ligningen:



$f(x)=g(x)$

$2x+8=x^2+2x+4$

$4=x^2$ Reducer ligningen

$x=-2$ eller $x=2$

y-koordinaterne kan vi bestemme ved indsættelse i en af funktionsforskrifterne. Her vælger vi f, fordi det giver den simpleste beregning:

$f(-2)=2\cdot(-2)+8=4$ og $f(2)=2\cdot2+8=12$

Konklusion: Parablen og den skrå linje skærer hinanden i punkterne $(-2,4)$ og $(2,12)$.

ISBN 9788770668279

Øvelse 26 (Især for A-niveau)
Vi ser nu på de to funktioner

$$f(x) = a \cdot x \qquad \text{og} \qquad g(x) = x^2 - 2x + 4$$

Tegn graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem, idet du indfører en skyder for a.

a) For hvilke værdier af a er der henholdsvis ingen, ét eller to skæringspunkter mellem parablen og linjen med ligning $y = a \cdot x$. Giv en grafisk løsning.

b) Løs ligningen $x^2 - 2x + 4 = a \cdot x$ ved beregning, og anvend din viden om diskriminantens betydning for antallet af løsninger til at svare på, for hvilke værdier af a ligningen har henholdsvis ingen, én eller to løsninger.

5. Anvendelser af andengradspolynomiet

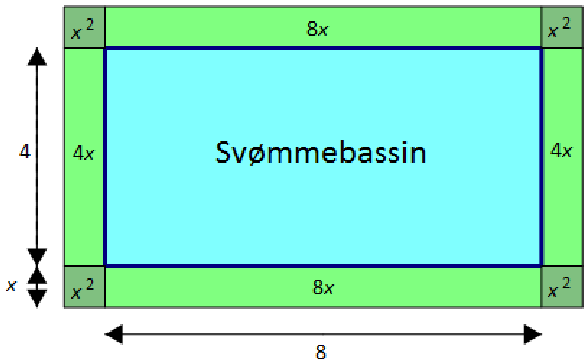
En række optimeringsproblemer involverer andengradspolynomier. Optimale løsninger er i sådanne tilfælde ofte knyttet til toppunktet. Vi vil demonstrere at anvendelsen af andengradspolynomier har et bredere felt.

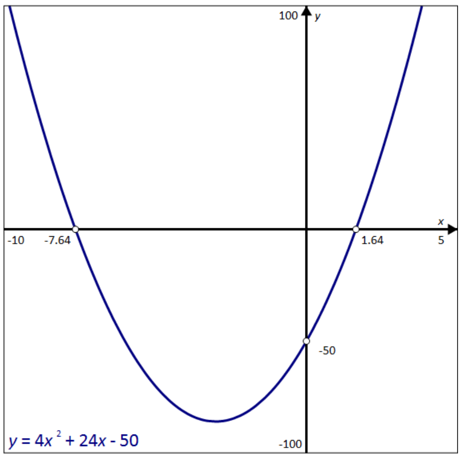
4.1 Eksempel: Hvor bred skal stien være?

Familien Jensen har lige anlagt et svømmebassin, der har form som et rektangel. Svømmebassinet er 8 meter langt og 4 meter bredt. Som kronen på værket ønsker de at lægge et lag kunstigt græs rundt langs svømmebassinet, hvor de kan ligge og slappe af oven på svømmeturen. De har købt 50 m^2 kunstigt græs på et godt tilbud i den lokale tømmerhandel. Det kunstige græslag skal have samme bredde hele vejen rundt langs kanten af svømmebassinet.
Problem: Gør rede for, at bredden x af det kunstige græslag skal opfylde ligningen

$$4 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 50 = 0$$

og bestem bredden af græslaget.
Løsning: Vi tegner først en skitse af situationen





Vi ser da at græslaget består af fire kvadrater med arealet x^2 og fire rektangler med arealerne $8x$, $4x$, $8x$ og $4x$. Tilsammen har kvadraterne derfor arealet $4 \cdot x^2$ og rektanglerne arealet $2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 8 \cdot x = 24 \cdot x$. Men det samlede areal skulle være 50 m^2, hvorfor der må gælde

$$4x^2 + 24x = 50$$
$$4x^2 + 24x - 50 = 0$$

Vi skal så løse denne andengradsligning for at finde bredden. Vi bemærker først, at venstresiden er et andengradspolynomium, hvis graf er en glad parabel, som skærer y-aksen i -50. Den må derfor nødvendigvis skære x-aksen to steder, den ene gang i et negativt tal (som ikke kan bruges i modellen), og den anden gang i et positivt tal (den søgte bredde). Vi ser også at parablen skærer y-aksen med den positive hældning 24, dvs. den positive løsning ligger tættest på 0. Vi kan selvfølgelig aflæse skæringspunkterne med x-aksen på grafen.

L&R Uddannelse
EGMONT

Vi ser da, at den søgte bredde er 1.64 m, men vi kan også løse ligningen ved hjælp af formlen for andengradsligningen, hvor vi kun vælger den positive:

$$4x^2+24x-50=0,\quad a=4,\quad b=24,\quad c=-50$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4a\cdot c}}{2a}=\frac{-24+\sqrt{24^2+900}}{8}=\frac{-24+\sqrt{1376}}{8}\approx 1.63681$$

Eller blot ved hjælp af solve i et værktøjsprogram – kontroller fx beregningen ovenfor ved denne metode.
Vi finder altså igen at den søgte bredde er 1,64 m.

Øvelse 27
Hvilken bredde skal familien benytte, hvis de i stedet beslutter at sætte et hegn op langs en af bassinets langsider, og de derfor kun skal lægge græs ud langs de resterende tre sider?

4.2. Eksempel: Cosinusrelationerne

Da vi i C-bogen lærte om trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter beskrev vi, hvilke trekantstilfælde, der klares ved hjælp af sinusrelationerne, og hvilke der klares ved hjælp af cosinusrelationerne. Hvis vi var nødt til at bruge sinusrelationerne kunne vi risikere at gå i "sinusfælden".

Øvelse 28
Hvad er "sinusfælden". Illustrer det med følgende eksempel:
Vi får oplyst om trekant *ABC*, at $\angle A$ er 37°, siden *a* er 12 og siden *b* er 10. Vi får yderligere oplyst, at $\angle B$ er stump. Vi ønsker at bestemme siden *c* og de øvrige vinkler.
a) Konstruer trekanten ud fra de opgivne mål. Bruger du oplysningen om at $\angle B$ er stump i din konstruktion? Lad geometriprogrammet give svaret på længden af siden *c*.
b) Beregn $\angle B$ med brug af sinusrelationerne og beregn dernæst siden *c*.
c) Hvordan ville konstruktionen have forløbet, hvis vi ikke havde fået at vide, at $\angle B$ er stump?

Situationen, hvor vi kender en side og en vinkel overfor hinanden samt kender endnu en side, kan også løses med brug af cosinusrelationerne. I øvelsen ovenfor bliver vi spurgt om siden *c*. Hvis vi opskriver den af cosinusrelationerne, hvor kan indsætte mest mulig information, får vi følgende:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(A)$$

$$10^2=12^2+c^2-2\cdot 12\cdot c\cdot\cos(37)\qquad\text{Indsæt de opgivne talværdier}$$

$$0=c^2-2\cdot 12\cdot\cos(37)\cdot c+12^2-10^2\qquad\text{Roker rundt i ligningen}$$

$$0=c^2-18{,}37\cdot c+44\qquad\text{Udregn koefficienterne}$$

Dette er en andengradsligning i den ubekendte *c*.
Hvis vi vil løse den med brug af formlen finder vi først $d=18{,}37^2-44=161{,}46$. Dvs. der er to løsninger!
Hvis vi løser den med brug af en solve-kommando kan det se således ud:

solve($c^2-18{,}37\cdot c+44$ =0,c) *c*=2,83 or c=15,54

Der er altså to løsninger til siden *c*, og dermed to forskellige trekanter som løsning.
1. trekantsmulighed:
c = 2,83 giver følgende beregning af $\angle B$:

$$\cos(B)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$$

$$\cos(B)=\frac{10^2+2{,}83^2-12^2}{2\cdot 10\cdot 2{,}83}\qquad\text{Indsæt talværdier}$$

$$\cos(B)=-0{,}636\qquad\text{Udregn brøken}$$

$$\angle B=129{,}5^\circ\qquad\text{Anvend }\cos^{-1}$$

Endelig får vi $\angle C$:

$$\angle C=180^\circ-129{,}5^\circ-37^\circ=13{,}5^\circ$$

ISBN 9788770668279

2. trekantsmulighed:
c = 15,54 giver følgende beregning af $\angle B$:

$$\cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos(B) = \frac{10^2 + 15{,}54^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 15{,}54} \qquad \text{Indsæt talværdier}$$

$$\cos(B) = 0{,}636 \qquad \text{Udregn brøken}$$

$$\angle B = 50{,}5° \qquad \text{Anvend } \cos^{-1}$$

Endelig får vi $\angle C$:

$$\angle C = 180° - 50{,}5° - 37° = 92{,}5°$$

Hvis vi fik oplyst at $\angle B$ er stump, så så vi bort fra tilfælde 2. I modsat tilfælde ville der være to trekanter som løsning til opgaven. Det særlige ved anvendelsen af cosinusrelationerne er, at vi er helt sikre på resultatet, her er ingen ”fælde”.