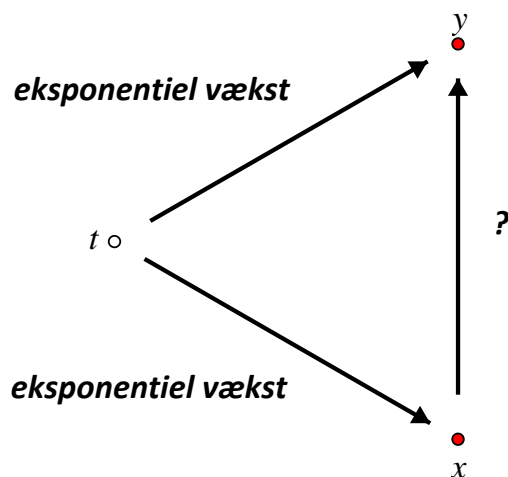


## Projekt 8.11. Samspil mellem eksponentiel vækst og potensvækst

### Introduktion: Eksperiment med eksponentiel vækst

Hvad sker der når man kobler to eksponentielle vækstmodeller? Lad os antage at vi har to variable,  $x$  og  $y$ , der begge afhænger eksponentielt af tiden  $t$ : Hvilken sammenhæng er der så mellem variablene  $x$  og  $y$ ?

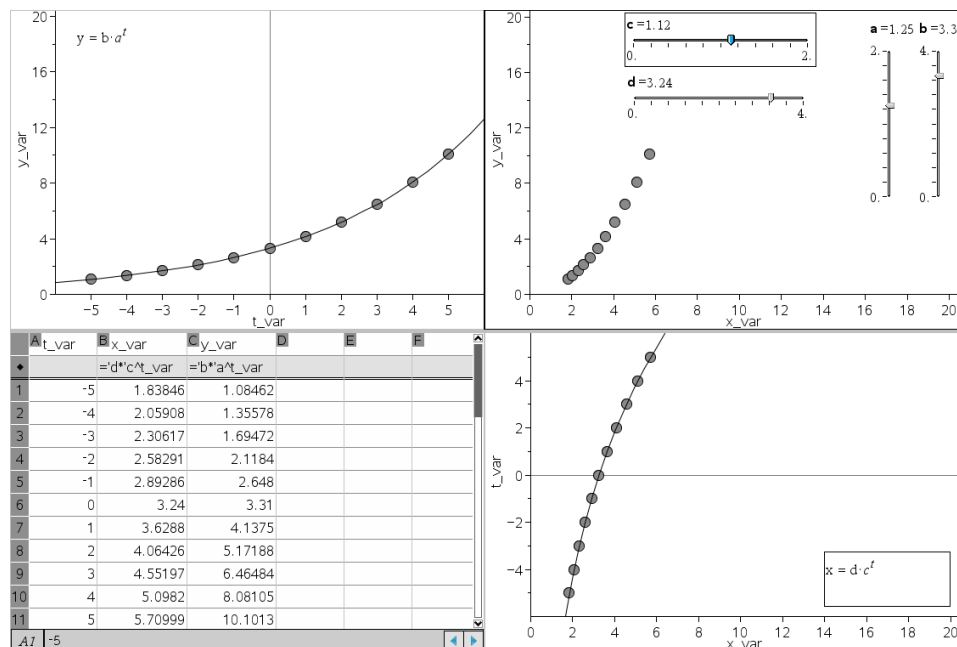


For at finde ud af det vil vi først foretage et eksperiment. Vi indfører derfor to eksponentielle vækstmodeller:

$$y = b \cdot a^t$$

$$x = d \cdot c^t$$

- a) Opret som vist en tabel for de tre variable  $t$ ,  $x$  og  $y$  og afbild sammenhængene  $t \rightarrow x$ ,  $t \rightarrow y$  og  $x \rightarrow y$  i passende koordinatsystemer. Læg fx mærke til, at i sammenhængen mellem  $t$  og  $x$  har vi vendt koordinatsystemet og anbragt  $x$  på den vandrette akse, så den passer med det sædvanlige koordinatsystem. Vi har også udført regressionsmodeller for  $x$  og  $y$  som funktion af  $t$ , så ligningerne er med inde på diagrammet:



- b) Hvilken type sammenhæng er der mellem  $x$  og  $y$ ?
- c) Hvilken indflydelse på  $x$ - $y$ -graf har det at du regulerer på startværdien  $b$ ? startværdien  $d$ ? Hvad sker der fx hvis startværdien  $b$  bliver dobbelt så stor?
- d) Hvad skal der gælde om de to eksponentielle vækstmodeller, hvis grafen for  $(x,y)$  skal ligge på en ret linje? Hvad skal der gælde om de to eksponentielle vækstmodeller, hvis  $y$  skal afhænge voksende af  $x$ ? Hvad skal der gælde, hvis grafen for  $(x,y)$  skal være opad hul, dvs. bøjede opad (som vist på figuren)?
- e) I sammenhængen mellem  $x$  og  $y$  indgår to parametre: Hvordan afhænger de af de oprindelige fire parametre?
- f) Skriv en kort sammenfatning i almindelige ord om hvad du har fundet ud af så langt om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$ !

## Teori I: Kan vi forstå sammenhængen?

Der er mange måder at karakterisere en eksponentiel vækst på. En af dem er som en konstant procentisk tilvækst, dvs. hver gang vi giver tiden  $t$  en bestemt tilvækst vokser  $x$  (eller  $y$ ) med en bestemt procent. I det følgende vil vi fokusere på denne konstante procentvise tilvækst. Vi vil derfor normere de to eksponentielle vækstmodeller, så de begge får startværdien 1 svarende til 100%.

- g) Hvilket punkt ligger nu med sikkerhed på grafen for sammenhængen mellem  $x$  og  $y$ ? Hvilken konsekvens har det for parametrene for denne sammenhæng?
- h) Antag nu at  $x$  vokser med 20%, hver gang tiden vokser med 1 enhed. Hvilken værdi svarer det til for fremskrivningsfaktoren  $c$ ? Antag tilsvarende at  $y$  vokser med 40%, hver gang tiden vokser med 1 enhed. Hvilken værdi svarer det til for fremskrivningsfaktoren  $a$ ?
- i) Hvad fortæller det om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$ ? Stemmer det overens med den eksperimentelt fundne sammenhæng? Kan du nu formulere et argument for, hvorfor der må gælde den fundne sammenhæng? Kan du endda formulere en ligning, der må gælde mellem de to procenter på den ene side og vækstparameteren for  $(x,y)$ -sammenhængen på den anden side?

## Teori II: Kan vi udlede en formel for sammenhængen? (mest på A-niveau)

I kapitel 4 har vi omtalt regnereglerne for potenser. De bliver vigtige i det følgende!

De to eksponentielle vækstmodeller er givet ved ligningerne

$$y = b \cdot a^t$$

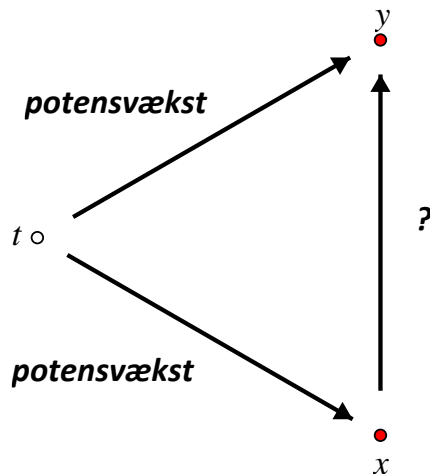
$$x = d \cdot c^t$$

Vi fokuserer nu på fremskrivningsfaktorerne  $c$  og  $a$ , og holder os i første omgang til pæne værdier for at se om vi kan spotte en sammenhæng!

- j) Vi sætter nu fremskrivningsfaktoren  $c$  til 2. Find nu vækstparameteren  $k$  for  $(x,y)$ -sammenhængen, når fremskrivningsfaktoren  $a$  sættes til  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1, 2, 4 og 8. Hvilken sammenhæng tyder det på mellem  $c$ ,  $a$  og  $k$ ?
- k) Udnyt den fundne sammenhæng mellem  $c$ ,  $a$  og  $k$  til at erstatte fremskrivningsfaktoren  $a$  i vækstligningen  $y = b \cdot a^t$  med det fundne udtryk i  $c$  og  $k$ . Kig på den fremkomne ligning og kombiner den med den anden vækstligning  $x = d \cdot c^t$  så der fremkommer en ligning, der udtrykker  $y$  alene ved hjælp af  $x$ .
- l) Skriv en kort sammenfatning om hvad du nu har fundet ud af om sammenhængen mellem  $x$  og  $y$ !

### Udfordring: Stå på dine egne ben! (mest for A-niveau)

Hvad sker der når man kobler to potensvækst-modeller? Lad os denne gang antage at vi har to variable,  $x$  og  $y$ , der begge afhænger som en potensvækst af tiden  $t$ : Hvilken sammenhæng er der så mellem variablene  $x$  og  $y$ ?



Gennemfør selv en undersøgelse efter samme opskrift som ovenfor, hvor du denne gang starter med forskrifterne for to potensfunktioner:

$$y = b \cdot t^a$$

$$x = d \cdot t^b$$