

Projekt 7.8 To ligninger med to ubekendte

Den opgave at skulle løse to ligninger med to ubekendte er vi stødt på i en række specialtilfælde under behandlingen af vækstmodellerne:

Lineær funktion:	<p>Når vi bestemmer regneforskriften for den lineære funktion $y = ax + b$, hvis graf går gennem punkterne $(-6, -1)$ og $(12, 8)$, så er en af metoderne, at indsætte tallene og løse ligningssystemet:</p> $8 = 12a + b$ $-1 = -6a + b$ <p>med hensyn til a og b.</p>
Eksponentiel funktion:	<p>Når vi bestemmer regneforskriften for den eksponentielle funktion $y = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem punkterne $(2, 3)$ og $(10, 25)$, så er en af metoderne, at indsætte tallene og løse ligningssystemet:</p> $25 = b \cdot a^{10}$ $3 = b \cdot a^2$ <p>med hensyn til a og b.</p>
Potens funktion:	<p>Når vi bestemmer regneforskriften for den potens funktion $y = b \cdot x^a$, hvis graf går gennem punkterne $(9, 6)$ og $(100, 20)$, så er en af metoderne, at indsætte tallene og løse ligningssystemet:</p> $20 = b \cdot 100^a$ $6 = b \cdot 9^a$ <p>med hensyn til a og b.</p>

Sådanne ligningssystemer kan normalt løses på et værktøj med en solve-kommando.

Øvelse 1

Løs ovenstående tre ligningssystemer i et CAS-værktøj.

Ligningssystemerne ovenfor kan også løses "i hånden", hvor metoden er at skaffe den ene ubekendte af vejen først, så man kun har én ligning med én ubekendt. Denne løses så, og resultatet indsættes i en af de oprindelige ligninger hvorved vi kan finde den anden ubekendte. Denne metode kaldes *substitutionsmetoden*, eller indsættelsesmetoden.

Øvelse 2

Repeter, hvordan man løser de tre ligningssystemer "i hånden", og gennemfør udregningerne.

I de sidste to ligningssystemer indgår de specielle funktioner a^x og x^a . Vi kan møde andre ligninger, hvor funktioner som \ln og \cos indgår. I bogens afsnit 8.3 omtalte vi sådanne ligninger, der hurtigt kan blive meget vanskelige at løse. I de to tilfælde, vi her ser på, går det dog godt. Men vi vil i det følgende koncentrere os om den første type, som kaldes for *lineære ligningssystemer* og specielt undersøge den løsningsmetode, der hedder *lige store koefficienters metode*.

1. Formelregning - lige store koefficienters metode

Dette er en meget kraftfuld metode til ligningsløsning: Den kan generaliseres til n ligninger med n ubekendte, og det er en metode der kan sættes på en formel, hvilket vi vender tilbage til på A-niveau under emnet: Vektorregning. Samtidig har metoden den store fordel frem for *indsættelsesmetoden*, at man ikke drukner i brøkrekningsfejl.

Koefficienter er de tal, der står foran de ubekendte. I ligningssystemet:

$$8 = 12a + b$$

$$-1 = -6a + b$$

er koefficienten til a 12 i den øverste og -6 i den nederste ligning. Koefficienterne til b er i begge ligninger 1. Dvs. her har vi et ligningssystem, hvor de to koefficienter til den ubekendte b allerede er lige store. Så kan b skaffes af vejen ved ledvist at trække den nederste ligning fra den øverste:

$$8 = 12a + b$$

$$\underline{-1 = -6a + b}$$

$$9 = 12a - (-6a)$$

og vi ser, at b går ud. Tilbage er den simple ligning:

$$9 = 18a, \text{ der giver } a = 0,5$$

I dette tilfælde findes b lettest ved at indsætte a , fx i den øverste ligning. Så får vi:

$$b = 8 - 12 \cdot 0,5 = 2.$$

Følgende eksempel viser hvorledes denne metode kan generaliseres. Vi skal løse:

$$8x - 2y = 10$$

$$5x + 3y = 36$$

Det er ligegyldigt hvilken af de ubekendte vi først skaffer af vejen. Lad os se på y :

$$3 \cdot 8x - 3 \cdot 2y = 3 \cdot 10$$

$$2 \cdot 5x + 2 \cdot 3y = 2 \cdot 36$$

$$24x - 6y = 30$$

$$10x + 6y = 72$$

$$34x = 102$$

$$x = \frac{102}{34} = 3$$

Ganger første ligning igennem med 3 og anden ligning med 2, så koefficienterne til y begge steder blive 6, men med modsat fortegn

Reducerer

Lægger ligningerne sammen ledvist

Isolerer

Vi kan nu indsætte $x = 3$ i den første ligning og finde y . Men var tallet x en brøk, kunne det være besværligt. I stedet kunne vi så bestemme ved at gentage processen:

$$5 \cdot 8x - 5 \cdot 2y = 5 \cdot 10$$

$$8 \cdot 5x + 8 \cdot 3y = 8 \cdot 36$$

$$40x - 10y = 50$$

$$40x + 24y = 288$$

$$-34y = -238$$

$$y = \frac{-238}{-34} = 7$$

Skaffer x af vejen ved at gange første ligning med 5 og anden ligning med 8

Reducerer

Trækker ligningerne fra hinanden ledvist

Isolerer

Konklusion: $x = 3$ og $y = 7$.

Man kan lave kontrol ved at indsætte x og y , og se at ligningerne stemmer:

$$8 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 24 - 14 = 10$$

$$5 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 15 + 21 = 36.$$

Øvelse 3

Løs følgende ligningssystem med anvendelse af lige store koefficienters metode:

$$3x + 2y = -3$$

$$2x - 5y = 55.$$

2. Grafisk repræsentation og grafisk løsning

En ligning af typen $6x - 2y = 5$ med to ukendte (to variable) x og y kan opfattes som en ligning for en ret linje, idet vi kan omskrive til $y = 3x - 2,5$.

Øvelse 4

Ligningen: $y = 3x - 2,5$ er en lineær sammenhæng.

- Hvis vi tænker på de to variable som den uafhængige og den afhængige variable i et koordinatsystem, hvilken linje svarer denne ligning så til?
- Hvordan afgør vi, om et punkt ligger på linjen eller ikke ligger på linjen? Giv selv nogle taleksempler.

Øvelse 5. Flere strategier i ligningsløsning - formelregning, grafisk og brug af solve

Betragt følgende ligningssystem:

$$2x + 9y = 41$$

$$4x - 5y = 13$$

- Hvilke linjer svarer de to ligninger til?
- Hvad er den grafiske betydning af at løse ligningssystemet? Løs ligningssystemet grafisk.
- Løs ligningssystemet med anvendelse af lige store koefficienters metode.
- Løs ligningssystemet med brug af en solve-kommando.

Øvelse 6

Prøv at løse følgende ligningssystemer grafisk, med brug af en solve-kommando og med lige store koefficienters metode:

$$\text{a) } \begin{cases} -6x + 2y = 8 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 9x + 15y = 3 \end{cases}$$

Giv en begrundelse for resultaterne.

Praxis: Regel ved løsning af ligningssystemer:

- Skal vi bestemme to ukendte størrelser, skal vi have to forskellige oplysninger.
- Skal vi bestemme tre ukendte størrelser, skal vi have tre forskellige oplysninger.
- Skal vi bestemme n ukendte størrelser, skal vi have n forskellige oplysninger.

Men hvad er *forskellige oplysninger*. I øvelsen ovenfor var de to oplysninger i nr 2 i virkeligheden ikke forskellige. Hvis den ene oplysning kan fås ud fra den anden ved at gange eller dividere eller på anden måde bruge reglerne for løsning af ligninger, så har vi ikke fået en ny oplysning.

Selv om vi har forskellige oplysninger, er det ikke sikkert at ligningssystemet kan løses. Oplysningerne kan stride mod hinanden. Det så vi a) i øvelsen ovenfor.

Det er normalt ikke en fordel at have flere oplysninger end der er ukendte.

$x = 2$ og $x = 7$ er to ligninger med én ukendt, og der er klart nok ingen løsning.

Øvelse 7. Tre ligninger med to ubekendte

Tre lineære ligninger med to ukendte vil sjældent kunne løses. Kan du ved at se på den grafiske repræsentation forklare hvorfor.

3. Opgaver

Opgave 1

Løs følgende ligningssystemer med substitutionsmetoden

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \end{array}$$

Opgave 2.

Løs følgende ligningssystemer med lige store koefficienters metode

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 8x + 2y = 600 \\ 2x - 12y = 100 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 4x - y = -4 \\ -x + 5y = 20 \end{array} \end{array}$$

Opgave 3

Løs følgende ligningssystemer med lige store koefficienters metode

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 10x + 7y = -8 \\ 15x + 3y = 9 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} -13x + 9y = 2 \\ 17x - 11y = -2 \end{array} \end{array}$$

Opgave 4

Løs følgende ligningssystemer grafisk

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x + y = 12 \\ -2x + y = 8 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 2x + 8y = 100 \\ 4x - 4y = 20 \end{array} \end{array}$$

Opgave 5

Løs følgende ligningssystemer grafisk

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} y = -3x + 30 \\ y = 5x + 12 \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} 34 + 5x = y \\ 10 - 2x = y \end{array} \end{array}$$

Opgave 6

Peter holder åbent hus med gratis morgenmad til kammeraterne. Han har sendt lillebror til bageren efter 12 rundstykket og 8 basser. De kostede 150 kr. Der dukker imidlertid flere op end forventet, så lillebror må af sted igen, denne gang efter 12 basser og 6 rundstykker. Det kostede 147 kr.

a) Hvad kostede i grunden et rundstykke og en basse ?

Opgave 7

Ved et ridestævne var der i alt, hvor vi tæller både mennesker og heste, 190 ben og 68 hoveder.

a) Hvor mange heste og hvor mennesker var der ?

Opgave 8

I en regnebog fra 1608 står følgende opgave: Hvis jeg giver 7 cents til hver af tiggerne uden for døren, ville jeg have 2 cents tilbage til mig selv. Jeg mangler 32 cents i at kunne give tiggerne 9 cents hver.

a) Hvor mange tiggere er der, og hvor mange cents har jeg ?

Opgave 9

I Fibonacci's regnebog (Liber Abaci) fra 1202 findes følgende opgave: Tre mænd fandt en pung indeholdende 23 dinarer. Den første mand sagde til den anden: Hvis jeg tager denne pung har jeg dobbelt så mange penge som du har. Den anden mand sagde til den tredje: Hvis jeg tager denne pung vil jeg have tre gange så mange penge som du har. Den tredje mand sagde til den første: Hvis jeg tager denne pung vil jeg have 4 gange så meget som du har.

a) Hvor mange penge havde hver af dem ?