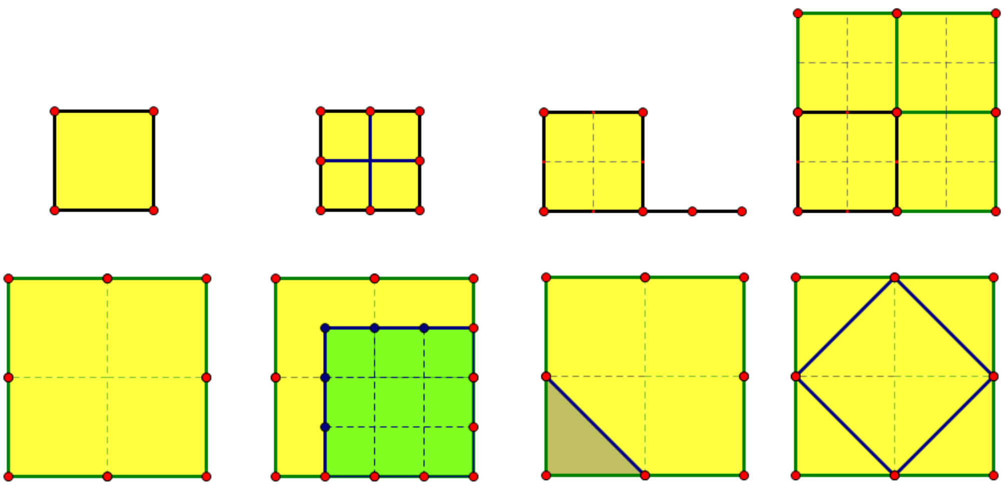
ISBN 9788770668279

Projekt 7.5 Inkommensurable størrelser i græsk matematik og filosofi

I den græske filosof Platons værk *Menon* beskriver han en dialog mellem Sokrates og adelsmanden Menon, og hvor Sokrates på et tidspunkt inddrager en af Menons slaver i samtalen. Dialogen har to hovedpointer.
Platons hensigt med dialogen er at vise, at mennesket er født vidende, og at al erkendelse er *generindring*, dvs. Sokrates lærer ikke slaven noget; det er slaven selv, der genkalder allerede eksisterende viden.
Indholdet i fortællingen handler imidlertid om noget helt centralt for den græske matematik og filosofi, nemlig **opdagelsen af "inkommensurable forhold",** eller som vi i dag ville sige: **Opdagelsen af at der findes irrationale tal.**
Projektet er derfor også i to dele, en A-del hvor vi prøver at følge i Platons tankegang, og en B-del, hvor vi ser nærmere på indholdet i det inkommensurable, og prøver at forstå, hvorfor dette gælder.

A. Er viden generindring? Bliver matematik opdaget eller opfundet?

Øvelse 1
Læs uddraget af dialogen nedenfor. Platon vil have læseren til at følge med på forskellige geometrisk tegninger, som Sokrates tegner i støvet foran sig med sine fødder. Dialogen er ikke illustreret. Både forfatter, hovedpersoner og læser forventes med andre ord at kende til det bevis, som slaven skal generindre. Inddrag undervejs i din læsning nedenstående figurer: Hvor skulle figurerne sættes ind, hvis dialogen var illustreret



t

Uddrag af Platons dialog *Menon*

(*et større uddrag kan findes* [her](#))

SOKRATES: Sig mig så dreng, ved du, at et kvadratisk areal ser sådan ud?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Et kvadratisk areal er altså noget, der har alle fire sider lige store, og der er fire.
SLAVE: Bestemt.
SOKRATES: Har det så ikke også disse sider på tværs lige store?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Sådan et kvadrat kan vel både være større og mindre?
SLAVE: Ok ja.
SOKRATES: Hvis denne side er to fod lang, og den her to fod, hvor mange fod vil så hele kvadratet være?
Tænk sådan her: Hvis det var to fod dér og kun én dér, så ville arealet være én gange to fod, ikke?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Nu er det jo to fod også dér, så bliver det to gange to, ikke?
SLAVE: Det gør det!
SOKRATES: Altså to gange to fod?
SLAVE: Ja.

ISBN 9788770668279

SOKRATES: Hvor meget er to gange to fod? Regn efter og sig mig det.
SLAVE: Fire, Sokrates.
SOKRATES: Der må vel findes et andet areal af samme slags, der er dobbelt så stort og med lige store sider, ligesom dette her?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Hvor mange fod bliver det på?
SLAVE: Otte.
SOKRATES: Nemlig! Prøv så at sige, hvor lang hver linie i det skal være. I dette kvadrat er den to. Hvad skal den være i et, der er dobbelt så stort?
SLAVE: Det er klart, at den skal være dobbelt så stor, Sokrates.
…
SOKRATES: Nu skal du se ham generindre lidt efter lidt, sådan som man skal generindre. – Nå du, sig mig så: Du påstår altså, at der kommer et dobbelt så stort areal ud af en dobbelt så stor linie? Jeg mener sådan ét, ikke langt på den ene side og kort på den anden. Det skal være ens på alle leder, ligesom dette her, men dobbelt så stort, på otte fod. Se efter, om du stadig synes, at det kommer af den dobbelte linie.
SLAVE: Det gør jeg.
SOKRATES: Bliver den ikke dobbelt så stor som denne her, hvis vi lægger en anden til, der er lige så lang?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Af denne her vil der blive et areal på otte fod, hvis de fire bliver så store, siger du?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Lad os så tegne de fire lige store linier fra denne her. Det må vel så blive det her ottefodskvadrat, som du siger?
SLAVE: Ja bestemt
SOKRATES: Har vi ikke i dette kvadrat de fire, som hver især er lig med dette kvadrat?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Hvor stort bliver det? Fire gange så stort, ikke?
SLAVE: Jo selvfølgelig.
SOKRATES: Er det firedobbelte det samme som det dobbelte?
SLAVE: Nej, det ved Zeus det ikke er!
SOKRATES: Men hvor meget større?
SLAVE: Fire gange større.
SOKRATES: Der kommer altså ikke det dobbelte areal ud af den dobbelte linie, min dreng, men det firedobbelte.
SLAVE: Det er rigtigt.
SOKRATES: Fire gange fire er seksten, ikke?
SLAVE: Jo.
…
SOKRATES: Linien til kvadratet på otte fod bør altså være større end den på to fod og mindre end den på fire fod.
SLAVE: Det må den.
SOKRATES: Prøv nu at sige, hvor lang du mener, den skal være.
SLAVE: Tre fod!
SOKRATES: Hvis den skal være på tre fod, tror du så ikke, at vi skal lægge det halve til her og få tre fod? Her er to fod, og her er én. Og der er også to fod, og der er én. Og her kommer det kvadrat, som du siger.
SLAVE: Det er klart.
SOKRATES: Men hvor meget er tre gange tre fod?
SLAVE: Ni.
SOKRATES: Men hvad skulle det dobbelte være i fod?
SLAVE: Otte.
SOKRATES: Så kommer der altså ikke et otte fods kvadrat ud af en side på tre fod?
SLAVE: Næh, det gør der ikke!

ISBN 9788770668279

…
SOKRATES: Kan du igen se, Menon, hvor han er nået til i sin generindring? For først vidste han ikke, hvad der er siden i et areal på otte fod – lige så lidt som han ved det endnu – men dengang troede han, at han vidste det, og han svarede glad og gerne, som om han vidste det; og han mente ikke at være i tvivl. Nu derimod mener han at være i tvivl, og lige så vel som han ikke ved det, tror han ikke at vide det.
MENON: Det har du ret i.
…

SOKRATES: Se nu, hvad han vil finde ud af på baggrund af denne tvivl. Jeg spørger ham kun og lærer ham ingenting. Hold godt øje med, om jeg lærer ham noget og gennemgår det for ham og ikke bare spørger om hans meninger. – Nå du, sig mig så: Her har vi et kvadrat på fire fod, ikke? Er du med?
SLAVE: Det er jeg!
SOKRATES: Vi kan vel lægge et til, der er lige så stort?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Og et tredje, der er lige så stort som hver af de andre?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Kan vi så ikke også fylde ud i hjørnet dér?
SLAVE: Selvfølgelig.
SOKRATES: Hvad kan det være andet end fire lige store kvadrater?
SLAVE: Næh!
SOKRATES: Hvad så: Hvor meget er hele det dér større end det dér?
SLAVE: Fire gange så stort.
SOKRATES: Men vi skulle jo have noget, der var dobbelt så stort. Kan du huske det?
SLAVE: Ok ja.
SOKRATES: Denne linie fra det ene hjørne til det andet, deler den ikke hvert af arealerne lige over?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Bliver disse fire linier så ikke lige store, de der omslutter dette areal her?
SLAVE: Det gør de, jo.
SOKRATES: Se nu godt efter: Hvor stort er dette areal?
SLAVE: Jeg er ikke med!
SOKRATES: Der er fire kvadrater, og hver linie har delt hver af dem halvt over. Ikke også?
SLAVE: Jo.
SOKRATES: Hvor mange af den slags er der i dette?
SLAVE: Fire.
SOKRATES: Og hvor mange i dette?
SLAVE: To.
SOKRATES: Hvor meget er fire større end to?
SLAVE: To gange så stor.
SOKRATES: Hvor meget bliver det dér så på?
SLAVE: Otte fod.
SOKRATES: Og ud fra hvilken linie?
SLAVE: Den dér!
SOKRATES: Altså ud fra den linie, der går fra hjørne til hjørne i firefodsarealet?
SLAVE: Ja.
SOKRATES: Det kalder kloge folk en diagonal. Derfor, hvis den hedder en diagonal, så er det som du, Menons slavedreng, fastslår: Det dobbelte areal fremkommer af diagonalen.
SLAVE: Ja sådan er det bestemt, Sokrates.
oversat af Chr. Gorm Tortzen

L&R Uddannelse
EGMONT

Øvelse 2
Platon og Sokrates mener, at eksemplet kan generaliseres, så ny viden i virkeligheden er generindring.

a) Vælg et af de beviser, du kender for Pythagoras sætning, og overvej om du ville kunne gennemføre en dialog som i Menon, hvor du får en, der ikke kender til beviset, til at indse rigtigheden heraf.
b) Vælg en sætning om modellerne, fx sætningen om beregning af hældningskoefficienten eller sætningen om beregning af fordoblingskonstanten og overvej om du ville kunne gennemføre en dialog som i Menon, hvor du får en, der ikke kender til beviset, til at indse rigtigheden heraf.
c) Diskuter i klassen Platons påstand om, at viden er generindring
d) Diskuter dee to synspunkter:
   - Matematik er noget der findes i forvejen, og som vi opdager
   - Matematik er ny viden som menneskene opfinder

B. Inkommensurable størrelser

Menon-dialogen handler altså om det overordnede spørgsmål: Hvordan opnår vi ny viden. Men samtidig anvender Platon som illustration en af den tidlige græske matematiks vigtige opdagelser nemlig, at to kvadraters arealer kan være udtrykt i hele tal fx som her 4 og 8 kvadratenheder, mens deres sider ikke nødvendigvis kan det. Fx som her, hvor sidelængden i 4-kvadratet er 2, mens sidelængden i 8-kvadratet jo – med vores moderne metoder – bliver $\sqrt{8}$, som er et irrationalt tal. Lad os prøve at gå tuio problemet geometrisk, som grækerne ville.

Eksempel. Inkommensurable størrelser

To størrelser, der ikke kan deles et helt antal gange med samme måleenhed kaldes *inkommensurable*. Tal som $\frac{5}{17}$ og $\frac{2}{11}$ *har* en fælles måleenhed, nemlig tallet $\frac{1}{17\cdot 11}=\frac{1}{187}$. For Lægger vi denne størrelse 55 gange efter hinanden får vi $\frac{55}{187}=\frac{5}{17}$, og lægger vi 34 af dem får vi $\frac{34}{187}=\frac{2}{11}$. Dvs. de to tal er *kommensurable*. Det er klart, dette kan gøres generelt, så alle brøker er kommensurable.
Men tal som $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, er ikke kommensurable med noget helt tal, dvs. de kan ikke skrives som en brøk. I afsnit 2.3 gives et algebraisk argument for, at tal som $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$ ikke er kommensurable med tallet 1. Men den græske matematiske tanke var båret af geometrien, så i næste øvelse giver vi et geometrisk argument.

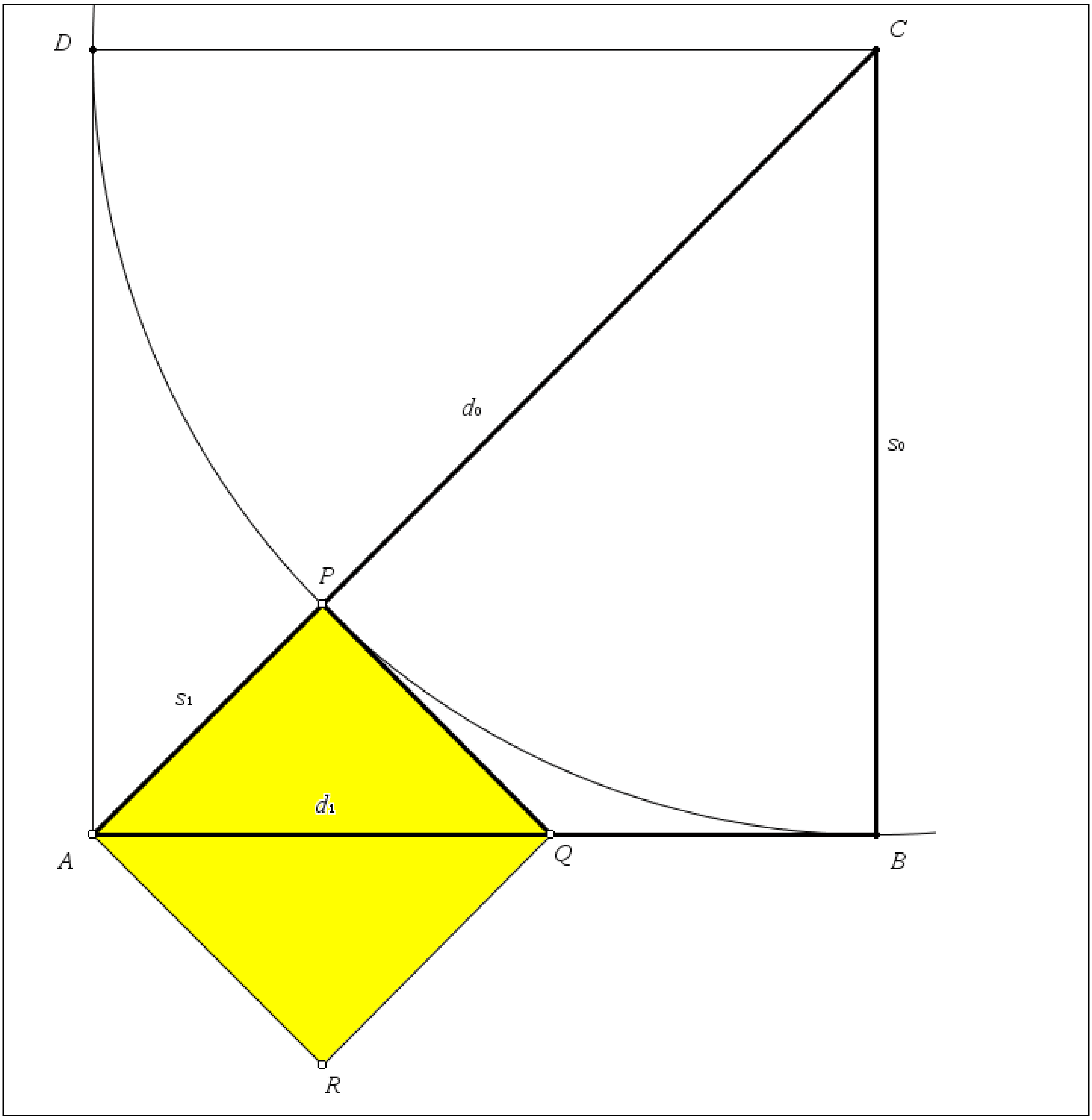
Øvelse 3. Geometrisk argument for, at siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable

Vi vil nu prøve at forstå et af de klassiske argumenter for hvorfor siden og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Du opfordres til at tegne med i dit dynamiske geometriprogram!
Udgangspunktet er et kvadrat med en side s_0 og en diagonal d_0. Hvis disse er kommensurable, findes et linjestykke af længde *a*, som de kan måles med, dvs der findes hele tal *k* og *h*, således at:

$$s_0 = k\cdot a \quad \text{og} \quad d_0 = h\cdot a$$

a) Vis, at enhver kombination af s_0 og d_0 af formen: $n\cdot s_0 + m\cdot d_0$, hvor n og m er hele tal, også kan måles med *a*.
b) Nu vil vi gennemføre en konstruktion, der faktisk er en geometrisk version af det man kalder for *Euklids Algoritme*. Du behøver ikke at kende denne metode for at følge konstruktion.

Betragt illustrationen og konstruer selv en tilsvarende:



- Først konstrueres kvadratet *ABCD*, fx med sidelængde 2, idet vi da ved, at diagonalen har længde $\sqrt{8}$, men længden har ingen betydning for det følgende.
- Tegn diagonalen *AC* og afsæt her på et stykke svarende til sidelængden s_0.
- Argumenter for, at $AP = d_0 - s_0$. Dette kaldes s_1 og skal udgøre sidelængden i et nyt kvadrat (det grønne).
- Betragt firkanten *CBQP*, og argumenter for, at *BQ* = *QP*, fx ved at se på kongruente trekanter.
- Anvend dette til at argumentere for, at diagonalen i det nye kvadrat er:

$$d_1 = s_0 - s_1 = 2s_0 - d_0$$

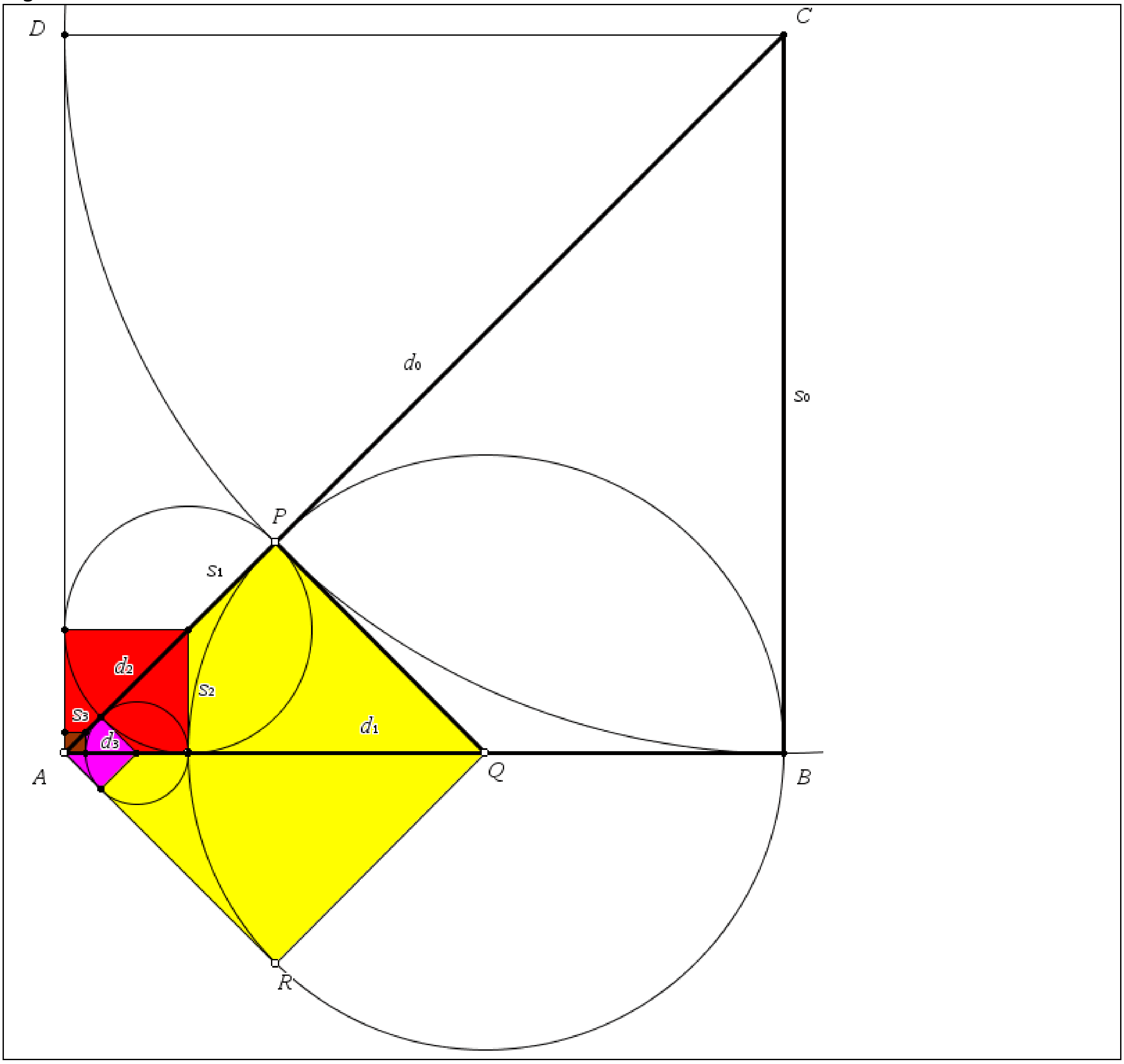
Vi lægger mærke til, at konstruktionen førte os fra det oprindelige kvadrat til et nyt i en række trin, der må kunne gentages.

Endvidere opnåede vi en formel for længden af den nye side og den nye diagonal, der knyttede dette til de oprindelige:

$$s_1 = d_0 - s_0 \quad \text{og} \quad d_1 = 2s_0 - d_0 \quad (*)$$

ISBN 9788770668279

Vi arbejder os nu ned mod hjørnet *A* idet vi gentager konstruktionen igen og igen. Dette kaldes i matematik en *iterativ* proces, og en sådan konstruktion eller beregning, der kan gentages "mekanisk", kaldes en *algoritme*.



c) Forklar ud fra formlerne (*), at vi i næste trin får:

$$s_2 = d_1 - s_1 = 3s_0 - 2d_0$$
$$d_2 = 2s_1 - d_1 = 3d_0 - 4s_0$$

d) Forklar konstruktionen, du ser på illustrationen og gennemfør selv en tilsvarende.

e) Opskriv formlerne for sider og diagonaler i de næste to trin. Kan du se systemet?

f) Konstruktionen viser, at $s_n \to 0$ og $d_n \to 0$, når $n \to \infty$. Samtidig viser overvejelserne i c), at vi på ethvert trin kan udtrykke sidelængde og diagonallængde som en kombination af s_0 og d_0. Vis ved brug af punkt a) at der derfor findes *hele tal* t_n og u_n, så

g) $s_n = t_n \cdot a$ og $d_n = u_n \cdot a$, hvor a er længden af det linjestykke, s_0 og d_0 kan måles med.

h) Før nu antagelsen om at sidelængde og diagonal er kommensurable til en modstrid.

ISBN 9788770668279

Allerede pythagoræerne havde - som vi omtalte i afsnit 1 – opnået denne indsigt i, at der findes inkommensurable størrelser. Det var således en viden, der var rodfæstet i den græske matematik, for hvis ikke der var inkommensurable størrelser ville begrebet kommensurabel være et tomt begreb. Men selv om de græske matematikere og filosoffer rådede over begreber, der gav dem muligheder for at afvise alt for forenklede beskrivelser af sammenhænge i universet, så var det åbenbart svært at anvende denne viden uden for matematikkens verden som følgende øvelse illustrerer.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

C. Ekstra: Inkommensurabilitet i religion og matematik: Det Store År og verdens cykliske udvikling

Læs følgende uddrag af Olaf Pedersens værk, *Naturerkendelse og Theologi*, og diskuter forestillingen om det Store År (et større uddrag af dette værk findes **her**)

Diskuter forestillingen om *Det store år*, idet du inddrager begrebet inkommensurabilitet.

> En speciel konsekvens af astralreligionen og astrologien var læren om *det Store År*, der blev stadig mere udbredt med en næsten religiøs kraft og bemægtigede sig både læg og lærd som en almen ramme for forståelsen af historiens gang. Vi hører første gang herom hos pythagoræerne, som ifølge Aristoteles' elev Eudemos:
>
> > *troede, at begivenheder sker i en aritmetisk cyklus, og at jeg skal tale med dig igen, sådan som du nu sidder, med denne pegepind i min hånd, og at alt andet vil være akkurat, som det er nu, — da er det plausibelt at tro, at også tiden vil være den samme som tiden nu.*
>
> Det astronomiske grundlag for denne tanke om historiens cykliske karakter er det faktum, at alle planetbevægelser er periodiske. Hver planet vender tilbage til den samme position efter en vis tid, som kan variere en smule på grund af anomalier, men som dog har en bestemt middelværdi. I det 4. årh. f.Kr. var disse middelværdier nøje kendt af babylonierne, medens grækerne ikke vidste meget om dem. Ikke desto mindre hævdede Platon, at
>
> > *det er muligt at indse, at det fuldstændige tal for tiden udtømmer det fuldstændige år, når alle otte omdrejninger tillige med deres respektive hastigheder ender på samme tidspunkt, idet de kommer til det afgørende punkt målt på Den Samme og Ensartet Bevægede [dvs. fiksstjernehimlen].*
>
> Her forudsættes det altså, at periodiciteten af planetbevægelserne vil medføre, at alle planeter efter en vis tids forløb vil vende tilbage til den samme konfiguration relativt til hinanden og til firmamentet. Når denne astronomiske antagelse kombineres med den astrologiske tro på planeterne som entydige årsager til jordiske begivenheder, følger det, at også rækkefølgen af disse begivenheder vil være periodisk, og at det samme vil ske efter udløbet af *det Store År*, som sker nu. Trods alle Platons sarkastiske bemærkninger om den vulgære astrologi, der netop på denne tid begyndte at gennemtrænge den græske verden, blev troen på *det Store År* et vigtigt element i hans tænkning. For eksempel hævdede han i *Lovene*, at gennem en umådelig lang tid vil tusinder og atter tusinder af stater og samfund være opstået og igen gået til grunde med alle deres redskaber og andre opfindelser. ….
>
> Også Aristoteles godtog tanken om det Store År, omend han synes at have forladt den astrologiske begrundelse til fordel for et mere metafysisk argument baseret på det princip, at alt hvad der bliver til, indeholder spiren til sin egen undergang i sin egen natur. Derfor
>
> > *må tilblivelse nødvendigvis være cyklisk. Følgeligt er det nødvendigt, at den gentages periodisk i fremtiden. Hvis en ting nødvendigvis eksisterer i dette øjeblik, må den også nødvendigvis have eksisteret på et tidligere tidspunkt, akkurat som det er nødvendigt, at den kommer igen uendeligt mange gange i fremtiden.*
>
> Da dette gælder både i den materielle og den intellektuelle verden, er det sandsynligt, at de samme håndværk og kunster tidligere blev udviklet til fuldkommenhed og igen gik tabt. Blandt mennesker vil også de samme anskuelser og meninger fremkomme uendelig mange gange. En snurrig konsekvens af denne opfattelse er Aristoteles antydning af, at folkelige ordsprog muligvis er relikter af en visdom i en tidligere, ikke længere eksisterende kultur.
>
> I det 3. årh. f.Kr. populariseredes tanken om *det Store År* i Middelhavsverdenen …. men det er næsten overflødigt at bemærke, at filosofferne aldrig nåede til enighed om længden af *det Store År*. Nogle mente, at det var så kort som i 5.000 almindelige solår, andre at det omfattede 432.000 år. Den sidste værdi er tydeligvis af babylonsk oprindelse, idet den er lig med det runde tal $2 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 60$ i det babyloniske 60 talsystem. Denne præcise overensstemmelse er et godt eksempel på det faktum, at kulturelle påvirkninger ofte kan fastslås på grundlag af numerisk materiale i matematik og astronomi.