ISBN 9788770668279

Projekt 7.4. Rationale tal – brøker og decimaltal

Hvad er en brøk?

Når vi taler om *brøker* i dette projekt, mener vi *tal* på formen $\frac{a}{b}$, hvor *a* og *b* er hele tal (og $b \neq 0$), fx

$\frac{2}{3}$, $\frac{105}{7}$, $\frac{-3}{13}$ og $\frac{5}{1}$.

Øvelse 1

Hvordan vil du forklare, hvad $\frac{5}{7}$ er?

Brøker har været kendt og anvendt siden det gamle Ægyptens tid, ca. 2500 fvt. Vi kan af de få matematiske tekster, der er bevaret se, hvordan de har opfattet brøker, selv om de ikke har skrevet noget teoretisk om det. Det fundamentale begreb var *stambrøker*. som er alle brøker med et et-tal i tælleren:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Den eneste brøk, de udover disse var tryg ved at bruge var $\frac{2}{3}$.

En stambrøk som $\frac{1}{10}$ er forholdsvis let at forstå. Man deler en kage, et brød eller en arv i 10 lige store dele. Hver del er så $\frac{1}{10}$. Man skulle tro, det så var let at forklare, hvad man skal forstå ved fx $\frac{3}{10}$. Men sådan så de ikke på det. Tal af typen $\frac{5}{7}$ og $\frac{3}{10}$ omskrev de konsekvent til summer af *forskellige* stambrøker:

$$\frac{3}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$$

Øvelse 2

Omskriv brøkerne $\frac{11}{16}$ og $\frac{11}{17}$ til summer af forskellige stambrøker.
Bemærk: De enkelte brøker kan opskrives på flere måder som summer af forskellige stambrøker.

Sådanne omskrivninger har indgået i deres undervisning, og til praktisk brug havde de *tabeller* til rådighed, fx en tabel over hvordan man kan omskrive brøker, der er skrevet på formen $\frac{2}{n}$. (Tabellen er gengivet i projekt 8.1 om ægyptisk matematik).

Senere i matematikhistorien accepterede man brøker på formen $\frac{5}{7}$ og $\frac{3}{10}$. Men så var man nødt til at indføre en række brøkregler for regning med disse tal. Brøkreglerne er omtalt i *Grundbogen* kapitel 7, afsnit 2.3. En af vanskelighederne ved at håndtere brøker er at overskue hvor stor et tal er, eller hvilket af to tal, der er størst.

Øvelse 3

Hvordan vil du - uden brug af lommeregner - afgøre, hvilket af tallene $\frac{11}{17}$ og $\frac{15}{23}$, der er størst?

ISBN 9788770668279

Hvad er et decimaltal?

I 1585 løste den hollandske matematiker Simon Stevin vanskelighederne ved brøkregningen ved ganske enkelt at afskaffe dem! Han indførte decimaltallene i stedet, hvor tallene efter kommaet får betydning ud fra dets placering, ligesom det gælder for tallene før kommaet. I tallet 345,927 betyder 3-tallet 3 hundreder og 7.tallet betyder 7 tusindedele. Samlet:

$$345,927 = 3\cdot 100 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1 + 9\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{1}{100} + 7\cdot\frac{1}{1000}$$

Skrevet med potenser bliver det:

$$345,927 = 3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 9\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3}$$

Stevin kaldte sin bog for *Tierne* og gav den undertitlen: *Undervisning i hvorledes alle beregninger, der er brug for i forretningslivet, kan udføres alene med brug af hele tal, uden brug af brøker*. Bogen blev hurtigt oversat til de forskellige europæiske sprog.

Til al praktisk brug er Stevins metode tilstrækkelig. Når tal er skrevet som decimaltal, kan man med ét blik se, hvilket tal, der er størst:

$$\frac{11}{17} = 0,646058\ldots$$

$$\frac{15}{23} = 0,652173\ldots$$

Når man skal løse et praktisk problem, hvor man kan nøjes fx tre decimaler, er det en let sag at udregne summen af to tal. Det kan alle lære. Stevin demonstrerede også hvordan man kan løse gange- og divisionsstykker, og decimaltallene var således et stort demokratisk fremskridt, da almindelige mennesker nu kunne lære at regne.

Er alle decimaltal brøker?

Når man ser tal som $\frac{11}{17}$ og $\frac{15}{23}$ skrevet som decimaltal rejser der sig to spørgsmål:

- Hvad betyder prikkerne: $\frac{11}{17} = 0,646058\ldots$?
- Alle brøker kan skrives som decimaltal, men er alle decimaltal brøker?

Øvelse 4

Skriv følgende tal som decimaltal:

a) $\frac{4}{9}$, b) $\frac{7}{8}$, c) $\frac{3}{11}$, d) $\frac{409}{330}$, e) $\frac{17}{13}$, f) $\frac{12}{25}$

Kan du se et system i det? Hvilket?
Er du i tvivl, så lav selv flere eksempler.

Nogle brøker bliver åbenbart skrevet som *endelige decimaltal*, hvormed vi mener tal som:

$\frac{5}{8} = 0,625$ og $\frac{14}{25} = 0,56$

Andre brøker bliver tilsyneladende skrevet som *periodiske decimaltal*, hvormed vi mener tal som:

$\frac{2}{9} = 0,2222\ldots$ og $\frac{5}{7} = 0,714285714285\ldots$

ISBN 9788770668279

Den første har perioden 1, den anden har perioden 6. Vi skriver disse tal således:

$$\frac{2}{9} = 0,\overline{2} \qquad \text{og} \qquad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$$

For nogle brøker begynder perioden først efter nogle cifre:

$$\frac{409}{330} = 1,2393939\ldots = 1,2\overline{39}$$

Dette kalder vi også et periodisk decimaltal.

Det ser altså ud som der gælder følgende:

Sætning 1
Alle brøker kan skrives som
- enten et endeligt decimaltal
- eller et periodisk decimaltal

Bevis
Beviset består af de to taleksempler herunder, samt øvelserne 5-7. Først ser vi på et par taleksempler.

1. Omskrivningen af $\frac{13}{5}$ til decimaltal sker ved at udføre divisionen 13:5. Det kan se således ud:

$$\begin{array}{r|c|l}
5 & 13 & 2,6 \\ \hline
 & 10 & \\ \cline{2-2}
 & 30 & \\
 & 30 & \\ \cline{2-2}
 & 0 & \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

5 går op i 30, hvorfor resten bliver 0. Fortsatte vi divisionen ville vi bare få nuller.

ISBN 9788770668279

2. Omskrivningen af $\frac{5}{7}$ til decimaltal sker ved at udføre divisionen 5:7. Det kan se således ud:

7	5	0,7142857…
	0	
	50	
	49	
	10	
	7	
	30	
	28	
	20	
	14	
	60	
	56	
	40	
	35	
	50	
	49	
	1	
	……	

Øvelse 5

a) Opskriv de to divisioner som du selv har lært det i folkeskolen.

b) Hvorfor kan vi i den sidste division være sikre på, at cifrene gentages?

Øvelse 6

Hver gang divisionen med 7 ikke gik op, fik vi en rest, og vi trak et nyt 0 ned. Første gang var det 5.

a) Hvor mange forskellige rester kan vi højst få ved division med 7?

b) Hvor mange forskellige rester kan vi højst få ved division med 13?

c) Hvor lang kan perioden højst være for decimaltallet svarende til $\frac{157}{23}$?

Øvelse 7

Gennemfør nu argumentet for, at en brøk $\frac{a}{b}$ altid kan skrives som:

- enten et endeligt decimaltal
- eller et periodisk decimaltal.

Hvor lang kan perioden højst være?

Det er således *ikke alle* decimaltal, vi får frem, når vi omskriver brøkerne. Hvis et decimaltal hverken er endeligt eller er periodisk, kan det ikke være en brøk, for så ville det ved omskrivning give noget periodisk.

Eksempel på ikke periodiske decimaltal

Tallet 2,3030030003000030000000300… er skrevet op, så vi ser systemet, men dette system er ikke periodisk.

Tallet 1,234567891011121314151 6… har et andet system, men er heller ikke periodisk.

ISBN 9788770668279

Øvelse 8
Opskriv tre decimaltal, der ikke er brøker.

Men er vi nu sikre på, at alle endelige eller periodiske decimaltal kan skrives som en brøk? Det siger følgende sætning

Sætning 2
Ethvert decimaltal, der er endeligt eller periodisk, kan skrives som en brøk.

Bemærk: De hele tal regnes også med til brøkerne – her er nævneren blot 1.

Bevis
Vi illustrerer først omskrivningen med et par taleksempler.

1. Tallet 73,49 omskrives til en brøk ved at gange med 100 og dernæst dividere med 100:

$$73,49 = \frac{73,49 \cdot 100}{100} = \frac{7349}{100}$$

Vi valgte 100 fordi der er to pladser efter kommaet.

2. Tallet 2,5718718… kan omskrives til en brøk på følgende måde:
Kald tallet for *x* og gange tallet med en sådan 10-potens, at kommaet flyttes så en hel periode rykkes frem foran kommaet. Her skal vi gange med 10 000.
Gange derefter tallet med en sådan 10-potens at de eventuelle cifre efter kommaet, der ikke hører til perioden rykker frem foran kommaet. Her skal ganges med 10.
Er det rene perioder efter kommaet skal der ikke ganges med noget. Stil nu de to gangestykker op således og træk fra:

$$\begin{aligned} 10000x &= 25718,718718\ldots \\ 10x &= 25,718718\ldots \\ \hline 9990x &= 25693 \\ x &= \frac{25693}{9990} \end{aligned}$$

Konklusion: 2,5718718… = $\frac{25693}{9990}$

Øvelse 9
Gennemfør nu et generelt argument for, at:
a) Et endeligt decimaltal, hvor antallet af decimaler er *k,* kan skrives som en brøk.
b) Et periodisk decimaltal, hvor perioden begynder efter *k* decimaler, og hvor perioden er på p cifre, kan skrives som en brøk.

Øvelse 10
Omskriv følgende til brøker:
a) 321,292
b) $0,\overline{369}$
c) $52,93\overline{2}$

ISBN 9788770668279

Lad os prøve at anvende metoden på det periodiske decimaltal $0,\overline{9}$

$$\begin{aligned} 10x &= 9,9999\ldots \\ x &= 0,9999\ldots \\ \hline 9x &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Konklusion: 0,9999… = 1

Forklaringen på dette mærkelige fænomen kan vi finde ved at se på tallinjen. Hvis de to tal, 0,9999… og 1 var to forskellige tal, så måtte de ligge med en lille afstand på tallinjen. Men så ville der ligge nogle tal imellem dem, fx deres gennemsnit. Det er imidlertid klart, at der ikke kan presses et tal ind imellem de to

Øvelse 11
Omskriv følgende tal til brøker (eller hele tal):

a) $5,\overline{9}$

b) $7,6\overline{9}$

De samlede konklusion på de to sætninger er altså:

Mængden af alle brøker er den samme som mængden af alle endelige eller periodiske decimaltal. Denne mængde kaldes for mængden af rationale tal.

De irrationale tal

Vi så undervejs nogle eksempler på decimaltal, som ikke er periodiske. Der findes altså tal som ikke er rationale. Hvis vi kun anvender de rationale tal, så er tallinjen fuld af huller. Disse andre tal kalder vi for *de irrationale tal*. Irrationale tal er altså ikke-periodiske decimaltal.

Det var den tyske matematiker Dedekind, der i 1872 første gang analyserede disse irrationale tal. På A-niveau vender vi tilbage til dette, her giver vi blot nogle eksempler.

Eksempler på irrationale tal

a) Tallet π, forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter, er irrationalt. Man tester af og til computeres regnekraft ved at se, hvor mange af π's decimaler de kan beregne. Den simpleste tanke kunne være at beregne omkredsen af en hundredkant, en millionkant, en milliardkant osv., hvor disse polygoner dels er omskrevet og dels indskrevet i cirklen. Men der er også meget mere effektive måder at regne på π's decimaler. Computerne lader man køre i længere tid, fx flere døgn. Så der kommer hele tiden nye rekorder. Det er meget svært og betydeligt over gymnasieniveau at bevise, at π er irrational. I filmen Star Trek sættes en computer skak-mat ved at bede den beregne π's decimaler, se **her.** Tallet e, grundtallet for den naturlige eksponentialfunktion, er irrational. Det er svært at bevise, men man kan godt sætte sig ind i et bevis herfor på A-niveau.

b) Alle tallene $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \ldots\ ,\sqrt{n},\ \ldots$, hvor *n* ikke er kvadrattal er irrationale. Det kommer vi nærmere ind på i projekt 7.5.