ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 7.3 Formler og opgaveløsning før symbolernes tid

Symboler er noget forholdsvis nyt i matematik. Der er blevet undervist i matematik i over 4000 år, men det er først inden for de sidste 400 år, man er begyndt på systematisk at bruge symboler som +, - og = og bruge bogstaver som x, y og z eller a, b og c til at repræsentere tal.
Før symbolernes tid skrev man det hele med ord. Man skrev "er lig med", "plus" osv, og en ukendt størrelse blev fx betegnet "tingen". Matematikbøger var ofte fyldt med gennemregnede eksempler der fungerede som en slags manualer: Følg denne procedure for at løse dette problem. Selv om metoderne ikke blev formuleret i et formelsprog, så kendte matematikerne i disse samfund de generelle regler, for deres opskrifter virkede. Det gælder i alle de store kulturer, hvor man har anvendt matematik.
Når man ikke kan indføre et x til at repræsentere den ukendte størrelse fandt man andre metoder. Det er interessant at se, at man i stort set alle kulturer har dyrket forholdsregning, som vi kender fra ensvinklede trekanter, som en af de vigtigste metoder i matematik. Denne disciplin blev videreudviklet så den kunne hjælpe til at løse ret indviklede problemer, og den spille en stor rolle i den danske folkeskole helt op til omkring 1960. Dengang havde man to fag, regning og matematik, og man måtte ikke bruge symboler som et ukendt x i regning! Det kan godt tage lang tid, før nye metoder slår igennem.
I det følgende præsenteres du for en række opgaver fra tiden før symbolerne. Vælg nogle ud og prøv i første omgang at løse dem uden brug af symboler. Anvend dernæst moderne metoder, indfør passende variable og opstil ligninger.

Eksempler fra den kinesiske bog *De ni kapitler om den matematiske kunst*.
Bogen er en samling af en række forskellige bidrag fra kinesiske matematikere, skrevet i perioden fra ca. 1000 fvt til 200 fvt. Samlingen er blevet udgivet omkring 200 fvt og indeholder flere ret avancerede bidrag. På følgende adresse findes en kommenteret udgave af bogen:
http://books.google.dk/books?id=eiTJHRGTG6YC&printsec=frontcover&dq=nine+chapters&source=bl&ots=i3SaSdrY1Q&sig=KzaESVfXlTPhKma9i7-steQ0nbM&hl=da&ei=YOv2TIHnDMaBOoS4jJ4I&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=10&ved=0CFQQ6AEwCQ#v=onepage&q&f=false
På St Andrews Universitetets findes materialer om de fleste emner i historisk matematik. Kinesisk matematik er behandlet på:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Chinese.html
Her ser vi på et par forholdsvis enkle problemer. De findes i næsten samme form mange steder i verden og er opstået uafhængig af hinanden. Den første opgave findes næsten identisk hos Piero della Fransesca, se nedenfor.
1. (problem nr. 26 i kap 6)
Et vandbassin får tilført vand fra 5 kanaler. Hvis alene den første kanal er åben, kan bassinet fyldes op på 1/3 døgn. Den anden kanal alene kan fylde bassinet på 1 dag, den tredje alene på 2½ dag, den fjerde alene på 3 dage og den femte alene på 5 dage. Hvis nu alle kanaler er åbne, hvor lang tid tage det så at fylde bassinet.
2. (problem nr. 27 i kap 6)
En mand har en del ris med på en rejse. Han passerer tre toldstationer. Ved den første skal han betale en tredjedel af risen. Ved den anden skal han betale 1/5 af hvad der er tilbage. Ved den tredje skal han betale 1/7 af hvad der er tilbage. Da han er kommet igennem har han 5 pund ris tilbage. Hvor meget ris havde han fra starten?
(Oversat fra Victor Katz, *A History of Mathematics* s 36)

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668279

Da romerriget gik under flyttede det videnskabelige centrum i vores del af verden til Bagdad. Mange af de græske værker landede her, de blev oversat til arabisk og siden fra 1100-talet og frem oversat tilbage til græsk og latin. Arabiske matematikere og astronomer gav nye bidrag til matematikkens udvikling. Det vender vi tilbage til i B-bogen. På adressen her er der en introduktion til den arabiske matematik.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Arabs.html

Eksempler fra bogen *Liber Abaci* (Regnebogen) af Leonardo af Pisa (Fibonacci).
Leonardo af Pisa er den første store matematiker i Europa efter middelalderen. Han er i eftertiden blevet mest kendt under navnet Fibonacci, og vi vil i B-bogen vende tilbage til ham og specielt de Fibonaccital, der har fået navn efter ham. Hans kendteste værk, bogen Liber Abacci, udkom i 1202, kort efter han var vendt tilbage til Pisa efter en længere udlandsrejse. Han havde på sin rejse stiftet bekendtskab med den indiske matematik, og deres måde at skrive tallene på. Bogens første kapitel åbner med følgende sekvens:
Der er 9 symboler i det indiske talsystem: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Med disse 9 cifre og med dette tegn: 0, kan et hvilket som helst tal skrives.
En del af bogen findes i engelsk oversættelse her:
http://books.google.dk/books?id=PilhoGJeKBUC&printsec=frontcover&dq=liber+abaci&source=bl&ots=LjoSUZk8S4&sig=-rCJUUIdQxywgyltT7CSJqaBkEk&hl=da&ei=tt32TIqVNsGeOvK0oJQI&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=9&ved=0CDsQ6AEwCA#v=onepage&q&f=false

Bogen er forholdsvis systematisk opbygget og er fyldt med opskrifter på at løse ligninger af enhver art. Men et godt stykke inde i bogen finder vi det mest berømte af alle Fibonaccis problemer, det såkaldte *Kaninproblem* placeret mellem et afsnit om de såkaldte *perfekte tal* (tal der som 6 og 28 er lig med summen af alle tal der går op i tallet), og et efterfølgende afsnit om at løse 4 ligninger med 4 ubekendte. Vi starter med to af bogens første opgaver, og gengiver bagefter *Kaninproblemet*, som det står i bogen.

1. To tårne står med 50 fods afstand. Det ene tårn er 30 m højt, det andet er 20 meter højt. I hvert tårn sidder der en fugl. Hvis fuglene letter på samme til og flyver med samme hastighed, så vil de præcis samtidig nå et vandreservoir, der står mellem de to tårne. Hvor står vandreservoiret i forhold til tårnene?

2. En købmand, der handlede i Lucca, fordoblede sin pengebeholdning og brugte derefter 12 dinarer. Han tog videre til Firenze, hvor han gennem handel også fordoblede sin pengebeholdning og derefter brugte 12 dinarer. Fra Firenze tog han hjem til Pisa, hvor han igen fordoblede sin pengebeholdning og brugte 12 dinarer. Da han havde gjort det, havde han ikke flere penge. Hvor meget havde han fra begyndelsen?

3. Kaninproblemet: *Et kaninpar får unger, der igen får unger osv. Hvor mange par kaniner bliver det til på et år?*
En mand har et kaninpar på et område helt omgivet af en stor mur. Han er interesseret i at finde ud af, hvor mange kaninpar dette kan blive til i løbet af et år, hvis vi går ud fra, at disse kaniners natur er sådan, at de får ét par unger (af hvert køn) hver måned, og at ungerne er kønsmodne og selv får unger to måneder efter fødslen osv.

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668279

Øvelse 1 (som ikke findes hos Fibonacci)
Lav et diagram, der illustrerer væksten i antal kaninpar

(fortsat:) Det første par får unger den første måned, så efter én måned er der to par. Af disse to får ét par, nemlig det første par, igen unger i den anden måned, så efter to måneder er der tre par. Af disse vil to par blive gravide, så i den tredje måned vil to nye kaninpar blive født. Således vil der være 5 kaninpar efter den tredje måned. Af disse vil 3 af kaninparrene blive gravide, så efter den fjerde måned er der 8 kaninpar. Af disse vil 5 par føde 5 nye par, der lagt til de 8 giver 13 par efter den femte måned. De 5 par, der lige er født, vil ikke få unger i næste måned, men det vil de 8 andre par. Således vil der være 21 par efter sjette måned. Når vi til disse lægger de 13, der bliver født den næste måned, vil der være 34 par efter syvende måned…. Til slut vil vi lægge 144 til 233 og få, at det samlede antal kaninpar efter 12 måneder er 377.
(egen oversættelse)

Øvelse 2 (som ikke findes hos Fibonacci)
1. Udfyld listen og tjek, at det bliver 377 par i alt.
2. Hvor mange er der efter 15 måneder?
3. Hvad er systemet i rækken af tal?

Kaninproblemet findes i en engelsk oversættelse og sammen med andet materiale om Fibonacci tal her: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html#decs>
I B-bogen vil der være et projekt om Fibonacci-tallene, hvor vi bl.a. undersøger hvordan de hænger sammen med det gyldne snit. Fibonacci-tallene møder du en række steder i naturen: Tag en grankogle, en ananas eller en solsikke. De er alle bygget op, så der er en række spiraler der løber hver sin vej. Prøv at tælle antallet af spiraler den ene vej og antallet den anden vej. Det giver altid to Fibonaccital, der kommer efter hinanden!

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

L&R Uddannelse EGMONT

Opgave fra den tidlige renæssance
Maleren Piero della Fransesca (1415-1492) var ligesom mange andre kunstnere dengang også matematiker. I et af hans værker findes følgende opgaver:
1. Tre mænd aftaler at investere i fællesskab. Den første indskyder 58 dukater, den næste 87, men vi ved ikke hvad den tredje indskød. De tjente en profit på i alt 368 dukater, hvoraf den første får sin andel på 86.
Hvor meget investerede den tredje og hvor store andele får de øvrige?
(*Hjælp: Vi vil anvende moderne metoder til at løse den, og indfører derfor variable. Lad x angive den tredjes indskud og opskriv et udtryk for den totale investering. Opskriv dernæst et udtryk for afkastet pr investeret dukat. Vi ved den første får 86, og kan derfor opstille en ligning i x og løs denne*).

2. Tre arbejdere skal lave et bestemt job. Hvis den første og den anden gør det sammen kan de klare det på 15 dage. Hvis den første og den tredje gør det sammen kan de klare det på 12 dage. Hvis den anden og den tredje gør det sammen kan de klare det på 10 dage. Hvor mange dage skulle hver af de tre bruge, hvis de skulle klare det alene?
(*Kommentar: Denne slags opgaver der ofte kaldes grøftegravningsopgaver blev også stillet elever i det gamle Ægypten – der findes på deres papyrus Rhind – og de er blevet stillet danske skoleelever ind til for få år siden*).

3. Et vandanlæg i en have har to bassiner, et øvre og et nedre. Hver har tre afløb. Det første afløb fra det øverste bassin kan fylde det nederste på to timer, det andet på tre timer og det tredje på 4 timer. Når alle disse tre afløb er lukket kan det første afløb i det nederste bassin tømme dette på tre timer, det andet afløb an tømme det på 4 timer og det tredje på 5 timer. Hvis det nederste bassin er tomt, og det øverste har rigeligt med vand, hvor længe vil det s tage at fylde det nederste bassin hvis alle 6 afløb er åbne?
(oversat fra Victor Katz, *A History of Mathematics* s 348)

Nicolas Chuquet¸en fransk fysiker og handelsmand fra Lyon skrev og udgav i 1484 et værk han kaldte *Triparty* - for at indikere, det var delt op i tre dele – og hvor han satte sig for at imødekomme de italienske købmænd og handelsfolks behov for en praktisk matematik. Det kunne dreje sig om indviklede arvesager. En af opgaverne lyder:
1. En mand laver et testamente før han dør og efterlader sig en gravid kone. Testamentet afsætter 100 ecus til hans kone og efterkommer, på følgende måde: Hvis hun får en datter skal hun have det dobbelte af datteren. Hvis hun får en søn, skal sønnen have det dobbelte af hvad moderen får. Hun får tvillinger. Hvordan skal arven deles for at opfylde faderens ønsker.

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk
KOPIERING FORBUDT

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Højrenæssancen i Italien

I 1500-tallet sker der en række gennembrud i forskellige videnskaber, hvor man på flere områder nu endelig kommer længere end oldtidens videnskaber. Det er både inden for matematik, astronomi og medicin. Girolamo Cardano (1501-1576) er især berømt i matematikhistorien for at være den første, der fandt en formel til løsning af visse tredjegradsligninger. Denne historie er foldet ud i et projekt i A bogen, hvor vi bl.a. hører om, hvordan matematikerne i renæssancen hemmeligholdt deres viden og udnyttede denne til at udfordre andre til konkurrencer på byernes torve om, hvem der var bedst!

Cardano skrev og udgav i 1545 værket Ars Magna (*Den store kunst),* der samlede en stor del af datidens viden om løsning af ligninger. Heri fremlagde han også sine nye metoder. Det er i Ars Magna vi første gang præsenteres for negative tal – det er som løsninger til visse ligninger. Men de findes jo ikke rigtigt, så Cardano kalder dem ”fiktive tal”. Og endelig præsenterer han ideen om helt nye tal der optræder som kvadratrødder af negative tal – dem kalder han ”indbildte tal” eller ”imaginære tal”, en betegnelse vi stadig bruger. Det er første skridt ind i en helt ny verden af de såkaldte komplekse tal. Bogen indeholder også mere simple problemer som følgende:

1. (*Kapitel 5, problem nr.* 2) To officerer fordelte hver 48 aurei blandt deres soldater. Den ene havde to flere soldater end den anden. Den som havde to færre soldater kunne give sine soldater 4 aurei mere end den anden kunne. Hvor mange soldater havde hver.

2. (*Kapitel 37, problem nr. 1*) Den medgift Francis brud har med sig er 100 aurei mere værd end Francis egen ejendele er værd. Kvadratet på medgiften er 400 aurei mere værd end kvadratet på værdien af Francis ejendele. Hvor stor var medgiften og hvor meget er Francis ejendele værd.

I 1557 skriver en engelsk matematiker Robert Recorde en matematikbog, hvor han for første gang i matematikhistorien introducerer lighedstegnet =. Før havde man skrevet ”er lig med”. 15 år før havde han udgivet en anden matematikbog, hvor han lærte folk addition og subtraktion ved hjælp af kuglerammer, og hvor han opskrev stykkerne med brug af symbolerne + og -. Tidligere havde man skrevet ordene ”plus” og ”minus”, men også brugt forskellige forkortelser som fx ”p” for plus.

I slutningen af 1500-tallet begynder en fransk matematiker, Francois Viete at opskrive udtryk med brug af bogstaver, og i løbet af 1600-tallet slår dette igennem, så matematiske problemer efterhånden oversættes til formelsprog før man tager fat på at løse problemerne.

© 2017 L&R Uddannelse A/S • Vognmagergade 11 • DK-1148 • København K • Tlf: 43503030 • Email: info@lru.dk

KOPIERING FORBUDT