ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT

Projekt 7.1 Ægyptisk matematik

Dette projekt kan anvendes på flere måder. I 1.g kan det anvendes som et matematikhistorisk projekt, gerne i et samarbejde med faget historie. Man kan her vælge at fokusere på det geometriske, hvor eksempelvis afsnittet om pyramidestub er lidt udfordrende. Man kan også vælge at fokusere på det aritmetiske, specielt ægypternes brøkregning og deres evner til at omskrive alle resultater som en sum af stambrøker. Der er givet forslag til små opgaveforløb / projekter, og der ligger en litteraturliste bagest i projektmaterialet. Projektet kan også anvendes som materiale til et studieretningsprojekt

Indhold

1. De store pyramider og matematikken bag

De store ægyptiske pyramider blev bygget for 4-5.000 år siden i den periode, vi i dag kalder *Det Ældste Rige*. Vi ved ikke præcis, hvordan de har båret sig ad med at gennemføre så ubegribeligt store byggeprojekter. Men det betyder ikke, at så kan den ene teori være lige så god som enhver anden.

En teori skal kunne forklare nogle fænomener på en sådan måde, at vi har muligheder for at undersøge og efterprøve, om det er god og brugbar teori, der giver en rimelig forklaring på det, vi ser eller ræsonnerer os til, eller om den må afvises, da den åbenlyst strider mod den viden, vi i øvrigt har. Mystiske forestillinger om, at pyramiderne og andre af oldtidens store bygningsværker i virkeligheden er opført af rumvæsener, er slet ikke nogen teori – hvordan skulle den efterprøves?

Cheopspyramiden, der blev bygget omkring 2600 f.v.t., er den største. Den er bygget af ca. 2,3 millioner stenblokke, der hver vejer omkring 2500 kg. Nogle af blokkene vejer helt op mod 15 tons. Den er bygget med en forbløffende nøjagtighed. Grundfladen er et perfekt kvadrat, sidelængderne er 230,3 meter med en variation på kun 0,01%. Og hældningen af sidefladerne er fuldstændig ens.

Da Cheopspyramiden blev bygget, var den 147 m høj, og den var i ca. 4000 år verdens højeste bygning. Den havde dengang en glat overflade lavet med hvide kalksten, men et voldsomt jordskælv i år 1300 løsnede disse kalksten og noget af det øverste af pyramiden, så den kom til at se ud, som vi nu ser den.

Et sådant byggeri kan ikke være lavet uden ingeniører, arkitekter og matematikere til at tegne og beregne samt lede hele byggeprocessen, herunder udregne behovet for arbejdskraft osv. Man vurderer, at der har været ca. 20.000 arbejdere beskæftiget gennem 20 år – og hvordan sikrer man fødevarer og andre fornødenheder til dem? De kan ikke bare have kastet sig ud i det og prøvet sig frem. Men vi har ikke nogen overleveringer, der eksempelvis fortæller om deres ingeniørkunst.

Der findes kun nogle få kilder til den ægyptiske matematik, fordi de skrev på papyrus, der er en art papir lavet på basis af siv, og som er forgængeligt materiale, i modsætning til babylonierne, der skrev på lertavler, som de brændte, og som der er bevaret tusinder af. Der er bevaret en håndfuld papyrus, og ud af deres opbygning og af andre papyrus kan vi slutte os til, at der foregik en matematikundervisning, og at kendskab til matematik var uomgængelig for de embedsmænd, der hed skrivere, og som hørte til den ledende gruppe i samfundet.

Når der er så få kilder bevaret, og vi samtidig ved, at der foregik matematikundervisning gennem mange hundrede år, kan vi ikke vide, om undervisning og videnskab også foregik på et højere niveau, end vi får kendskab til gennem kilderne.

Vi kan se af de papyrus, vi kender, at skriverne har været gode til at regne med tal og brøker. Det vender vi tilbage til i afsnittet om Tal og aritmetik nedenfor.

ISBN 9788770668279

Øvelse 1

I den største papyrus, der er fundet, den såkaldte *Papyrus Rhind*, opkaldt efter Henry Rhind, der fandt den i 1858, er der flere opgaver med beregninger af hældningen på pyramideflader. I dag vil vi normalt beregne eller spørge: Hvor langt går vi op, når vi går 1 enhed vandret ud. Hos ægypterne spurgte de modsat: Hvor langt går vi ud, når vi går 1 enhed lodret op? Denne hældning kaldte de ”seqt”. Problem nr. 46 i *Papyrus Rhind* lyder:
”Hvis en kvadratisk pyramide er 93,5 enheder høj, og siden i grundfladen er 140 enheder lang, hvad er så dens ”seqt”?”

a) Først regner vi ”moderne”: Tegn en model af tværsnittet af denne pyramide i et koordinatsystem. De skrå sideflader kan betragtes som en rette linjer i koordinatsystemet. Bestem stigningstallet (hældningskoefficienten) for linjen med positiv hældning.

b) Så regner vi som ægypterne: Hvad bliver pyramidens seqt?

c) Hvad er Cheopspyramidens seqt?

d) Hvad kan være årsagen til, at de anvendte dette mål for hældningen? (Hjælp: Forestil dig, du er den ledende ingeniør på bygningen af omtalte pyramide. Du har lavet en geometrisk model og udregnet dens seqt. Du har bestilt sten, der alle er 1 enhed på den ene led, og de skal nu placeres i næste lag af pyramiden. Hvordan vil du markere overfor arbejderne, hvor de skal placere stenene i det nye lag i forhold til kanten? Hvis stenene i stedet var 1,5 seqt på den ene led, hvordan ville du så angive, hvor de skulle lægges i forhold til kanten?)

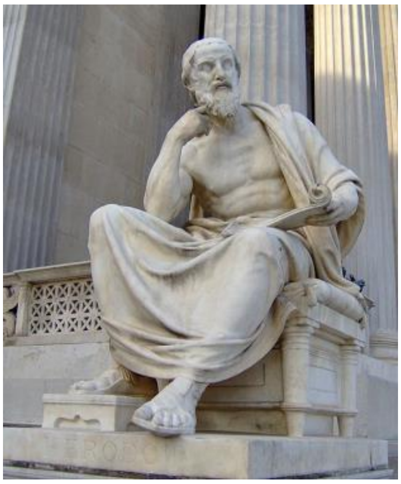
ISBN 9788770668279

2. Det ægyptiske landbrug og arealberegninger af firkantede marker

Den rigdom, som de store pyramider demonstrerer, bunder i, at den ægyptiske befolkning lærte at udnytte de meget frugtbare jorder langs Nilen. Markerne her får tilført næringsrigt dynd, når Nilen regelmæssigt går over sine bredder. Nilen er verdens længste flod, så der er samlet set tale om meget store arealer.

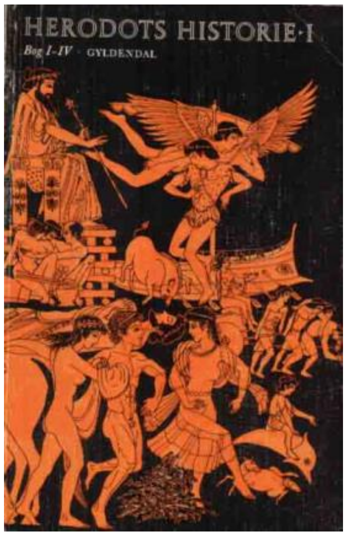
Faraoerne, de ægyptiske herskere fik deres hovedindtægt gennem beskatning af bønderne, og størrelsen heraf blev bestemt af markernes areal. Derfor var det nødvendigt med en nøje opmåling og registrering af markerne. Og efter oversvømmelser, hvor skellene mellem markerne blev udvisket, og Nilen måske tog eller gav nyt land, var det altid nødvendigt med en ny opmåling.

Der er overleveret en fortælling herom af den græske historiker Herodot (484-425 f.v.t.). Herodot, der levede mere end 2000 år efter, Cheopspyramiden blev bygget, foretog mange rejser i middelhavsområdet, og han samlede sine indtryk i et værk, der simpelthen hed *Historien*. Han kom også til Ægypten og fortæller:



"Det var ifølge præsternes udsagn denne konge (Se-sostris), der udstykkede jorden til alle ægypterne, idet han tildelte hver en firkantet lod af samme størrelse, og han byggede sine indtægter på dette ved at påligne dem en årlig afgift. Hvis floden tog noget fra en mands jordlod, henvendte han sig til kongen og meddelte, hvad der var sket. Denne sendte så synsmænd ud, der skulle måle op, hvor meget mindre stykket var blevet, for at besidderen i fremtiden kunne svare afgift i forhold dertil. Jeg mener, dette var anledningen til, at landmålerkunsten blev opfundet, som siden er kommet til Hellas."

(Herodot, Bog II, §109, Thure Hastrup og Leo Hjortøs oversættelse, Gyldendal 1979))

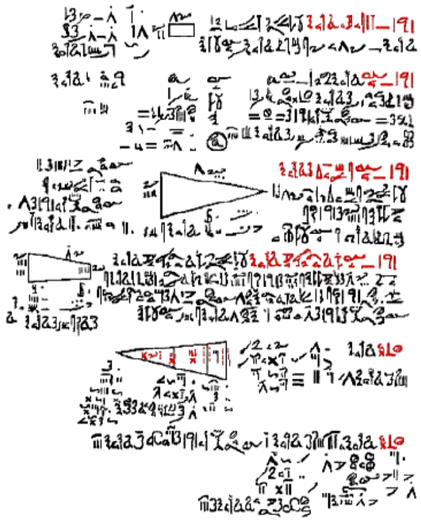


Vi kan se af de forskellige papyrus, der er overleveret, at udregning af arealer spillede en stor rolle i matematikundervisningen.

ISBN 9788770668279

Øvelse 2

Nedenfor er gengivet et udsnit af *Papyrus Rhind*. Hvilke geometriske figurer optræder på denne side?

Øvelse 3

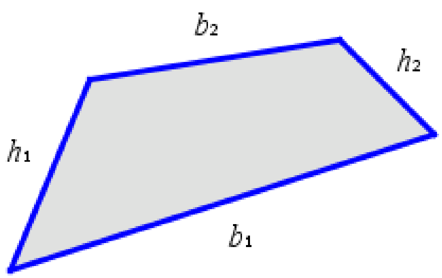
I *Papyrus Rhind* findes eksempler på arealberegninger af firkanter, trekanter og trapezer. Fx finder vi følgende formel for beregning af arealet af en firkant ABCD:
Udregn gennemsnittet af længden af siderne over for hinanden, dvs. $\frac{a+c}{2}$ *og* $\frac{b+d}{2}$*, så er arealet produktet af disse tal.*

a) Lad *ABCD* være et rektangel med siderne 10 og 20. Hvad er arealet? Hvilket resultat giver den ægyptiske formel?

b) Lad *ABCD* være et ligesidet trapez med de modstående parallelle sider af længder 4 og 12, og med skrå sider af længde 8. Hvad er arealet? Hvilket resultat giver den ægyptiske formel?

Øvelse 4

a) Tegn en firkant i et dynamisk geometriprogram og bestem arealet (evt. ved at opdele i trekanter). Den kan se således ud:



b) Udregn det resultat man, man får, når man bruger den ægyptiske formel:

1. $$A = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

til at beregne arealet.

c) Lav en beregning, der udtrykker, hvor stor afvigelsen er fra det korrekte areal.

d) Træk i firkanten, og giv et bud på, for hvilke typer firkanter formlen giver det rigtige areal.

Nogle matematikhistorikere mener, at ægypterne godt vidste, at formlen ikke giver der korrekte areal, men at formlen blev anvendt til at foretage en hurtig "overslagsberegning", dvs. lave en tilnærmet beregning.

ISBN 9788770668279

3. Den ægyptiske beregning af arealet af en rund mark

I dag ved vi, hvordan vi beregner omkreds og arealer af cirkler:
Omkreds *O* af en cirkel med radius *r* beregnes ud fra formlen:

$$O = 2\pi \cdot r$$

Arealet *A* af en cirkel med radius *r* beregnes ud fra formlen:

$$A = \pi \cdot r^2$$

π er et såkaldt irrationalt tal, hvor vi skulle have uendeligt mange decimaler med, før det er helt præcis. Det kan vi naturligvis ikke, og derfor er alle beregninger hvor π indgår tilnærmede beregninger.

Disse formler kendte ægypterne klart nok ikke, men de havde runde marker! Så hvordan beregnede de arealer af sådanne?

Problem 50 i Rhind papyrus lyder:

En rund mark har diameteren 9 khet. Hvor stort er arealet? Fjern 1/9 af diameteren, nemlig stykket 1. Resten er 8. Gange 8 med 8, det giver 64. Derfor rummer marken et areal på 64 setat.

Dette er en sproglig beskrivelse som vi kan prøve at udtrykke som formel.
Lad *d* betegne diameteren af en cirkel.
Når vi fjerner 1/9, så får vi resten:

$$\left(d - \tfrac{d}{9}\right)$$

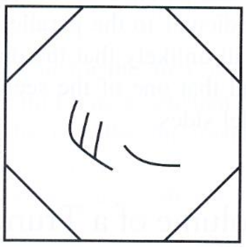
Den ægyptiske formel for arealet af en cirkel med diameter *d* er så:

$$A = \left(d - \tfrac{d}{9}\right)^2 = \left(\tfrac{8d}{9}\right)^2$$

Øvelse 5
Sammenlign med den moderne formel og angiv den ægyptiske værdi af π.

Kommentarer til den ægyptiske beregning

Vi ved ikke hvordan de kan være nået frem til denne formel, men måske er der en anvisning i et foregående problem, nemlig nr. 48, hvor der er tegnet et kvadrat med de fire hjørner skåret af, så der fremkommer en 8-kant.

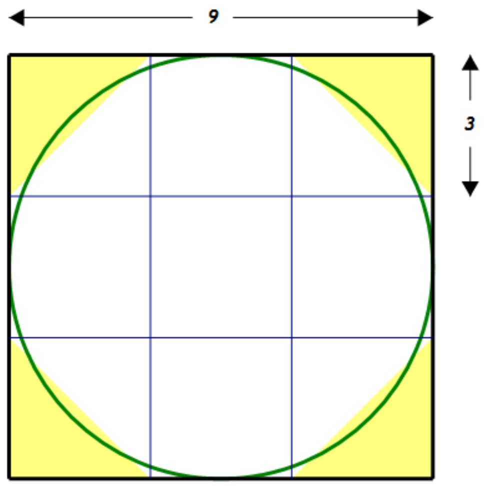


Inde i denne figur er skrevet tallet 9, som vi antager, er sidelængden.

ISBN 9788770668279

Øvelse 6

Konstruer en figur svarende til den nedenfor, hvor siderne deles i tre og de hjørner, vi skærer af, er små retvinklede trekanter med sidelængder 3.



Vis, at arealet af denne figur er 63.

Det er således en teori, at 8-kanten med areal 63 er opfattet som en første tilnærmelse til cirklen, der er blevet vurderet som en smule større, altså 64.

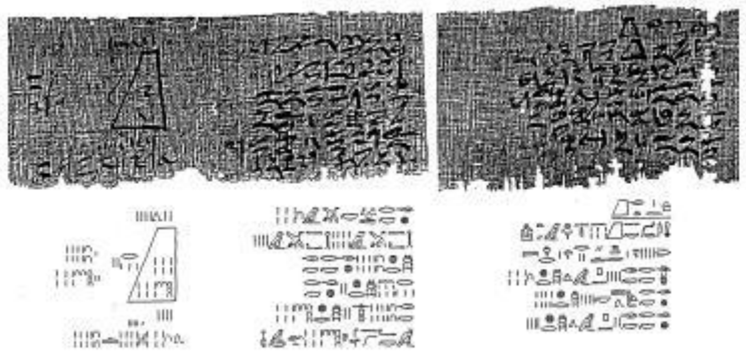
Øvelse 7.

Bestem cirklen areal ved moderne metoder og sammenlign med grækernes anslåede værdi.

ISBN 9788770668279

4. Avanceret matematik – rumfanget af en pyramidestub

Den såkaldte *Moskva-papyrus* indeholder kun 25 problemer, men en af opgaverne giver os indblik i, at de åbenbart havde en ret avanceret matematik i det gamle Ægypten.



Problem nr.14 (til venstre på figuren) handler om beregning af rumfanget af en pyramidestub. Der står følgende:

> *6 høj og grundfladen har siden 4, mens topstykket har siden 2, så skal du kvadrere de 4, det bliver 16; du skal gange de 2 med de 4, det er 8; du skal kvadrere de 2, det er 4. Nu skal du lægge 16, 8 og 4 sammen, det er 28. Nu skal du tage en tredjedel af de 6, det er 2. Du skal gange de 28 med de 2, resultatet er 56. Det er sandelig rumfanget af pyramidestubben!*

Det er faktisk korrekt! De kendte altså formlen for rumfanget. Vi ville sige, at er højden h, siderne af de to kvadrater a og b, så er rumfanget V givet ved formlen: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (a^2 + ab + b^2)$. Den kan de ikke have gættet sig til, så de må have et matematisk miljø, hvor sådanne sammenhænge bliver undersøgt.

Øvelse 8

Argumenter for, at den ægyptiske opskrift svarer til den moderne formel, ved at angive hvad a, b og h er.

Moderne metode

Hvordan vil vi i dag udlede formlen for rumfanget af en pyramidestub? Hvis vi ikke har lært integralregning, så må vi udnytte geometriske metoder:

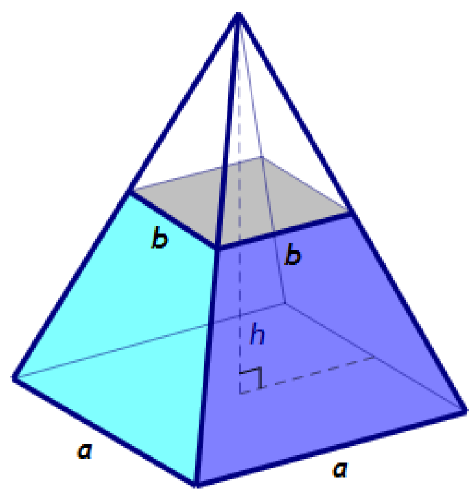
Skitsér en pyramide med kvadratisk grundflade som vist nedenfor, hvor sidelængden kaldes *a*, og højden kaldes *h*.

Det følgende bygger på, at vi ved, at rumfanget af en pyramide er:

$$V_{pyramide} = \tfrac{1}{3} h \cdot a^2$$

En pyramidestub er en pyramide, hvor vi stykket *h* oppe har skåret den øverste del af med et vandret snit, således at der her er en ny mindre kvadratisk grundflade. Højden af pyramidestubben er altså *h*. Hvis vi kalder sidelængden i det lille øverste kvadrat for *b*, så gælder der, at rumfanget af en pyramidestub er:

$$V_{stub} = \tfrac{1}{3} h \cdot (a^2 + ab + b^2)$$



ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse
EGMONT

Øvelse 9

Denne formel kan vi få af pyramideformlen på følgende måde (tegn med):

2. Træk linjer lodret ned fra hjørnerne i *b*-kvadratet. Herved får vi en kasse inde i pyramidestubben med grundflade *b* og højde *h*. Rumfanget er:

$$V_{kasse} = h \cdot b^2$$

3. Tegn en skitse af pyramidens bund, hvor *b*-kvadratet er tegnet op inden i *a*-kvadratet. Forlæng alle siderne i *b*-kvadratet ud til pyramidens sider. Dette giver i hvert hjørne af pyramidens bund et lille kvadrat. Argumenter for, at disse har sidelængden:

$$s = \frac{(a-b)}{2}$$

4. Trækkes linjer fra hjørnet i dette lille kvadrat op til det hjørnet på pyramidestubbens øverste flade får vi en (skæv) pyramide. Rumfanget af denne udregnes efter formel 1 med sidelængden s. Argumentér for, at det samlede rumfang af de fire små pyramider bliver:

$$V_{4skæve} = 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{(a-b)^2}{2^2} = \tfrac{1}{3} \cdot h \cdot (a-b)^2$$

5. Den resterende del af rumfanget af pyramidestubbe er de fire halve "kasser" ved hver af pyramidens fire sideflader, med grundflade bestemt af henholdsvis *b* og $\frac{(a-b)}{2}$, og højde *h*. Argumenter for at det samlede rumfang af disse fire halve kasser kan beregnes ved:

$$V_{4halvekasser} = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot \frac{(a-b)}{2} = h \cdot b \cdot (a-b)$$

6. Rumfanget af pyramidestubben kan nu bestemmes ved:

$$V_{stub} = V_{kasse} + V_{4skæve} + V_{4halvekasser}$$

Vis, at denne sum netop kan reduceres til den søgte formel.

ISBN 9788770668279

Ægyptisk metode

Problem nr.14 i Moskvapapyrus handler som nævnt om beregning af rumfanget af en pyramidestub:

6 høj og grundfladen har siden 4, mens topstykket har siden 2, så skal du kvadrere de 4, det bliver 16; du skal gange de 2 med de 4, det er 8; du skal kvadrere de 2, det er 4. Nu skal du lægge 16, 8 og 4 sammen, det er 28. Nu skal du tage en tredjedel af de 6, det er 2. Du skal gange de 28 med de 2, resultatet er 56. Det er sandelig rumfanget af pyramidestubben!		

Selv om vi kun har én beregning, hvor der udnyttes et taleksempel, så er der generel enighed om, at det er et udtryk for, at de har kendt metoden til at beregne rumfanget af en pyramidestub.

Kommentarer til den ægyptiske beregning

Skitsér en overskåret pyramide med målene fra den ægyptiske tekst, hvor bredden af toppen er netop halvt så stor som bredden af grundfladen.

Øvelse 10

1. Hvad må højden have været for den oprindelige pyramide?

   En pyramides rumfang er givet ved formlen:

   $$V = \tfrac{1}{3} \times G \times h$$

   hvor *G* er grundfladens areal, og *h* er højden af pyramiden.

2. Hvad bliver så rumfanget af den oprindelige pyramide, toppen af pyramiden og pyramidestubben?
3. Hvordan passer det med den ægyptiske formel for pyramidestubbens rumfang?
4. Hvorfor er formlen for pyramidestubbens rumfang (den ægyptiske formel) smartere end fremgangsmåden beskrevet ovenfor, når man vil finde rumfanget af en pyramidestub?

5. Aritmetik – Det ægyptiske talsystem

Aritmetikken handler om tal og regning med tal. I grundbogen har vi behandlet tallenes historie, talordenes udvikling og talsymbolernes oprindelse. Alle civilisationer har arbejdet med tal, og udviklet talsystemer. I oldtidens kulturer kan vi se, at selv om vores hjerner har en indbygget talsans, ligesom mange dyrs hjerner har det, så har vi ikke gennem evolutionen fået udviklet en fælles forståelse af et talsystem. Hver kultur udvikler sit specielle system. De naturlige tal findes repræsenteret i naturen, og alle urfolk og alle civilisationer har udviklet metoder til at tælle. Men talsystemerne er kulturprodukter.

Det afhænger i betydelig grad af talsystemet, hvor svært eller hvor let der er at håndtere regningsarterne, addition, subtraktion, multiplikation og division. De kulturer, der fandt på at opbygge positionstalsystemer, som det fx skete i det gamle Babylon, gav deres børn og unge en stor gave når det drejer sig om at lære regningsarterne. De kulturer, der skabte andre systemer, som den ægyptiske og den romerske klarede sig som bekendt fint alligevel. Men regnekunsten blev hos dem netop en kunst, der eksempelvis i Ægypten var forbeholdt *skriverne*. Den vestlige civilisation anvendte romertallene helt op til 14-1500-tallet, og her var det et universitetsstudium at lære at multiplicerer og dividere. Det var først med indførelsen af decimaltallene, at regning blev "allemandseje". Den historie er fortalt i projekt Projekt 7.8 *Da folket lærte at regne - om Stevins opgør med brøkregning*.

Brøkregning er vanskelig – det kan de fleste skoleelever blive enige om. Det tager lang tid at lære, der er mange faldgruber, synes man, og mange regler, som man måske ikke får forklaret, men netop kun får serveret som en regel. Brøkregning er faktisk *ægypternes* gave til alle efterfølgende civilisationer – selv om ikke alle ser det som en gave.

Men det var i Ægypten brøkerne blev opfundet. Og de lærte brøkregning på et niveau, som de færreste i dag kan hamle op med. Der er almindelig enighed om i dag, at de bla. udviklede brøkregningen som et værktøj til at sikre en retfærdig betaling af alle de der arbejde ved de store fælles projekter, som fx pyramidebyggerierne. Det tog lang tid at bygge de store pyramider, og mens arbejdet stod på, blev der etableret store byer i nærheden, hvor arbejderne boede. De havde ikke et møntsystem, som vi kender i dag, værdien af en dags arbejde, eller af en genstand man vil erhverve blev normalt opgjort i brød og øl. I byerne var der butikker / markedspladser, hvor man kunne købe brød og andet fornødent. Hvor mange brød og hvor mange liter øl skal man betale eller skal man have i dagsløn. Da de ikke havde skillemønt var det vigtigt at finde metoder, til at udmåle fx 4/7 af et brød.

Som en introduktion til den ægyptiske brøkregning kan du se følgende to korte you tube film.
Den første giver en god introduktion til begrebet stambrøker og omskrivning til sådanne, og den stiller en række opgaver, du kan forsøge at løse.
https://www.youtube.com/watch?v=SRLpzy1sYKs
Den anden formulerer nogle af metoderne i et lidt mere abstrakt sprog, og giver en række udfordringer:
https://www.youtube.com/watch?v=_Qr__I-aV6c

ISBN 9788770668279

6. Stambrøker

Brøker har været kendt og anvendt siden det gamle Ægyptens tid, ca. 2500 fvt. Vi kan af de få matematiske tekster, der er bevaret se, hvordan de har opfattet brøker, selv om de ikke har skrevet noget teoretisk om det. Det fundamentale begreb var *stambrøker*, som er alle brøker med et et-tal i tælleren:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

Den eneste brøk, de udover disse var tryg ved at bruge var $\frac{2}{3}$.

En stambrøk som $\frac{1}{10}$ er forholdsvis let at forstå. Man deler en kage, et brød eller en arv i 10 lige store dele.

Hver del er så $\frac{1}{10}$.

Man skulle tro, det så var let at forklare, hvad man skal forstå ved fx $\frac{3}{10}$. Men sådan så de ikke på det.

Tal af typen $\frac{5}{7}$ og $\frac{3}{10}$ omskrev de konsekvent til *summer af forskellige stambrøker*:

$$\frac{3}{10}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

$$\frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{7}{14}+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$$

Øvelse 11

Omskriv brøkerne $\frac{11}{16}$ og $\frac{11}{17}$ til summer af stambrøker.
Bemærk: De enkelte brøker kan opskrives på mange måder som summer af stambrøker.

Hvis vi ikke lægger begrænsninger på antallet af led, så kan hver brøk skrives på *uendeligt mange måder* som en sum af stambrøker.

Øvelse 12.

Tag udgangspunkt i følgende identitet: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

Vi vil som eksempel omskrive $\frac{3}{7}$.

a) Argumenter for følgende omskrivninger er korrekt (du vil nedenfor få en metode til disse omskrivninger, så lige nu skal du blot tjekke det er ok):
$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{8}{28}=\frac{1}{7}+\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}$$

b) Anvend nu den førte identitet til at vise: $\frac{1}{28}=\frac{1}{2\cdot 28}+\frac{1}{3\cdot 28}+\frac{1}{6\cdot 28}=\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\frac{1}{168}$

c) Vis nu: $\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\frac{1}{168}$

d) Argumenter ud fra de foregående punkter for, at $\frac{3}{7}$ kan skrives på uendeligt mange måder som en sum af stambrøker.

ISBN 9788770668279

Resultatet i øvelse 12 har naturligvis kun teoretisk interesse. I praksis er det latterligt at tænke i sådanne diminutive brøker der vil fremkomme.
Men resultatet har alligevel en vis praktisk interesse set fra en anden vinkel: Når opsplitningen langt fra er entydig, hvordan går man så frem for at få en hensigtsmæssig opdeling? Hvad gjorde man i det gamle Ægypten. Vi ved meget lidt om dette, men kan dog ræsonnere ud fra det vi har kendskab til.

I Rhind papyrus findes flere tabeller, bla. en over $\frac{2}{n}$ skrevet som sum af stambrøker:

2/n tabellen fra Rhind Papyrus		
2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

Øvelse 13

Vis, hvordan tabellen ovenfor kan anvendes til at skrive brøkerne $\frac{3}{13}$ og $\frac{7}{13}$ som sumer af stambrøker

Vi vil nu arbejde os frem til en mulig algoritme, de anvendte, med brug af tabellen. Her vil vi følge en engelsk artikel skrevet af Marc Dominus.

ISBN 9788770668279

7. Omskrivning til stambrøker – en mulig algoritme

The Ahmes papyrus is one of the very oldest extant mathematical documents. It was written around 3800 years ago. As I mentioned recently, a large part of it is a table of the values of fractions of the form 2/*n* for odd integers *n*. The Egyptians, at least at that time, did not have a generalized fraction notation. They would write fractions of the form 1/*n*, and they could write sums of these. But convention dictated that they could not use the same unit fraction more than once. So to express 3/5 they would have needed to write something like 1/2 + 1/10, which from now on I will abbreviate as [2, 10]. (They also had a special notation for 2/3, but I will ignore that for a while.) Expressing arbitrary fractions in this form can be done, but it is non-trivial.

A simple algorithm for calculating this so-called "Egyptian fraction representation" is the *greedy algorithm*: To represent *n*/*d*, find the largest unit fraction 1/*a* that is less than *n*/*d*. Calculate a representation for *n*/*d* - 1/*a*, and append 1/*a*. This always works, but it doesn't always work well. For example, let's use the greedy algorithm to find a representation for 2/9. The largest unit fraction less than 2/9 is 1/5, and 2/9 - 1/5 = 1/45, so we get 2/9 = 1/5 + 1/45 = [5, 45]. But it also happens that 2/9 = [6, 18], which is much more convenient to calculate with because the numbers are smaller. Similarly, for 19/20 the greedy algorithm produces 19/20 = [2] + 9/20 = [2, 3] + 7/60 = [2, 3, 9, 180]. But even 7/60 can be more simply written than as [9, 180]; it's also [10, 60], [12, 30], and, best of all, [15, 20].

So similarly, for 3/7 this time, the greedy methods gives us 3/7 = 1/3 + 2/21, and that 2/21 can be expanded by the greedy method as [11, 231], so 3/7 = [3, 11, 231]. But even 2/21 has better expansions: it's also [12, 84], [14, 42], and, best of all, [15, 35], so 3/7 = [3, 15, 35]. But better than all of these is 3/7 = [4, 7, 28], which is optimal.

Anyway, while I was tinkering with all this, I got an answer to a question I had been wondering about for years, which is: why did Ahmes come up with a table of representations of fractions of the form 2/*n*, rather than the representations of all possible quotients? Was there a table somewhere else, now lost, of representations of fractions of the form 3/*n*?

The answer, I think, is "probably not"; here's why I think so.

Suppose you want 3/7. But 3/7 = 2/7 + 1/7. You look up 2/7 in the table and find that 2/7 = [4, 28]. So 3/7 = [4, 7, 28]. Done.

OK, suppose you want 4/7. You look up 2/7 in the table and find that 2/7 = [4, 28]. So 4/7 = [4, 4, 28, 28] = [2, 14]. Done.

Similarly, 5/7 = [2, 7, 14]. Done.

To calculate 6/7, you first calculate 3/7, which is [4, 7, 28]. Then you double 3/7, and get 6/7 = 1/2 + 2/7 + 1/14. Now you look up 2/7 in the table and get 2/7 = [4, 28], so 6/7 = [2, 4, 14, 28]. Whether this is optimal or not is open to argument. It's longer than [2, 3, 42], but on the other hand the denominators are smaller.

Anyway, the table of $2/n$ is all you need to produce Egyptian representations of arbitrary rational numbers. The algorithm in general is:

- To sum up two Egyptian fractions, just concatenate their representations. There may now be unit fractions that appear twice, which is illegal. If a pair of such fractions have an even denominator, they can be eliminated using the rule that $1/2n + 1/2n = 1/n$. Otherwise, the denominator is odd, and you can look the numbers up in the $2/n$ table and replace the matched pair with the result from the table lookup. Repeat until no pairs remain.
- To double an Egyptian fraction, add it to itself as per the previous.
- To calculate a/b, when $a = 2k$, first calculate k/b and then double it as per the previous.
- To calculate a/b when a is odd, first calculate $(a-1)/b$ as per the previous; then add $1/b$.

So let's calculate the Egyptian fraction representation of 19/20 by this method:

- 19/20 = 18/20 + 1/20
- 19/20 = 9/10 + 1/20
  - 9/10 = 8/10 + 1/10
  - 9/10 = 4/5 + 1/10
    - 4/5 = 2/5 + 2/5
      - 2/5 = [3, 15] (from the table)
    - 4/5 = [3, 3, 15, 15]
    - 4/5 = 2/3 + 2/15
      - 2/3 = [2, 6] (from the table)
      - 2/15 = [12, 20] (from the table)
    - 4/5 = [2, 6, 12, 20]
  - 9/10 = [2, 6, 10, 12, 20]
- 19/20 = [2, 6, 10, 12, 20, 20]
- 19/20 = [2, 6, 10, 10, 12]
- 19/20 = [2, 5, 6, 12]

(The Egyptians would have been happy with 2/3 in the middle step there, and would have ended up with 19/20 = 2/3 + [5, 12].) Our final result is suboptimal; to fix it, we need to notice that [6, 12] = [4] and get 19/20 = [2, 4, 5]. But even without this, the final result is pretty good, and required no understanding or tricky reasoning; just a lot of grinding.

An alternative algorithm is to expand the numerator as a sum of powers of 2, which the Egyptians certainly knew how to do. For 19/20 this gives us 19/20 = 16/20 + 2/20 + 1/20 = 4/5 + [10, 20]. Now we need to figure out 4/5, which we do as above, getting 4/5 = [2, 6, 12, 20], or 4/5 = 2/3 + [12, 20] if we are Egyptian, or 4/5 = [2, 4, 20] if we are clever. Supposing we are neither, we have 19/20 = [2, 6, 12, 20, 10, 20] = [2, 6, 12, 10, 10] = [2, 6, 12, 5] as before.

(It is not clear to me, by the way, that either of these algorithms is guaranteed to terminate. I need to think about it some more.)

Getting the table of good-quality representations of $2/n$ is not trivial, and requires searching, number theory, and some trial and error. It's not at all clear that 2/105 = [90, 126].

Once you have the table of $2/n$, however, you can grind out the answer to any division problem. This might be time-consuming, but it's nevertheless trivial. So Ahmes needed a table of $2/n$, but once he had it, he didn't need any other tables.

ISBN 9788770668279

8. Forslag til opgaver og problemformulering -

Under inspiration fra: MATEMATIK I TVÆRFAGLIGE projekter. ÆGYPTISK MATEMATIK. KU.

Angiv for hver af de følgende dine kilder.

1. Beskriv ægypternes metode til at bestemme arealet af en cirkel, og oversæt ægypternes forskrift/algoritme til en formel med moderne matematisk notation. Ud fra denne formel skal der endvidere bestemmes en talværdi for pi. Kilde: Papyrus Rhind nr 41.

2: Beskriv ægypternes metode til at bestemme rumfanget af en pyramidestub, og oversæt ægypternes forskrift/algoritme til en formel med moderne notation. Er det den korrekte formel? Kilde: Papyrus Moskva nr 14.

3. Forklar endvidere hvordan ægypterne kunne beregne hældningen for en pyramides sideflade.
Kilde Papyrus Rhind nr 46

4: Redegør for ægypternes metode til at bestemme arealet af firkanter. Formlen findes indskrevet i en tekst på et Horus tempel.

5. Redegør for opbygningen af ægypternes talsystem og vis, ved brug af konkrete eksempler, hvordan ægypterne anvendte de fire regneoperationer, specielt fordoblingsmetoden ved multiplikation.

6. Redegør for ægypternes brøkregning med omskrivning til stambrøker. Hvad kan være årsagen til udviklingen af denne metode. Hvor mange måder kan en sådan omskrivning ske på. Hvad forstås ved "den grådige algoritme"? Redegør for Marc Dominus bud på en metode med brug af 2/n tabellen.

7. Undersøg ægypternes brug af geometri og elementær aritmetik i forbindelse med Nilens oversvømmelse (landmåling, kalenderholdning og beregning af skatter), og diskutér hvorfor dette nødvendiggør brugen af matematik.

8. Kilderne, der danner udgangspunkt for den ægyptiske matematik, er skrevet i opgaveform, og kan betragtes som brugt i undervisningsmæssig sammenhæng. Redegør for skrivernes betydning for det ægyptiske samfund. Man kan desuden komme ind på opbygningen af det ægyptiske samfund, herunder klasserne og arbejdet i den Ægyptiske verden.

9. På baggrund af konkrete historiske kilder ønskes en vurdering af hvor væsentlig matematikken var som magtfaktor i det gamle Ægypten. Diskuter hvorvidt en centralmagt er nødvendig for at opnå maksimalt udbytte af landbrug i områder, hvor oversvømmelser er grundlaget for frugtbarhed (flodkulturer).

ISBN 9788770668279

9. Litteratur

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egyptpapyrus.html
Her er udvalgte opgaver fra Rhind og Moskva papyrus oversat og kommenteret

https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus
Her er alle Rhinds opgaver oversat og kommenteret

Materialer om ægyptisk brøkregning
http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction
http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/
Epsteins side indeholder flere algoritmer til at finde stambrøksudtryk. Hjemmesiden indeholder desuden en kommenteret liste med links til engelsksprogede sider om emnet. Vær opmærksom på, at siden ikke holdes løbende opdateret, så der kan være en række døde links

Sekundær litteratur

Lund, Jens (1997). Regn med en skriver. Forlaget Munksgaard.
God gennemgang af de simplere dele af ægyptisk matematik. Ikke teknisk svær, men giver et godt grundlag for arbejdet med stambrøker. Skrevet til gymnasiet

Frandsen, Jesper (1996). Ægyptisk matematik. Forlaget Systime.
Grundig gennemgang af ægyptisk matematik, herunder geometri og ligninger. Skrevet til gymnasiet.

Litteratur om Ægypten

Dansk Ægyptologisk Selskab
http://www.daes.dk/indhold.html

Kommenteret liste over artikler udgivet af Dansk Ægyptologisk Selskab. Artiklerne kan fås ved henvendelse til foreningen eller gennem www.bibliotek.dk

Holm-Rasmussen, Torben (2003). Politikens bog om det gamle Egypten. Forlaget Politiken.
Generel bog om Ægyptens historie under faraoerne. Af formanden for Dansk Ægyptologisk Selskab.
Holm-Rasmussen, Torben (2003). Ansigt til ansigt med ægypterne. Forlaget Pantheon.
Skrevet specifikt til historie og religion i gymnasiet.