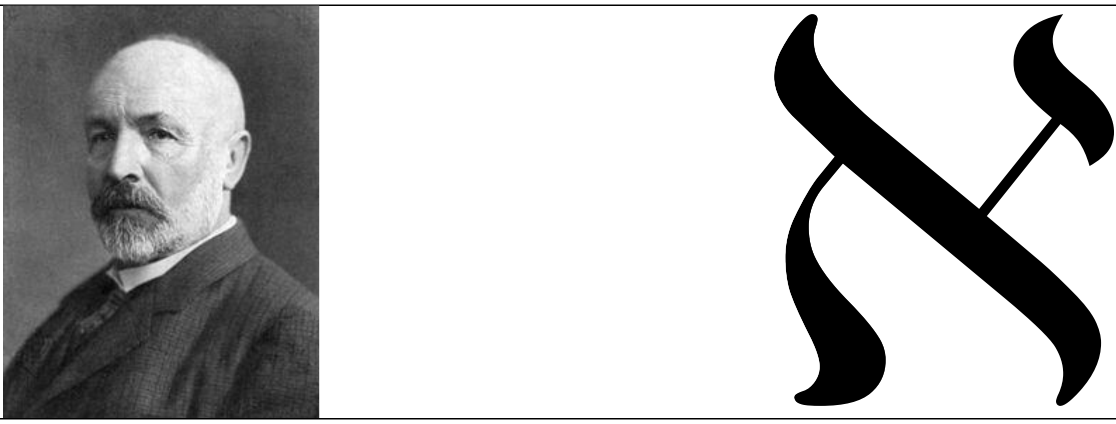
ISBN 9788770668279


# Projekt 7.10 Uendelighed – Hilberts hotel

(*Materialet i dette projekt er hentet fra Hvad er matematik? A, indledningen til kapitel 1.*)

I december 1873 gør den tyske matematiker Georg Cantor en af matematikhistoriens største og mest overraskende opdagelser: Der er flere slags uendelighed. Ordet *uendeligt* indgår i sproget, men uendeligt er ikke bare uendeligt.



På billedes ses Georg Cantor (1845-1918) og ved siden af ham "Aleph", det første bogstav i det hebraiske alfabet, som Cantor indførte som betegnelser for de forskellige slags uendelige tal, han arbejdede med. Fx er $\aleph_0$ betegnelsen for dét uendelige tal, der er knyttet til mængden af naturlige tal.

Der er uendeligt mange *naturlige tal* (0, 1, 2, 3, 4, …) og der er uendeligt mange *rationale tal* (alle brøker og periodiske decimaltal). Der er også uendeligt mange *irrationale* tal (tal som $\sqrt{2}$ og $\pi$, der *ikke* er periodiske decimaltal). Men mængden af irrationale tal er uendelig stor på et helt andet niveau, end fx mængden af alle rationale tal. Alle rationale og irrationale tal kan vi afsætte på tallinjen og de kaldes tilsammen for de *reelle tal*. Vælger vi et tal tilfældigt ud, så er sandsynligheden for at få et rationalt tal lig med 0 og sandsynligheden for at få et irrationalt tal er 1 – altså 100%! Det virker sært, for godt nok kender vi til irrationale tal som $\sqrt{2}$, $\pi$ og $\sqrt[3]{4}$, men det forekommer noget sværere at finde på den slags end på rationale tal. Og vi er kun lige gået inden for porten til det mærkelige land, Cantor opdagede.

## 1. Tællelighed, ækvipotens og mængders mægtighed

I den endelige verden forstår vi udmærket, hvad det vil sige, at der er flere af en slags, end af en anden slags. Hvis der er 32 elever og 30 stole, så er der flest elever, og der er ikke stole til alle. Uanset hvad for en stoleleg, man leger, så er der altid to, der står op, når man beder alle om at tage plads. Men sådan er det ikke i uendelighedens verden.

Allerede Galilei gav følgende paradoks: Lad *A* betegne alle naturlige tal (1, 2, 3, 4, 5 …), og lad *B* betegne alle kvadrattal (1, 4, 9, 16, 25, …). Det er klart, at alle kvadrattallene også er med i *A*, så umiddelbart ville man sige, at der er færre kvadrattal. Men spørgsmålet om, om der er flere, færre eller lige mange, afgør vi efter samme princip som i det endelige tilfælde: Kan tallene i de to mængder parres sammen to og to, så alle får præcis én makker, så er der lige mange. Det kunne vi ikke i det endelige tilfælde med elever og stole. Men Galilei påviste nu, at det let kan gøres i det uendelige tilfælde:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | .. | .. |
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | .. | .. |

Galilei konkluderede, at der jo så måtte være lige mange! Det er helt klart, hvad det næste tal i hver række er, og det er klart, at vi kan fortsætte i det uendelige! Det var et svimlende paradoks, og Gallilei valgte ikke at gå længere ind i uendelighederne. Men eksemplet kan bruges til at give Cantors definition:

**ISBN 9788770668279**


L&R Uddannelse EGMONT

**Definition. Sammenligning af uendeligheder**
To mængder $A$ og $B$ siges at være *ækvipotente*, dvs. at være lige store, hvis vi kan parre elementerne i $A$ og $B$ sammen to og to, så alle får præcis én makker. Man siger også, at de to mængder har samme *mægtighed*, og vi skriver: $A \sim B$.

I Galileis eksempel blev mængden af kvadrattal sammenlignet med mængden af naturlige tal ved, at vi stillede dem op i række, så man populært sagt kunne tælle dem. På samme måde kan vi stille de lige tal op på række:

2, 4, 6, 8, 10, …

så der er også lige så mange lige tal som naturlige tal i det hele taget! Dette repræsenterer den laveste grad af uendelighed og har et særligt navn:

**Definition. Tællelig (numerabel)**
En mængde $A$ kaldes *tællelig* eller *numerabel*, hvis $A$ er ækvipotent med mængden af naturlige tal $\mathbb{N}$. En mængde er altså tællelig, hvis alle dens elementer kan stilles op på række, så vi kan tælle dem.
Vi anvender symbolet $\aleph_0$ til at angive dette første uendelige tral.

### Øvelse 1

a) Vis, at mængden af alle hele tal (dvs. positive, negative og nul) er tællelig.

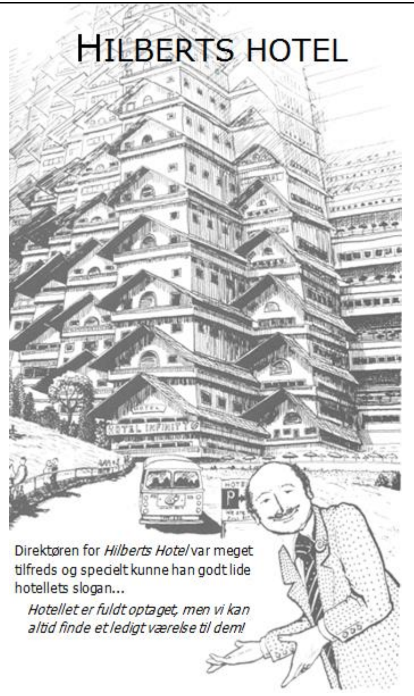
b) Antag, at $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ og $B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ begge er tællelige. Gør rede for, at samlingen (foreningsmængden) af alle elementer i $A$ og $B$ også er tællelig, ved at finde en metode til at stille alle $a$'erne og $b$'erne op på række, så det er helt klart, hvad det næste element i rækken er.

c) Generaliser din metode fra b) til at gælde en samling af $k$ tællelige mængder.

**ISBN 9788770668279**


## 2. Hilberts hotel

Et par ankommer en sen aften til *Det endelige hotel*, der ligger langt uden for alting, tæt på grænsen til Cantorland.




De har ikke bestilt værelser i forvejen, for de har læst at hotellet har godt 400 værelser, så det går nok. De håber på det bedste, men det viser sig desværre, at alt er optaget. De bliver i stedet opfordret til at tage til *Hilberts Hotel*, der ligger lige på den anden side af grænsen. ”*De har altid plads*”, får de at vide. Da de ankommer til *Hilberts hotel* er det første, der møder dem en reklamesøjle, hvor der står: *Succesen fortsætter - alle værelser udlejet*. De går alligevel ind og siger:

”Vi kommer lige fra *Det endelige hotel* , hvor de sagde, at vi kunne få plads her.”
”Det kan I da også - hvad er problemet?”, svarede receptionisten.
”Men udenfor står der jo at alle værelser er optagede?”
”Nåh det, det er ikke noget problem, vi flytter dem bare, vi har jo uendeligt mange værelser her på Hilberts hotel!”, svarede receptionisten.

Og det gjorde de så. Og det var sat i system. På alle værelser blev gæsterne vækket, og en skærm fortalte:

> ”*Saml jeres ting og flyt ind på det værelset ved siden af, der har det nummer, der er 1 højere end jeres nuværende værelsesnummer*”.

Så på alle hotellets gange rykkede gæsterne nu ud og ind af værelserne. Og vores par flyttede ind på værelse nr. 1. Alle havde et sted at sove.

**Øvelse 2.**

a) Senere ankommer et selskab på 5 par, som receptionisten også skaffer plads til. Hvordan gør han det? Hvilken besked, vil der nu stå på skærmen?
b) Næste dag får de en lidt større udfordring på Hilberts hotel. Der ankommer et større selskab med uendeligt mange gæster – men dog tælleligt mange. Kan hotellet skaffe plads til dem? Hvilket værelse har du skaffet til gæst nr. 10? Til gæst nr. 20? til gæst nr. $n$?
c) Tredje dag ankommer oven i hinanden to selskaber – hvert med uendeligt mange gæster. Kan hotellet skaffe plads? Hvordan?
d) Endelig på fjerdedagen kommer den ultimative udfordring: Udenfor står der uendeligt mange selskaber, hver med uendeligt mange gæster og vil gerne have plads. Kan du anvise en strategi for receptionisten, så alle bliver glade?

Du kan se en kort film om Hilberts hotel her:
[http://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4](http://www.youtube.com/watch?v=faQBrAQ87l4)

**ISBN 9788770668279**





| | |
|---|---|
| Hilberts hotel viser, at der altid er plads til én til – men også at, der er altid plads til uendeligt mange flere!<br><br>Vi kan udtrykke resultaterne af øvelserne på symbolsk form således: | $\infty + 2 = \infty$<br>$\infty + 2 \cdot 5 = \infty$<br>$\infty + \infty = 2 \cdot \infty = \infty$<br>$\infty + \infty + \infty = 3 \cdot \infty = \infty$<br>$\infty + \infty \cdot \infty = \infty$ |

Der er blot et enkelt problem i disse formler: Hvad betyder egentlig $\infty$ ? Vi har jo lige hørt, at der er flere slags uendelighed. Det dykker vi dybere ned i ved at fortsætte fortællingen om Hilberts hotel lidt endnu – der er nemlig trods alt grænser for hotellets formåen.

En dag er gæsternes utilfredshed med at blive flyttet rundt, med den uendelige morgenbuffet, med den uendeligt ringe rengøring, med at der ikke er uendeligt mange fjernsynskanaler osv. vokset til, at der var uendelig mange klagepunkter. Hotellet foreslår gæsterne, at de nedsætter nogle udvalg, der kan komme med forslag til forbedringer. Men ingen af gæsterne vil overlade til andre at bestemme noget som helst, så derfor foreslår hotellet, at gæsterne nedsætter alle de udvalg de har lyst til. Da gæsterne begynder at skændes om, hvem der skal være med i hvilke udvalg foreslår receptionisten, at de nedsætter alle tænkelige udvalg. Dvs. enhver tilfældig gruppering af gæster udgør et udvalg, så den enkelte er med i uendeligt mange.

Gæsterne accepterer forslaget, hvis receptionisten kan skaffe et værelse til hvert udvalg, hvor de kan holde møde. Kan han det?

Hvor mange udvalg kan der dannes, hvis vi nedsætter alle tænkelige udvalg? Lad os stille et lignende men meget lettere spørgsmål:

Hvor mange udvalg kan der dannes ud af en gruppe på 5 personer? Vi kan prøve at tælle dem ved at se på, hvor mange udvalg, der kan dannes med 1 medlem, med to medlemmer osv. og så summere til sidst. Men vi kunne også finde en anden måde at tælle antallet på, nemlig ved at se på hvordan et vilkårligt udvalg dannes: Vi spørger – er gæst nr. 1 med? Er gæst nr. 2 med?... Er gæst nr. 5 med?

**ISBN 9788770668279**


L&R Uddannelse
EGMONT

**Øvelse 3**
Hvor mange udvalg kan der dannes ud fra 5 gæster?

Svarene på vores spørgsmål - Er gæst nr. *i* med eller ikke med – er enten et ja eller nej, altså to muligheder. Det kan vi også repræsentere af tallet 1 for ja, tallet 0 for nej. På den måde kan et udvalgs sammensætning beskrives ved et 5-cifret decimaltal:

$$0,a_1a_2a_3a_4a_5\,,$$

hvor *a*'erne er enten 0 eller 1.
Tallet 0,01101 repræsenterer det udvalg, hvor gæst nr. 2, 3 og 5 er med.

Når vi skriver et udvalgs sammensætning på den måde er det let at se, at antallet af udvalg svarer til antallet af tal på den form. Og dette må jo være $2^5$, da der hver gang er to muligheder. Man kan godt diskutere om de to udvalg svarende til tallene: 0,00000 og 0,11111 er rigtige udvalg. De skulle vel egentlig holdes ude. Når vi i det følgende begynder at se på uendelige mængder er det naturligvis ligegyldigt med to udvalg fra eller til, så det vil vi ikke tage hensyn til.

**Øvelse 4**
Hvor mange af udvalgene er gæst nr. 2 med i?

Lad os nu vende tilbage til hotellet.

**Øvelse 5**

a) Argumenter for, at et udvalg kan beskrives ved hjælp af ét decimaltal, $0,a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}...$ hvor a'erne alle er 0 eller 1: $a_1 = 1$, hvis personen i værelse 1 er med, ellers 0. $a_2 = 1$, hvis personen i værelse 2 er med, ellers 0, osv. Så "antallet" af udvalg svarer til "antallet" af decimaltal skrevet udelukkende med 0 og 1.
b) Vi skriver normalt tal i ti-talsystemet, men vi kunne jo vælge at skrive i *totalsystemet* i stedet. Udnyt denne iagttagelse til at argumentere for følgende, hvor $\sqcup$ betyder "har samme mægtighed som" (dvs "er præcis lige så stor som":
    Mængden af forskellige udvalg af gæster $\sqcup$
    Mængden af decimaltal (mellem 0 og 1) dannet udelukkende ved hjælp af 0 og 1 $\sqcup$
    Mængden af reelle tal (mellem 0 og 1) $\sqcup$
    Mængden af reelle tal
    (*Hint*: Anvend definitionen på, at to mængder har samme mægtighed: Der er en 1-1 korrespondance mellem de to mængders tal.)

I analogi med taleksemplet ovenfor skrives det kardinaltal, der angiver antallet af udvalg, dvs. antallet af forskellige delmængder af gæster således: $2^{\aleph_0}$, idet antallet af gæster jo er $\aleph_0$.

Da antallet af udvalg altså svarer til antallet af reelle tal, og da vi ved fra Cantors store opdagelse, at de reelle tal ikke kan stilles på række og tælles, så kan der således ikke skaffes et værelse til hvert udvalg. Vi har nået grænsen for hotellets kapacitet.

Vi ser også, at vi i virkeligheden har vist mere end blot at svare på spørgsmålet om der er værelser nok til antallet af udvalg. Metoden ovenfor har generel karakter. Har vi givet en uendelig mængde *M*, hvis kardinalitet vi kunne betegne $\alpha_M$, så har *mængden af alle delmængder af M* en kardinalitet, der er større end $\alpha_M$, nemlig præcis $2^{\alpha_M}$. Da dette er en slags udvidet potens, kaldes denne mængde af delmængder også for *potensmængden hørende til M*. Den betegnes $\mathbb{P}(M)$ eller blot *P*(*M*). Vi har hermed skabt et værktøj, der giver os et uendeligt hierarki af uendeligheder.

**ISBN 9788770668279**



## 3. De rationale tal kan tælles

Vi har et par gange nævnt, at der ikke er flere rationale tal, end der er naturlige tal, dvs. mængden af rationale tal er tællelig. På en tallinje ligger de rationale tal så tæt, at uanset hvor vi er, uanset hvilket irrationalt tal vi vælger, fx $\pi$, og uanset hvor lille et interval, vi lægger om tallet $\pi$, så er der rationale tal i dette interval. Vi kan altså kort sagt lave en følge af rationale tal, der nærmer sig $\pi$ vilkårlig tæt. De første 50 cifre i $\pi$ er følgende:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

De første 10 tal i denne følge kan derfor se således ud:

3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,1415, 3,14159, 3,141592, 3,1415926, 3,14159265, 3,141592653

Selv om vi ikke kender alle de uendeligt mange decimaler i $\pi$, så findes de jo! Og derfor må der også findes en sådan følge af rationale tal, der kommer vilkårlig tæt på $\pi$.

Når de rationale tal ligger så tæt på tallinjen, skulle man umiddelbart tro, at der var lige mange rationale og irrationale tal. En sådan antagelse bestyrkes af, at der også gælder det modsatte: Uanset hvilket rationalt tal vi vælger, og uanset hvor lille et interval vi lægger om dette, så er der irrationale tal heri.

**Øvelse 6**

I C-bogens kapitel 7 findes afsnit om rationale tal (periodiske decimaltal) og irrationale tal. Hvis ikke du umiddelbart kan løse opgaverne i denne øvelse, så kan du slå op i C-bogen.

a) Skriv $\frac{22}{7}$ som et decimaltal. Hvad er perioden?

b) Argumenter for, at $\frac{53}{17}$ kan skrives som et periodisk decimaltal, *uden at gennemføre divisionen.*

c) Omskriv $3,\overline{14}$ til en brøk.

d) Argumenter for, at tallene: $s = 0,01001000100001...$ og $t = 3,14151415010010001...$ er irrationale.

e) Argumenter for, at uanset hvor lille et interval vi lægger om tallet $3,\overline{14}$, så er der irrationale tal heri. Vis det gerne med et taleksempel, fx et interval med bredde $10^{-15}$.

Uanset hvor vi er på tallinjen, ligger rationale og irrationale tal altså tæt op af hinanden. Der findes ingen steder på tallinjen en lille bitte enklave, hvor der udelukkende er irrationale eller udelukkende rationale tal. Det ser billedligt talt ud, som om de står skulder ved skulder. Men det er et forkert billede. Når vi zoomer ind på et bestemt sted, bliver der ved med at komme et mylder af rationale og irrationale tal. De står ikke på række, selv om vi for hvert par af tal altid kan afgøre hvilket, der er størst. Når vi zoomer ind på det sted på tallinjen, hvor $\pi$ ligger, og bliver ved med at zoome ind, er det som at kigge ned i en uendelig dyb brønd, hvor der uendeligt langt nede ligger ét tal, nemlig $\pi$.


Tallene står ikke på række på tallinjen. Men den helt store forskel på mængden af rationale og mængden af irrationale tal er, at de rationale *kan* stilles på række – godt nok en række, hvor de ikke står efter størrelse, men en række hvor alle er med. Det kan man ikke med de irrationale tal. Det var det, Cantor opdagede i december 1873!

**ISBN 9788770668279**


L&R Uddannelse EGMONT

Måneden før i november 1873 havde han skrevet til sin gode ven Richard Dedekind (1831 - 1916), at han ikke kunne løse dette problem, og at han var bekymret for, om det var ham, der var noget galt med:

> *"Mit spørgsmål er ganske enkelt, om man kan parre mængden af naturlige tal sammen med mængden af reelle tal, så alle får præcis én makker? Ved et første blik kunne man sige nej, det er umuligt, for de naturlige tal er en samling tal, der står hver for sig, mens de reelle tal udgør et kontinuum på tallinjen. Men der er ikke noget vundet ved et sådant argument, og selv om jeg er overbevist om, at man ikke kan parre dem sammen, kan jeg ikke finde en begrundelse, og selv om jeg bruger mange kræfter på det, så kan forklaringen være meget simpel"*
> (Cantor, brev til Dedekind 29. november 1873, citeret fra Joseph Daubens Cantor biografi)


Richard Dedekind

Cantor havde mødt Dedekind året før – i øvrigt på Cantors bryllupsrejse – og de to opbyggede gennem årene et nært venskab. Når han spørger Dedekind om dette, er det bl.a. fordi, Dedekind året før havde udgivet en artikel om, hvordan man kan opbygge en teori for tallene, hvor de irrationale tal bliver konstrueret ud fra de rationale. Og når han selv afviser det argument "ved første blik", var det fordi han på dette tidspunkt vidste, at både de rationale og de algebraiske tal er tællelige, dvs. de er af samme mægtighed som de naturlige tal. Ser vi på de rationale tal, kan man opstille disse i et system med uendeligt mange rækker, som vist her nedenfor:

| N \ T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{5}{1}$ | $\frac{6}{1}$ | $\frac{7}{1}$ | $\frac{8}{1}$ | … |
| **2** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{8}{2}$ | … |
| **3** | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{6}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | … |
| **4** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{4}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{8}{4}$ | … |
| **5** | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{8}$ | … |
| **6** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{8}{6}$ | … |
| **7** | $\frac{1}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{7}{7}$ | $\frac{8}{7}$ | … |
| **8** | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{8}$ | … |
| **…** | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

**ISBN 9788770668279**


**Øvelse 7**
Benyt illustrationen til at vise, hvordan Cantor har kunnet plukke alle de rationale tal og stille dem op i én lang række, så det er klart hvad det næste rationale tal må være. Bemærk, at de ikke kommer til at stå efter størrelse.

## 4. De reelle tal kan ikke tælles

Dedekind svarede straks, at han heller ikke kunne løse det, og 2. december skriver Cantor tilbage, at han var glad for at modtage svaret, da han havde beskæftiget sig med det i årevis og længe havde tvivlet på, om problemet med den manglende løsning lå hos ham selv - eller lå i selve problemet. Og da han fik Dedekinds bekræftelse på, at det ikke ham selv, der var noget galt med, så lykkedes det pludselig. Inden for en uge har han løst det og sender allerede 7. december Dedekind en skitse til sit bevis for, at de reelle tal ikke er en tællelig mængde, men er uendeligt meget større. Han videreudvikler og forenkler sine argumenter i senere artikler frem til sit berømte *diagonalbevis*.

Det er et såkaldt *modstridsbevis*, hvor Cantor antager det modsatte af påstanden, nemlig at de reelle tal *kan* tælles, og derefter fører dette til en modstrid. Cantor *antager* altså, at de reelle tal kan skrives op en i lang række, hvor alle tal er med. Vi tænker os alle reelle tal skrevet som uendelige decimaltal (hvis de er endelige, så fylder vi blot ud med nuller efter). Starten kunne være følgende tal:

$N_1, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}...$
$N_2, b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9b_{10}...$
$N_3, c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}...$
$N_4, d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7d_8d_9d_{10}...$
$N_5, e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10}...$
...

hvor *N*'erne er naturlige tal, og alle *a*'er, *b*'er, *c*'er, *d*'er og *e*'er er hele tal mellem 0 og 9. Overvej, hvordan dette nummereringssystem kan udvides, således at vi kan skrive alle de rækker op, vi kan ønske os.
Nu vil Cantor føre antagelsen om at alle reelle tal er med på listen til en modstrid. Det gør han ved at påvise, at der findes ét tal *C*, der i hvert fald ikke er med i denne liste over de reelle tal. Denne modstrid betyder jo, at vi må forkaste antagelsen om, at alle de reelle tal er med på listen, og vi kan konkludere, at de reelle tal ikke kan stilles på række, dvs. de kan ikke tælles!

Vi konstruerer tallet *C* decimal for decimal:

Tallet før kommaet sættes til 0.
Første decimal: Vi vælger et tal $x_1$, hvor $x_1 \neq a_1$.
Anden decimal: Vi vælger et tal $x_2$, hvor $x_2 \neq b_2$.
Tredje decimal: Vi vælger et tal $x_3$, hvor $x_3 \neq c_3$.
Fjerde decimal: Vi vælger et tal $x_4$, hvor $x_4 \neq d_4$.
…

Tallet *C* konstrueres altså ved, at vi som *n*'te decimal skriver et tal, der er forskellig fra det tal, der står som *n*'te decimal i det *n*'te tal på listen af alle reelle tal: $C = 0, x_1x_2x_3x_4x_5...$

**Øvelse 8**
Argumenter for, at dette tal *C* ikke kan være lig med noget tal på listen.

Cantor havde hermed fået bevist, at antallet af reelle tal er uendeligt stort på et helt andet niveau end antallet af naturlige tal og rationale tal.

**ISBN 9788770668279**



## 5. Kardinaltallene og kontinuumshypotesen

Der er åbenbart et hierarki af uendeligheder, og Cantor indfører derfor nogle særlige *kardinaltal*, der skal angive mægtigheden af de pågældende mængder.

Det første og mindste kardinaltal er et symbol for størrelsen af tællelige mængder. Det betegnes $\aleph_0$, og læses som nævnt ovenfor *aleph nul*. Cantor fandt en snedig metode til at få et nyt og større kardinaltal, når vi kender det foregående, således at vi får en række af kardinaltal:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \aleph_3,\ \ldots$$

hvor fx $\aleph_1$ repræsenterer mængder, der er uendeligt meget større end de tællelige, der repræsenteres af $\aleph_0$.

Cantor havde samtidig bevist, at mængden af reelle tal er uendeligt meget større end $\mathbb{N}$, og dermed har et kardinaltal større end $\aleph_0$. Dette kaldte han *c*. Men han havde ikke bevist, at $c = \aleph_1$. Hvad skulle det ellers være, kunne man spørge. Problemet er bare, at det ikke kan udelukkes, at der findes andre kardinaltal, dvs. mængder med en mægtighed et eller andet sted mellem de naturlige tal og de reelle tal – og tilsvarende højere oppe i hierarkiet.

I øvelsen om Hilberts hotel har vi i sidste punkt anvist en forholdsvis enkel metode til få et større kardinaltal end $\aleph_0$, nemlig ved at se på mængden af alle mulige udvalg, der kan dannes. Kardinaltallet for denne mængde skrives som $2^{\aleph_0}$, og vi så, at størrelsen af denne mængede svarer til de reelle tals mægtighed, dvs.:

$$c = 2^{\aleph_0}.$$

Konstruktionen kan generaliseres, så eksempelvis $2^{\aleph_1}$ er et kardinaltal, der er større end $\aleph_1$.

Cantor kæmpede længe med at bevise – eller modbevise – dette, men det lykkedes aldrig. Cantor var maniodepressiv og blev med tiden mere og mere invalideret. Meget tyder på, at hans første voldsomme anfald og sammenbrud i 1884 blev udløst af hans kamp for at løse dette problem. I ugerne op til sammenbruddet sendte han næsten dagligt nye artikler til et tidsskrift, én dag med beviser, som han dagen efter trak tilbage, en anden dag med modbevis, som han så også straks trak tilbage, og så igen et nyt forsøg på et bevis. Det meste af tiden var han overbevist om, at der gjaldt lighedstegn i $c = \aleph_1$ og formulerede dette som en formodning eller hypotese:

| |
|---|
| **Kontinuumhypotesen**<br>Der findes ingen mængder med kardinaltal mellem $\aleph_0$ og c. |

Påstanden er altså at c er det næste i rækken af kardinaltal. Og tilsvarende længere oppe i rækken, at fx

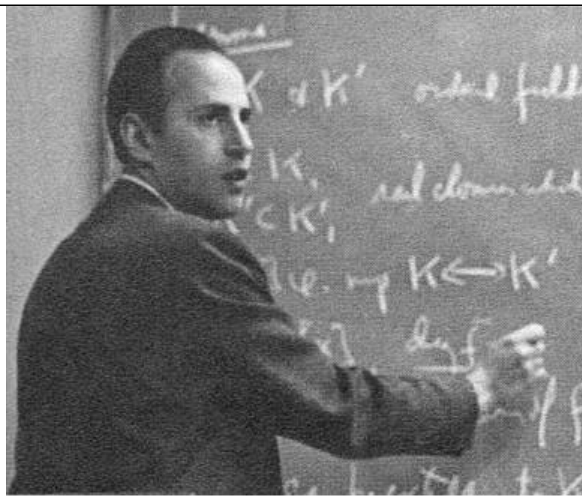
$$2^{\aleph_1} = \aleph_2$$

Det kan hurtigt komme til at svimle for os, når vi går op af denne stige af stadigt større uendelige kardinaltal. Ved $2^{\aleph_1}$ kan vi dog stadig danne et billede af uendeligheden, fordi dette kardinaltal kan repræsenteres af noget vi kender lidt til, nemlig *mængden af alle funktioner*.

Ved en stor matematikkongres i år 1900 formulerede Hilbert en vision for hvilke store matematiske problemer, der ville blive løst i løbet af de næste hundrede år. Der var 23 problemer på hans liste, som du fx kan finde på wikipedia. Det første af dem alle er netop kontinuumhypotesen.

Det var tiden før Titanics forlis og 1. verdenskrig, en optimismens tid med en nærmest ubegrænset tro på menneskets evne til at forstå, beskrive og beherske verden. Få årtier efter havde man ikke alene været igennem det totale sammenbrud i 1. verdenskrig, men også grundlæggende forestillinger i videnskaberne blev væltet omkuld. Også matematikken blev kastet ud i en krise, som netop kan illustreres med kontinuumhypotesen. Dette problem fandt nemlig en løsning, men en noget anderledes end Hilbert og Cantor og andre havde forestillet sig.

**ISBN 9788770668279**


|  Kurt Gödel |  Paul Cohen |
|---|---|
| Løsningen er, at der ikke er noget bestemt svar på om kontinuumhypotesen holder eller ej. I 1940 offentliggør Kurt Gôdel (1906-1978) en artikel, hvor han viser, at hypotesen ikke kan modbevises. Men i 1963 beviste Paul Cohen (1934-2007) at den modsatte påstand – dvs. at der skulle findes mængder med et kardinaltal mellem $\aleph_0$ og $c$ – heller ikke kan modbevises. Det er en *uafgørlig påstand*! | |

Ordet "kontinuum" beskriver den opfattelse, at tallinjen er sammenhængende overalt – uden huller. Havde vi kun de rationale tal til rådighed, ville tallinjen ikke bare være fuld af huller, men næsten kun bestå af huller.