**ISBN 9788770668279**

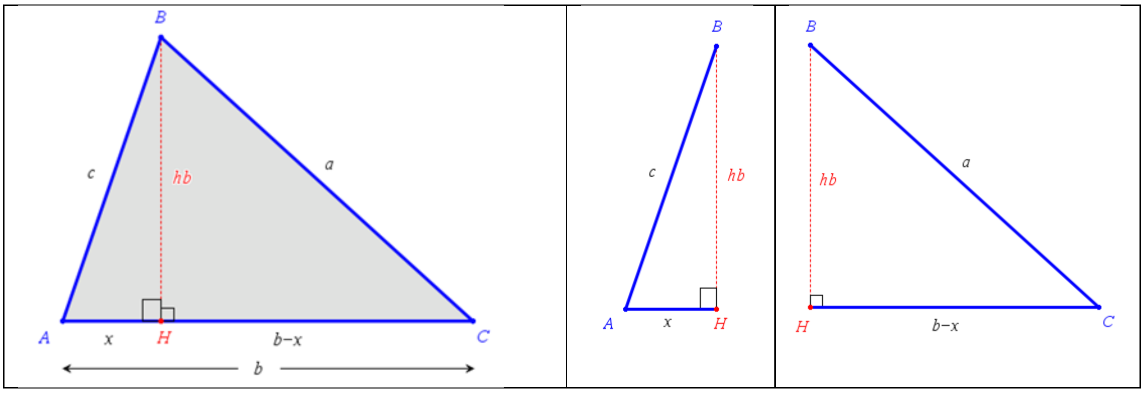

# Projekt 6.9 Herons formel (især for A)

Formlen for arealet af en trekant $ABC$ indeholder sinus til vinklen mellem de to sider eller vektorer:

$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$ eller $T = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right)$

Men samtidig har vi set, at arealet kan udtrykkes ved determinanten af de to vektorer, dvs udtrykt ved udelukkende koordinaterne til siderne, når disse opfattes som vektorer. At der findes en formel for arealet uden brug af vinkler, udelukkende med brug af trekantens sider, vidste man allerede i oldtiden. Formlen er opkaldt efter en af de store matematikere fra det gamle Grækenland, Heron. I dette miniprojekt udleder vi denne formel.

Opdel trekanten i to retvinklede trekanter ved hjælp af en af højderne, som det er vist på figuren til venstre. For overskuelighedens skyld tegner vi de to trekanter fri af hinanden:




1. Argumenter for formlerne:

$$c^2 = h_b^{\;2} + x^2$$
$$a^2 = (b-x)^2 + h_b^{\;2}$$

2. Vis, at de to udtryk kan kombineres til følgende:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot x$$

3. Vis ved omskrivninger af tidligere formler følgende:

$$h_b^{\;2} = c^2 - x^2$$
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b}$$

4. Kombiner de to udtryk til følgende:

$$h_b^{\;2} = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b}\right)^2$$

Her er højden udtrykt alene ved hjælp af de tre sider.
Men når vi erindrer den oprindelige formel for arealet: $T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$
så må det samme kunne gøres for arealet.

5. Start med at kvadrerer arealformlen:

$$T^2 = \tfrac{1}{4} \cdot b^2 \cdot h_b^{\;2} = \tfrac{1}{4} \cdot b^2 \cdot \left(c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b}\right)^2\right)$$

Udregning af parentesen kan godt virke lidt overvældende. Overlad til dit værktøjsprogram at omforme det på passende vis.

**ISBN 9788770668279**




Det kan gå således

$$T^2 = \tfrac{1}{4}\cdot b^2 \cdot \left( c^2 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b} \right)^2 \right)$$

$$T^2 = \frac{2\cdot a^2 \cdot b^2 + 2\cdot b^2 \cdot c^2 + 2\cdot c^2 \cdot a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

$$T^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Vi har hermed vist

**Herons formel**

Arealet for en trekant med siderne a, b og c er givet ved

$$T = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

Traditionelt skrives formlen også på formen

$$T = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

Hvor s står for den halve omkreds, dvs.

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

**Øvelse**

Trekant ABC har siderne 13, 17 og 22.

a) Konstruer trekanten i et geometriprogram og bestem arealet med programmets faciliteter

b) Bestem arealet med Herons formel