ISBN 9788770668279

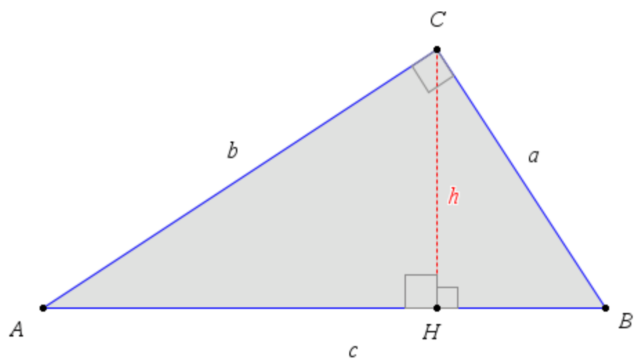
Projekt 6.7. Beviser for Pythagoras´ sætning - og konstruktion af animationer

Flere beviser for Pythagoras´ sætning

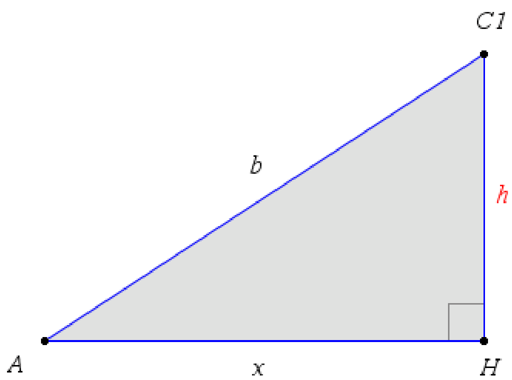
I dette projekt vil vi arbejde med endnu et par beviser for Pythagoras´sætning.

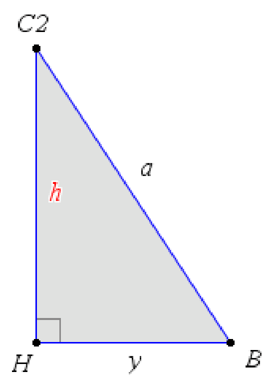
Bevis for Pythagoras sætning ved anvendelse af ensvinklede trekanter

I dette bevis deler man den retvinklede trekant i to dele ved at nedfælde højden *h* på hypotenusen:



Resultatet er, at der fremkommer to mindre retvinklede trekanter, der hver for sig også har en vinkel fælles med den store retvinklede trekant:





Vinkel *A* er fælles med trekant *ABC*

Vinkel *B* er fælles med trekant *ABC*

ISBN 9788770668279

Men heraf slutter vi, at alle tre trekanter er ensvinklede og dermed ligedannede.
Hvis vi kalder stykkerne, som hypotenusen deles i, for *x* og *y* (se figur), må følgende forhold mellem de ensliggende sider gælde:

$$\frac{\text{lang katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{x}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \frac{\text{kort katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{y}{a} = \frac{a}{c}$$

Vi ser nu specielt på de sidste udtryk:

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{c}.$$

Hvis vi ganger *c* over på højre side i hver af de to ligninger, får vi:

$$c \cdot \frac{x}{b} = b \quad \text{og} \quad c \cdot \frac{y}{a} = a.$$

På samme måde kan vi gange henholdsvis *b* og *a* over på højre side, så vi får:

$$c \cdot x = b^2 \quad \text{og} \quad c \cdot y = a^2.$$

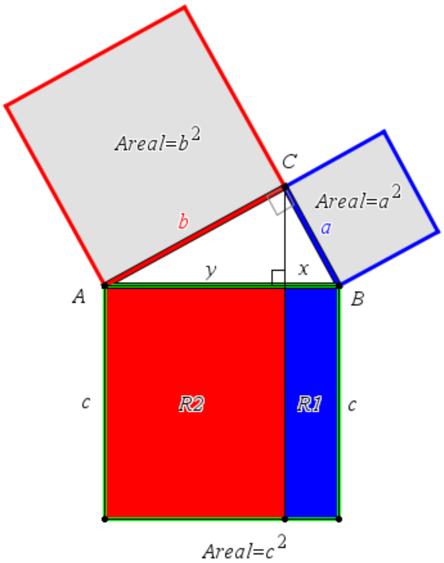
Nu lægger vi så de to ligninger sammen, og så får vi:

$$\begin{array}{l} c \cdot x = b^2 \\ \underline{+\, c \cdot y = a^2} \\ c \cdot x + c \cdot y = b^2 + a^2 \end{array}$$

Men $c \cdot x + c \cdot y = c \cdot (x + y)$ og $x + y = c$, dvs $c \cdot x + c \cdot y = c \cdot (x + y) = c \cdot c = c^2$, og derfor får vi:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dermed har vi vist Pythagoras sætning med brug af vores viden om ensvinklede trekanter.
Bemærk, at beviset også frembringer den geometriske fortolkning af sætningen, som vi henviste til, idet vi jo netop bruger højden fra *C* i trekant *ABC* til at splitte kvadratet på hypotenusen i to rektangler R_1 og R_2.



De to rektangler R_1 og R_2 har nemlig arealerne

$$A_1 = c \times x \text{ og } A_2 = c \times y,$$

og vi fandt jo, at

$$a^2 = c \times x \text{ og } b^2 = c \times y,$$

altså må der gælde, at

$$A_1 = a^2 \text{ og } A_2 = b^2.$$

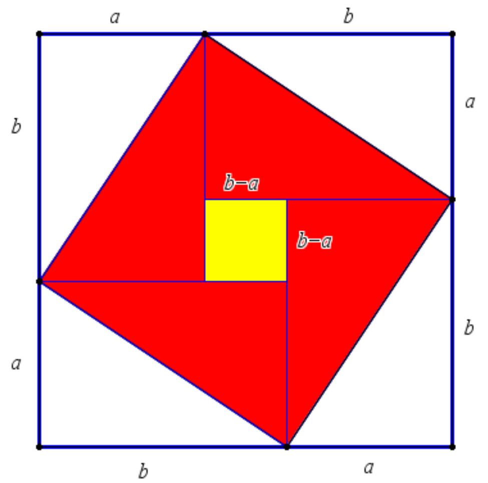
Dvs. arealet af det ene rektangel R_1 er præcis lige så stort som arealet af kvadratet med sidelængden a, og arealet af det andet rektangel R_2 er præcis lige så stort som arealet af kvadratet med sidelængden b.

ISBN 9788770668279

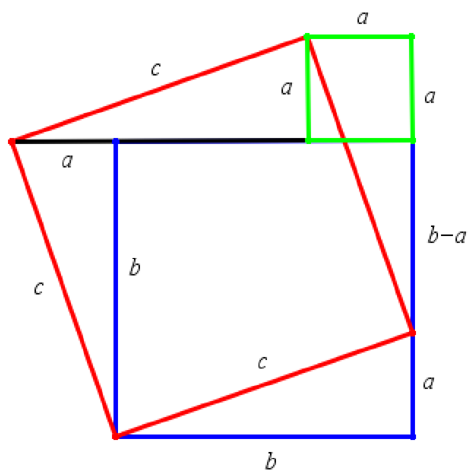
L&R Uddannelse
EGMONT

Opgave 1 Et kinesisk og et indisk bevis for Pythagoras´ sætning

Der findes mange forskellige beviser for Pythagoras´ sætning. Nedenfor et to af disse illustreret ved figurer, som med arealargumenter er beviser for Pythagoras´ sætning.
Gennemfør disse argumenter i hvert af de to tilfælde.

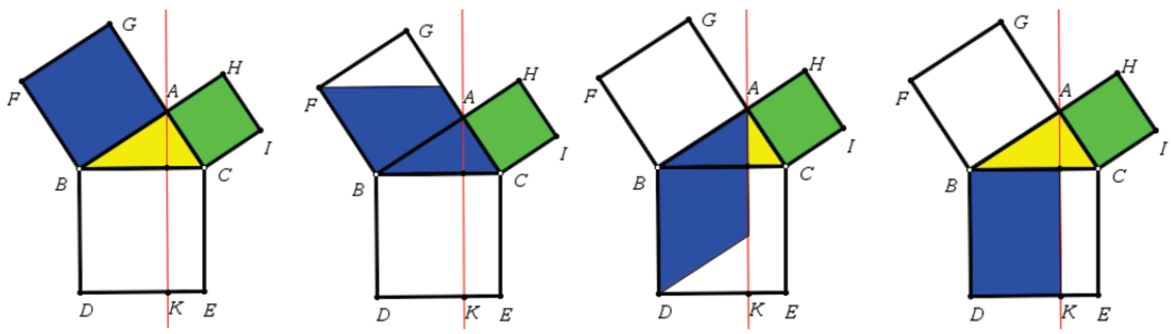


Figuren illustrerer den måde, den kinesiske matematiker Zhao Shuang argumenterede for Pythagoras´ sætning i ca. 300 evt. i det kinesiske skrift Zhoubi suanjing, hvor han kommenterer et ca. 500 år ældre kinesiske matematisk resultat. Dette skrift hører til blandt de ældste skrevne matematiske kilder i Kina[1].



Den vigtigste indiske matematiske kilde er Sulbasutras. Her findes ikke noget bevis for Pythagoras´ sætning, men beregningerne viser, at inderne kendte sammenhængen. Meget senere i midten af det 16. århundrede anvendte den indiske matematiker Jyesthadeva ovenstående figur i sit bevis for Pythagoras´ sætning.

Opgave 2 Kongestolen



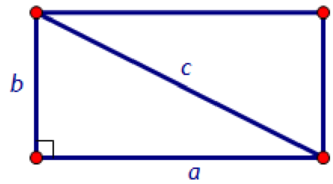
Den geometriske argumentation ovenfor kan, som antydet på figuren, konstrueres som en animation, der bygger på Euklids bevis for Pythagoras´ sætning.
Prøv animationen på hjemmesiden, og prøv selv at konstruere animationen i TI-Nspire (se vejledning nedenfor).

[1] Nogle af disse blev fundet i et gravkammer i 1984 skrevet på bambusflager.

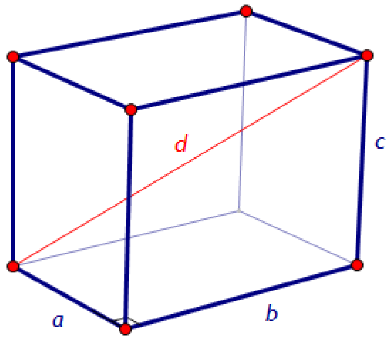
ISBN 9788770668279

Pythagoras sætning i flere dimensioner

Vi vil se på hvordan man kan generalisere Pythagoras sætning så den gælder i højere dimensioner.
Først ser vi på det tre dimensionale tilfælde, dvs. i rummet.
Pythagoras´ sætning i to dimensioner handler om at bestemme længden af diagonalen i et rektangel med sidelængderne a og b:



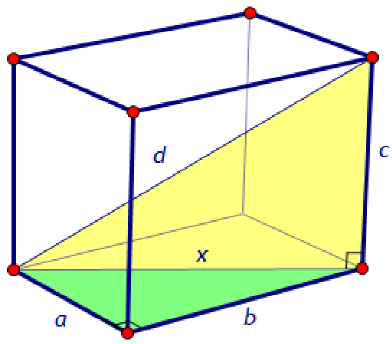
Tilsvarende handler Pythagoras´ sætning i tre dimensioner om at bestemme længden af diagonalen i en retvinklet kasse med sidelængderne a, b og c:



Vi vil vise, at der gælder, at diagonalen er bestemt ved:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Hvis vi lægger et snit i kassen langs diagonalen vinkelret på kassens bund, så kan vi bevise sætningen ved at anvende Pythagoras´ sætning i to dimensioner på de to plane retvinklede trekanter, der opstår – her markeret med gul og grøn:



Når vi anvender Pythagoras´ sætning på den grønne trekant, så får vi:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

og når vi anvender Pythagoras´ sætning på den gule trekant, så får vi:

$$d^2 = x^2 + c^2$$

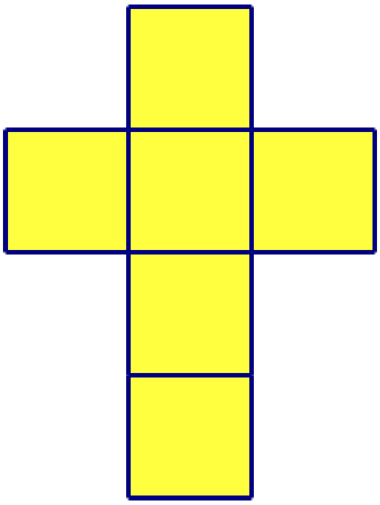
$$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2 \qquad \text{Udnytter at } x^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

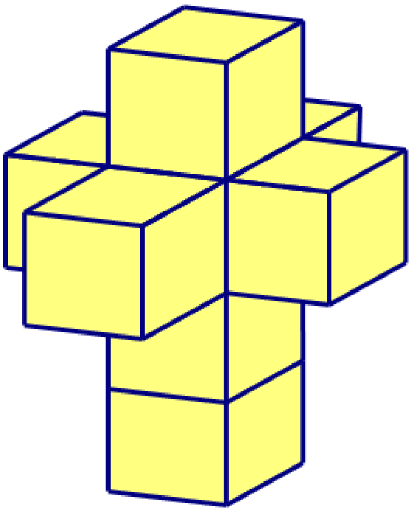
som netop er Pythagoras´ sætning i rummet.

Fortsætter vi tankegangen, vil vi nok pr. intuition acceptere, at dette også må gælde i højere dimensioner end 3. Der er imidlertid vanskeligt at tegne sig frem til et bevis som ovenfor, fordi hvordan tegner man en kasse i fire dimensioner? Man kan fx begynde med at se på den udfoldede tre-dimensional terning:

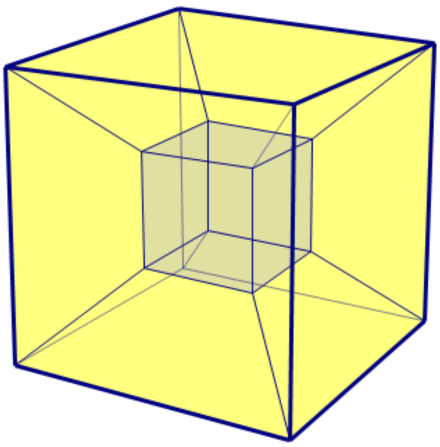
ISBN 9788770668279



I fire dimensioner vil den udfoldede hyperterning bestå af 8 terninger, og den kan illustreres således:



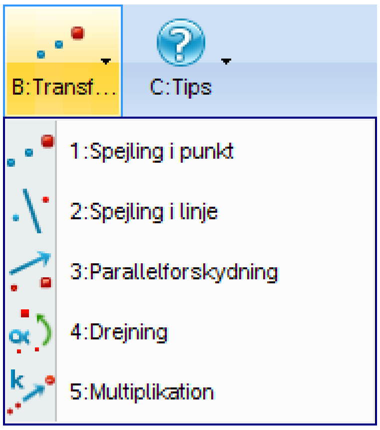
Hvis vi drejer alle disse 8 terninger 90° opad i det fire-dimensionale rum, så vil vi netop få en hyperterning, som tegnet i perspektiv i tre dimensioner kan illustreres således:



hvor vi ser de 8 terninger som den indre og den ydre samt de seks terninger, som forbinder den indre med den ydre. I frie dimensioner handler Pythagoras´ sætning således om, at bestemme længden af en diagonal i en tilsvarende retvinklet hyperkasse med sidelængderne a, b, c og d.

ISBN 9788770668279

Animationer som beviser for Pythagorassætning



Vi vil konstruere to animationer i TI-Nspire, som begge er dynamiske beviser for Pythagoras´ sætning. Udgangspunktet er **Transformations**-menuen i **Geometri**-værkstedet.

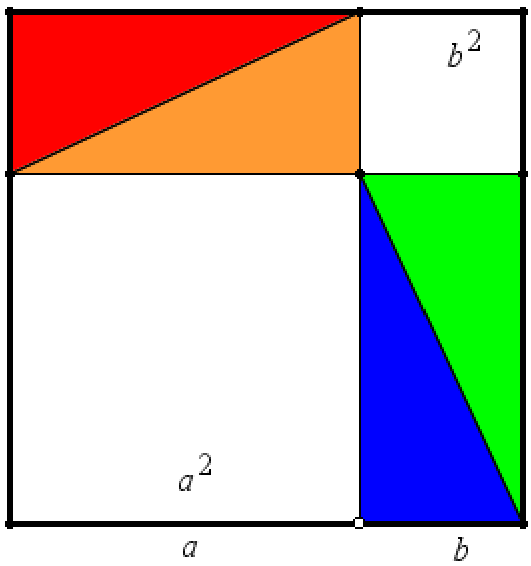
Det er specielt **Drejning**, som afhænger af drejningsvinklen α, og **Multiplikation**, som afhænger af forstørrelsesfaktoren k, der egner sig til animationer. Ideen er at vi skal have flyttet en figur fra et sted til et andet. Vi kan da flytte et ankerpunkt for figuren og på den måde trække figuren med, eller vi kan parallelforskyde figuren med en vektor, der forbinder startpunktet med ankerpunktet. Hvis figuren skal drejes bruger vi en drejning med en variabel drejningsvinkel på samme måde.

Animationer kan styres af en **skyder**. Som udgangspunkt kan vi bruge en **enheds-skyder**, der går fra 0 til 1. Men ellers kan vi bare skalere skyderens værdier passende.

Eksempel 1: Pythagoras sætning

Der findes adskillige variationer af Pythagoras sætning, som har et tydeligt visuelt og dynamisk islæt. Det første bevis tager udgangspunkt i sætningen om kvadratet på en toleddet størrelse. Man starter derfor med at konstruere et vandret linjestykke, der deles i to delstykker med et variabelt delepunkt. Det repræsenterer den toleddede størrelse *a* + *b*:

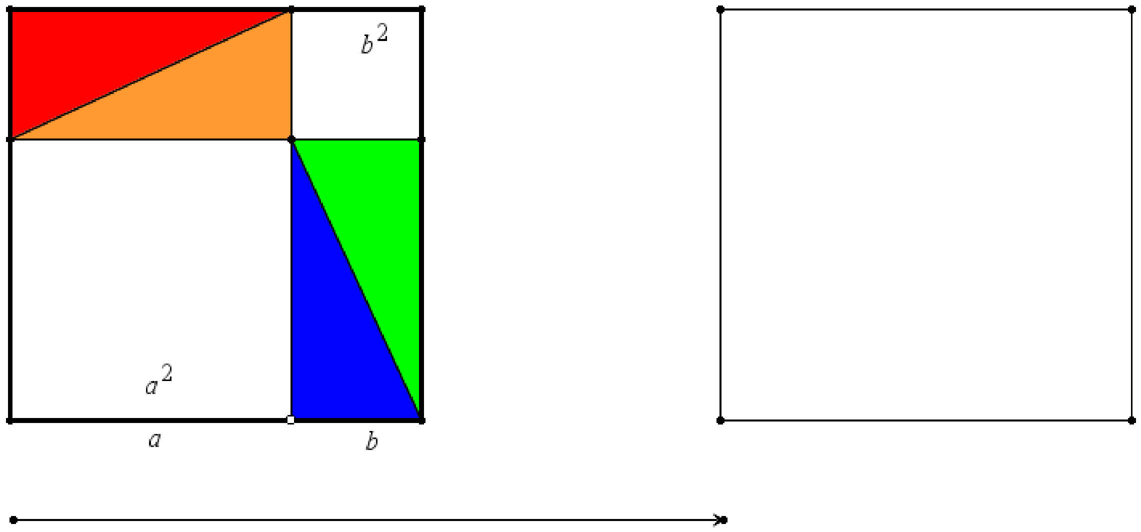
Figuren er dynamisk idet vi kan trække i delepunktet og derved ændre på de enkelte bidrag til summen. Oven på dette linjestykke konstruerer vi nu et **kvadrat** og opdeler det på traditionel vis i to delkvadrater og to rektangler. Hvert af disse rektangler opdeles derefter i to retvinklede trekanter med kateterne *a* og *b* samt hypotenusen *c*:



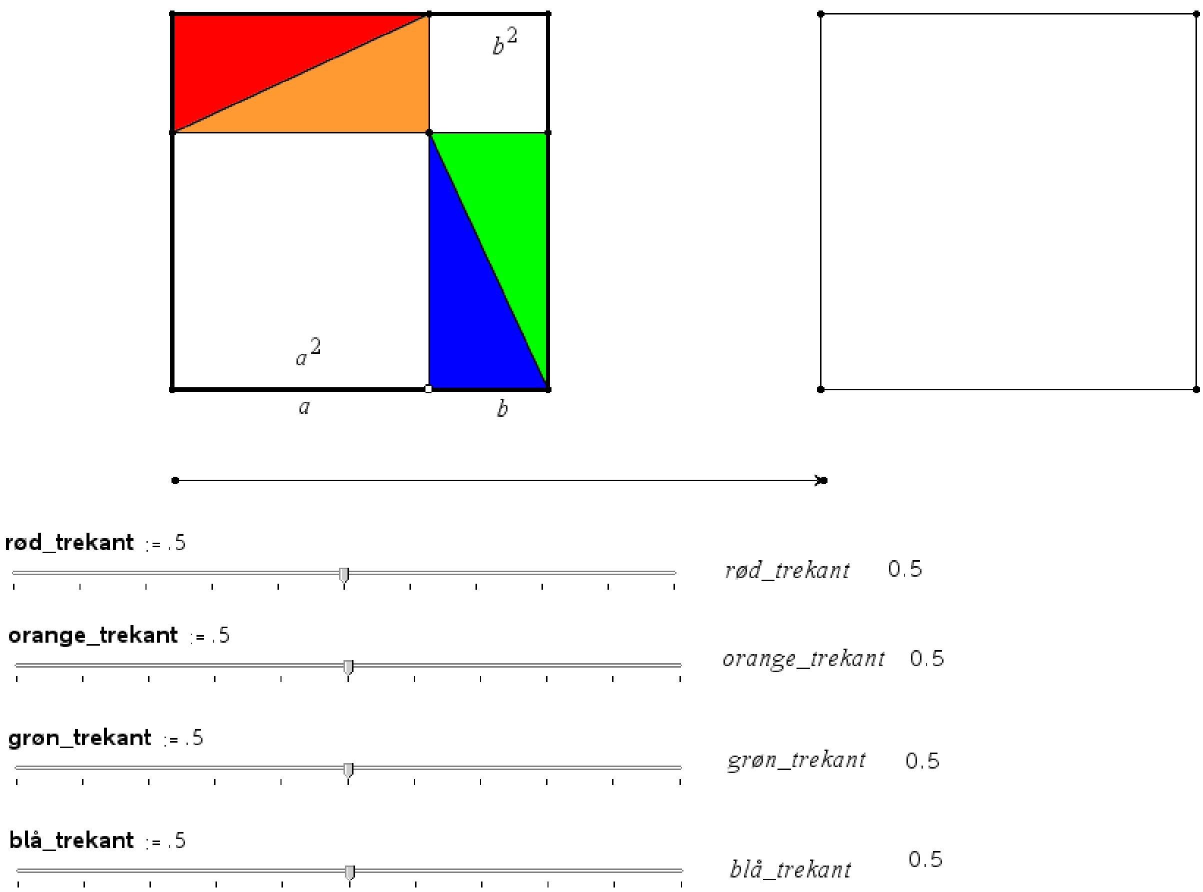
Det viser altså kvadratsætningen $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$.

Men vi vil nu flytte rundt på trekanterne, så de hver for sig placeres i et hjørne af det store kvadrat. Det gør vi på et separat kvadrat, så vi ikke mister den oprindelige figur.

Vi lægger derfor ud med en vandret parallelforskydning af det store kvadrat. Parallelforskydningen kontrolleres af en lang vandret vektor, som vi forskyder langs:



Vi indfører nu fire enhedsskydere, der skal styre forskydningerne af de fire trekanter. De fire skydere indstilles, så de ikke viser værdien, der er irrelevant for geometrien bag konstruktionen. For hver af de fire skydere opretter vi derefter en tekstboks med navnet på skyderen og beregner tekstboksen (med tryk på L), så vi også får skyderens værdi ind i geometrirummet og dermed kan bruge den i de efterfølgende konstruktioner:

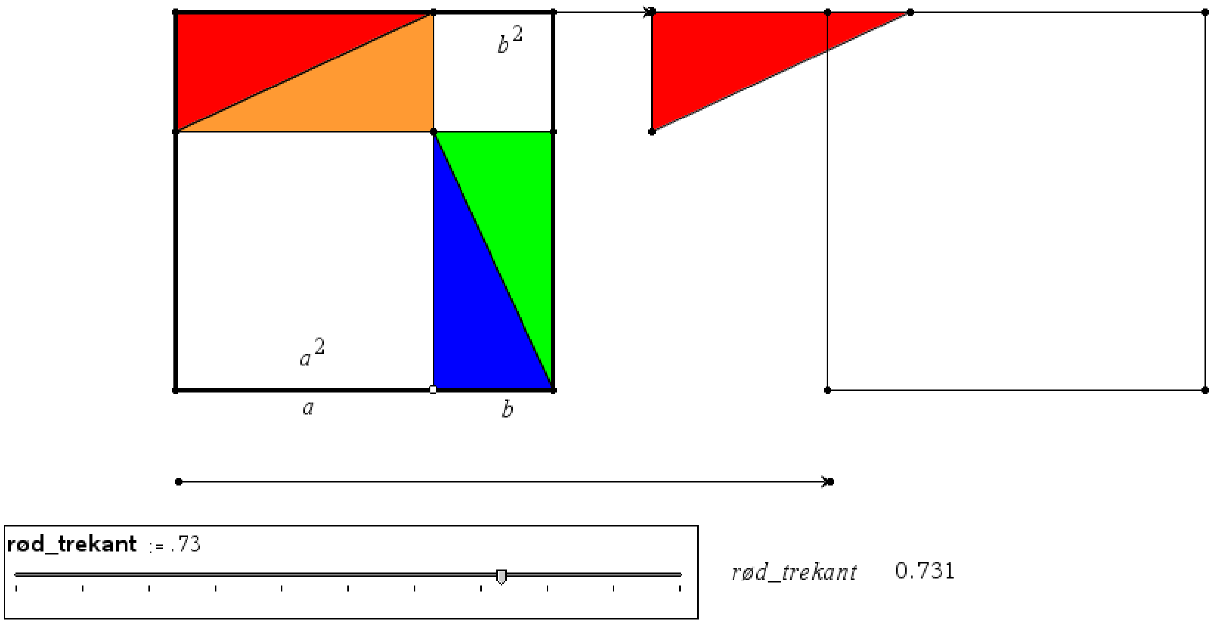


På basis af de fire skydere kan vi nu flytte de fire trekanter over i deres nye position. Princippet er det samme for alle fire trekanter, så vi nøjes med at vise det for den røde trekant.

Ankerpunktet for den røde trekant er det retvinklede hjørnepunkt. Det passer ind i kvadratets øverste venstre hjørne (tilsvarende passer den orange trekants hjørnepunkt ind i kvadratets nederst højre hjørne osv.)

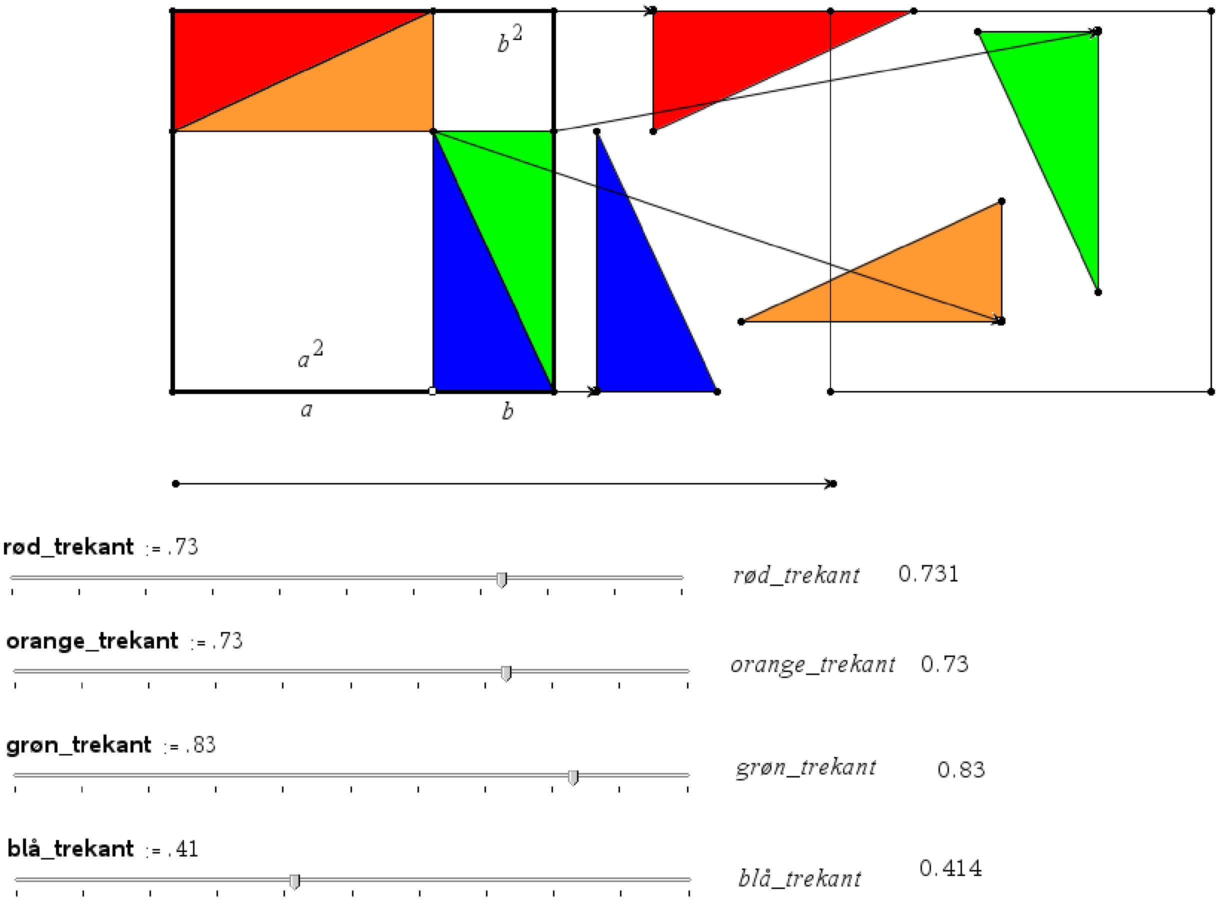
ISBN 9788770668279

Vi vælger nu multiplikation i transformations-menuen og udpeger den røde trekants hjørnepunkt som startpunkt, det forskudte kvadrats venstre hjørnepunkt som det punkt, der skal multipliceres, og endelig værdien af den røde trekantskyder som forstørrelsesfaktor. Vi får derved frembragt et kontrolpunkt, der glider frem og tilbage mellem startpunktet og slutpunktet for den røde trekant.
Vi konstruerer nu en vektor fra startpunktet til kontrolpunktet og parallelforskyder den røde trekant langs denne vektor. Den forskudte trekant farves også rød, så man kan se, hvor den kommer fra. Når vi trækker i den 'røde' skyder vil den røde trekant derfor flytte sig lige så fint fra det oprindelige kvadrat til dets slutposition i det nye kvadrat:



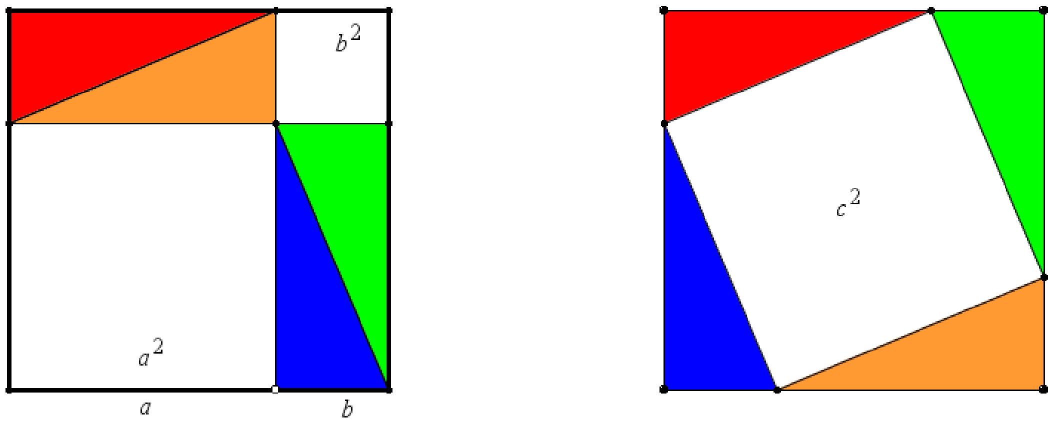
ISBN 9788770668279

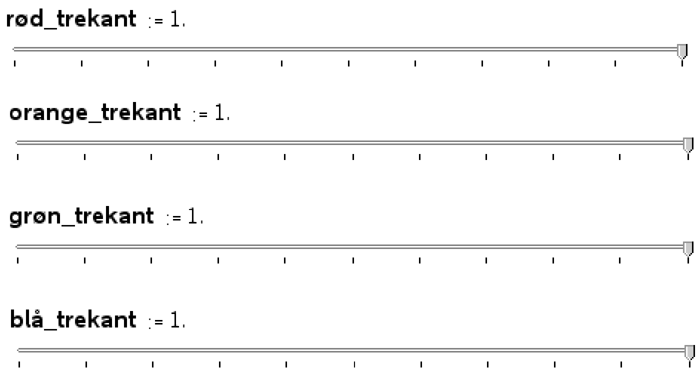
Derefter gør vi det samme med de tre sidste trekanter:



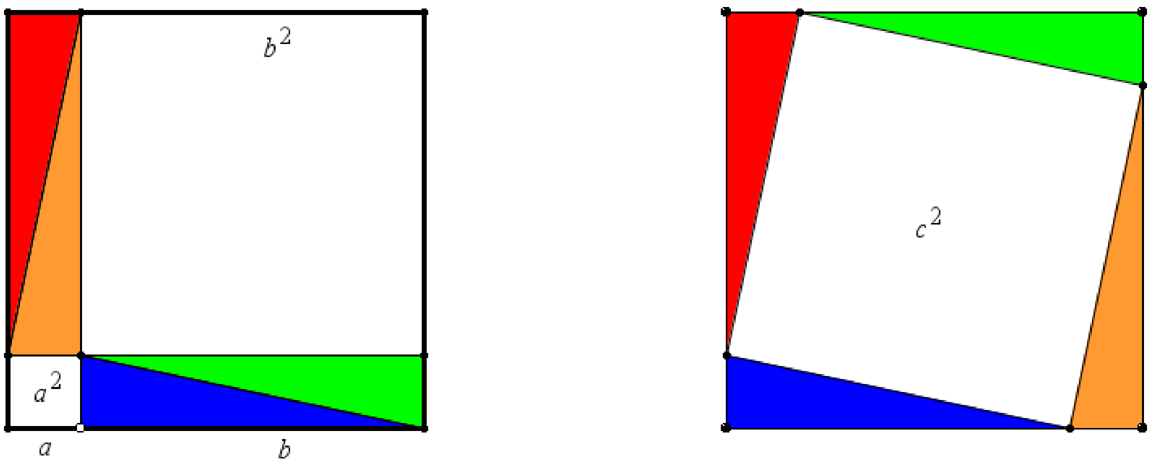
Til sidst skjuler vi alle de overflødige vektorer, tekstbokse med beregninger og værdierne af beregningerne. Trækker vi alle skyderne i bund, ser vi da netop at de oprindelige kvadrater på kateterne a^2 og b^2 er blevet transformeret over i kvadratet på hypotenusen c^2. Men så må de jo have samme areal, dvs. $c^2 = a^2 + b^2$.

ISBN 9788770668279





Figuren er naturligvis fuldt dynamisk. Trækker vi i delepunktet for grundlinjen i det første kvadrat følger alt med.

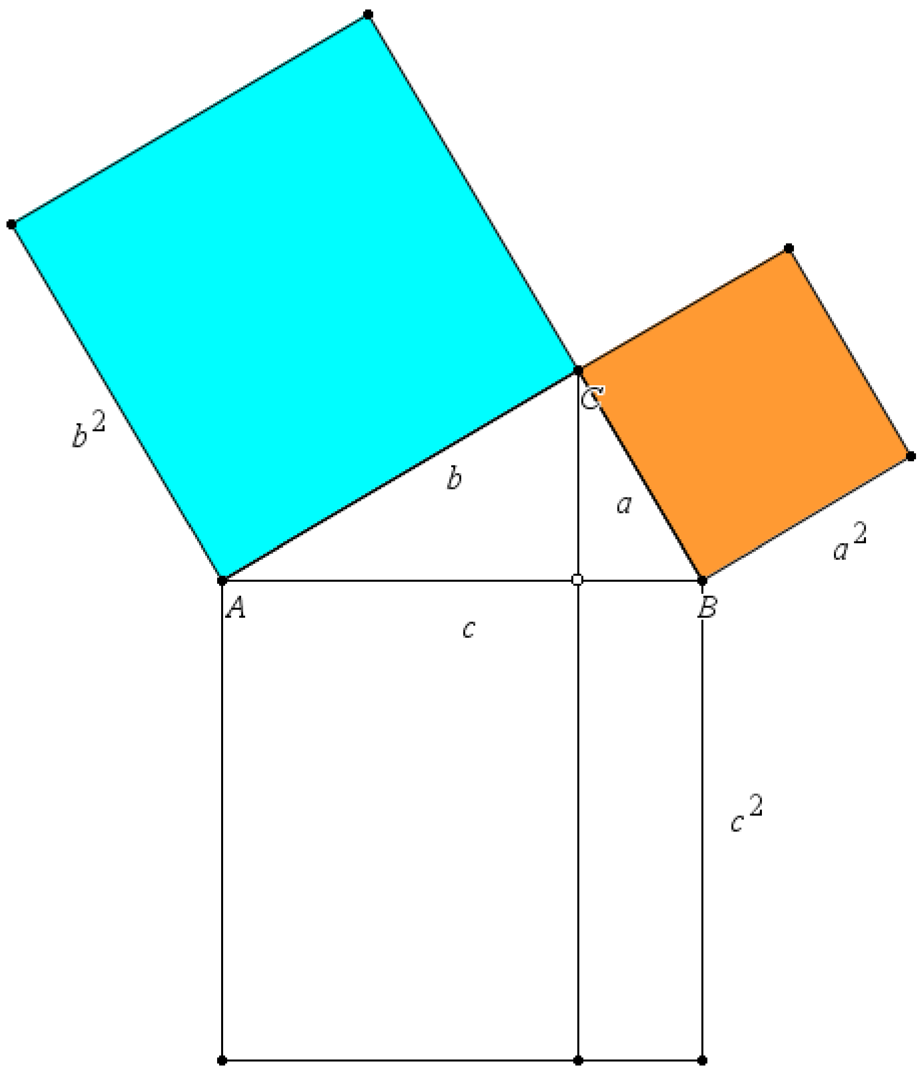


ISBN 9788770668279

Eksempel 2: Kongestolen

Vender vi os nu mod Euklids bevis, den såkaldte kongestol, er transformationerne mere komplicerede, og animationen skal derfor opbygges mere omhyggeligt.

Udgangspunktet er en opdeling af hypotenusekvadratet ud fra højden på hypotenusen. Vi skal så bevise at de to rektangler, der opstår netop har samme arealer som de to kvadrater på kateterne:

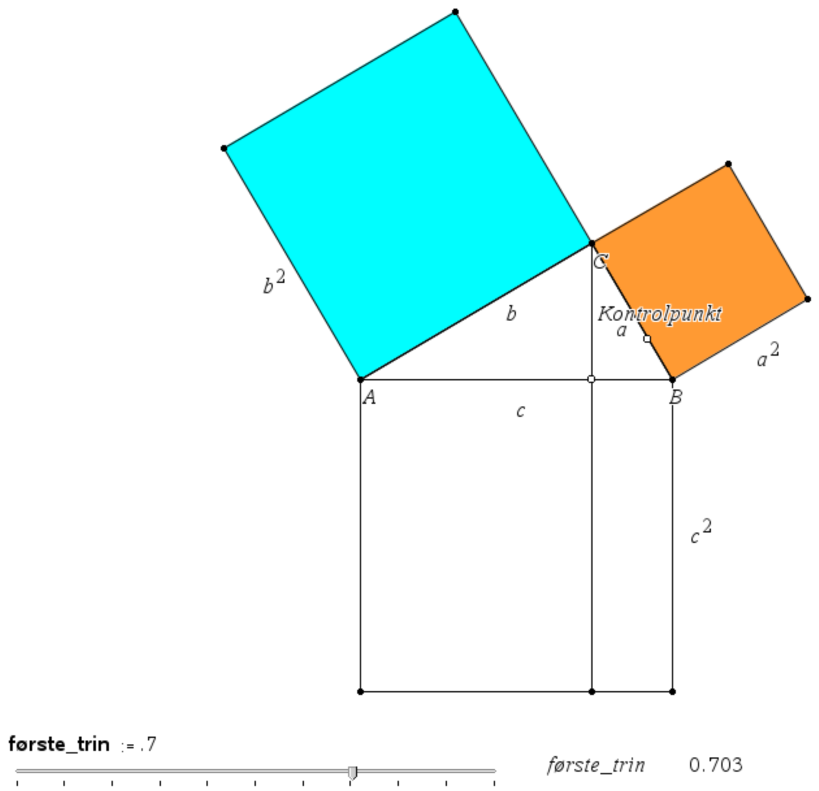


Figuren er selvfølgelig dynamisk, så man kan trække i højdens fodpunkt på hypotenusen.

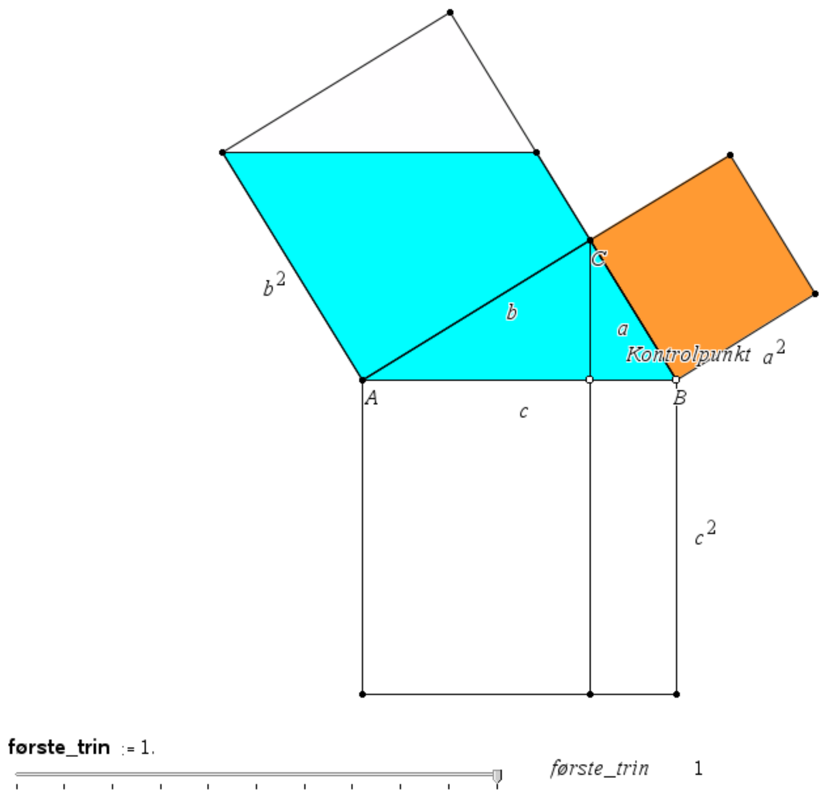
Vi transformerer nu det lyseblå kvadrat b^2 over i det venstre delrektangel. Det sker i tre trin. Vi indfører derfor tre enhedsskydere for at kunne kontrollere de tre trin. Til hver af skyderne oprettes en tekstboks, med samme navn som skyderen og tekstboksen beregnes (tast L), så skyderens værdi også bliver tilgængelig i geometri-rummet.

Det første trin er en **shear**-operation. Den har ikke noget godt dansk navn, men vi vil kalde det en **forskubning** langs kvadratets grundlinje (der bærer etiketten b^2). Den bevarer grundlinjen, men skubber punktet *C* ned i punktet *B* (parallelt med grundlinjen!). Vi udfører derfor en multiplikation med startpunkt i *C*, hvor vi multiplicerer punktet *B* med værdien af enhedsskyderen for det første trin for at frembringe et kontrolpunkt, der netop skubbes fra *C* til *B*, når vi trækker i skyderen:

ISBN 9788770668279



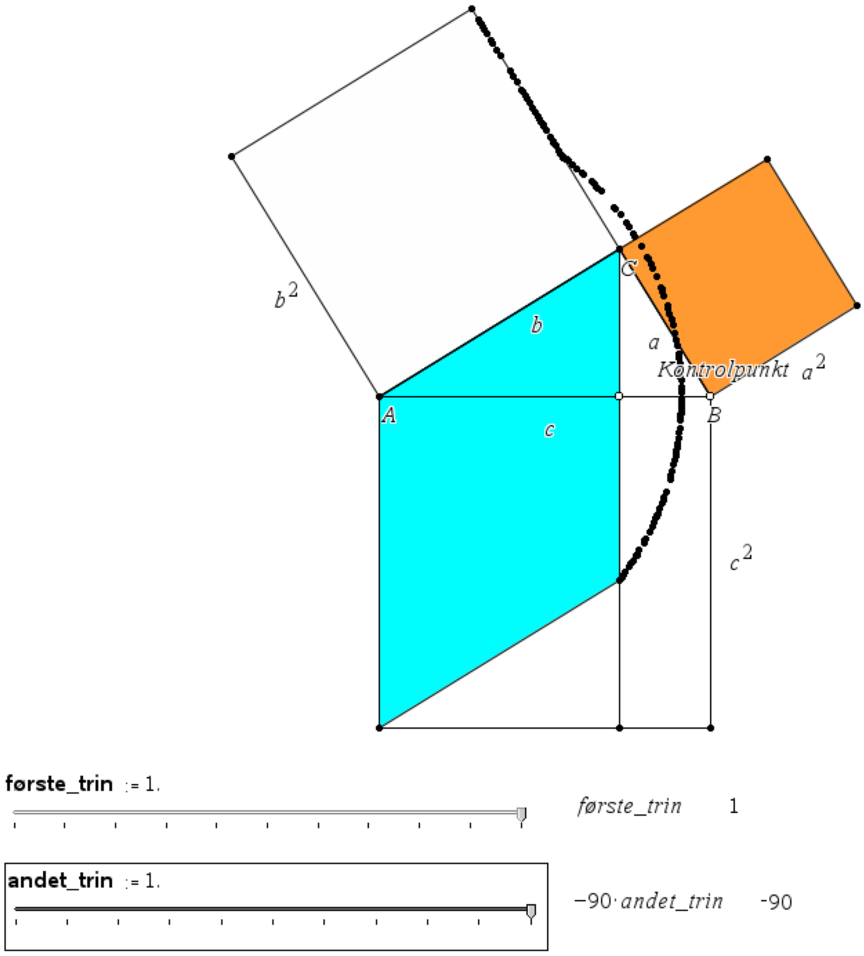
Vi konstruerer derefter parallelogrammet med samme grundlinje som kvadratet og kontrolpunktet som hjørnepunkt. Dette parallelogram har samme areal som kvadratet, fordi de har fælles grundlinje og fælles højde. Parallelogrammet farves lyseblå og vi fjerner farven for det oprindelige lyseblå kvadrat. Vær omhyggelig med konstruktionen af parallelogrammet, så det ikke forsvinder, når du deformerer den retvinklede trekant. Du må *ikke* bruge skæringspunkter med katetekvadratets sider i konstruktionen!



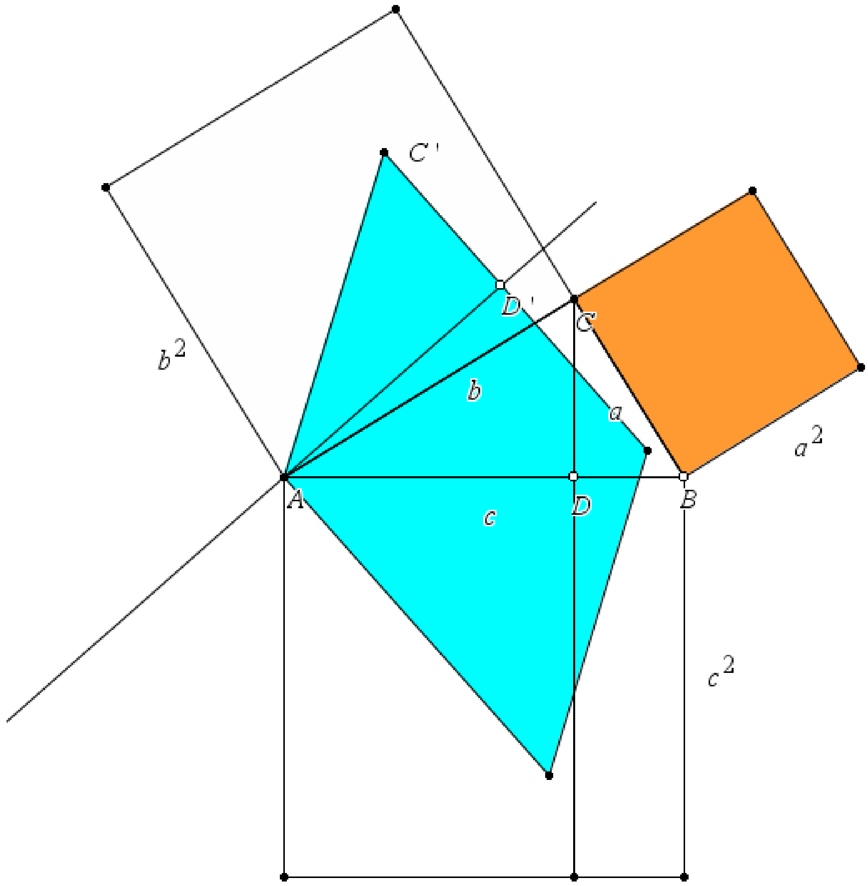
ISBN 9788770668279

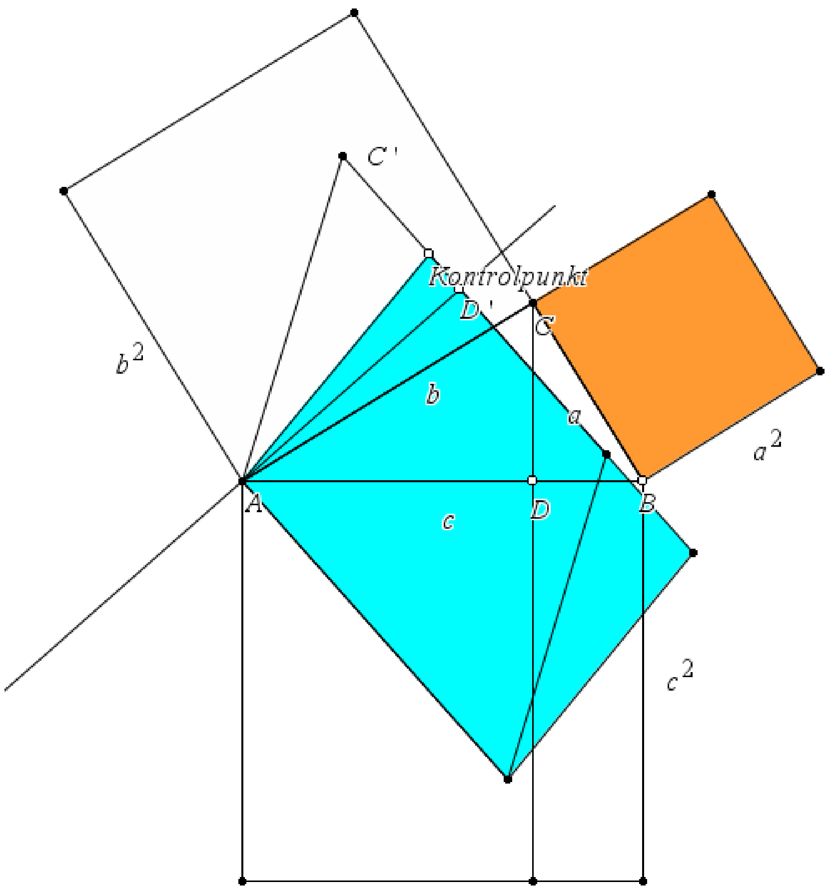
Vi skal så i gange med drejningen af parallelogrammet, så det lægger sig op af siderne i hypotenusekvadratet. Vi skal altså udføre en drejning omkring A med drejningsvinklen -90°, fordi vi drejer i negativ omløbsretning. Vi indfører derfor en ny skyder svarende til det andet trin, og beregner denne gang værdien af drejningsvinklen, dvs. $-90° \cdot andet\_trin$. Drejningsvinklen vil da netop 'vokse' fra startværdien 0° til slutværdien -90° når vi trækker i skyderen. Derefter udfører vi derfor drejningen af parallelogrammet omkring punktet A med den beregnede drejningsvinkel. Du har nu to parallelogrammer: Det oprindelige forskubbede parallelogram og det drejede program. Skjul nu det forskubbede parallelogram, så det kun er det sidste, der kan ses. Det sidste parallelogram tegnes nu også lyseblåt. Kontroller, at det sidste parallelogram virker hele vejen, dvs.

1. Nulstil begge skydere
2. Træk først i den første skyder og kontrollér at kvadratet forskubbes
3. Træk derefter i den anden skyder og kontroller at det forskubbede kvadrat, dvs. parallelogrammet, drejes.



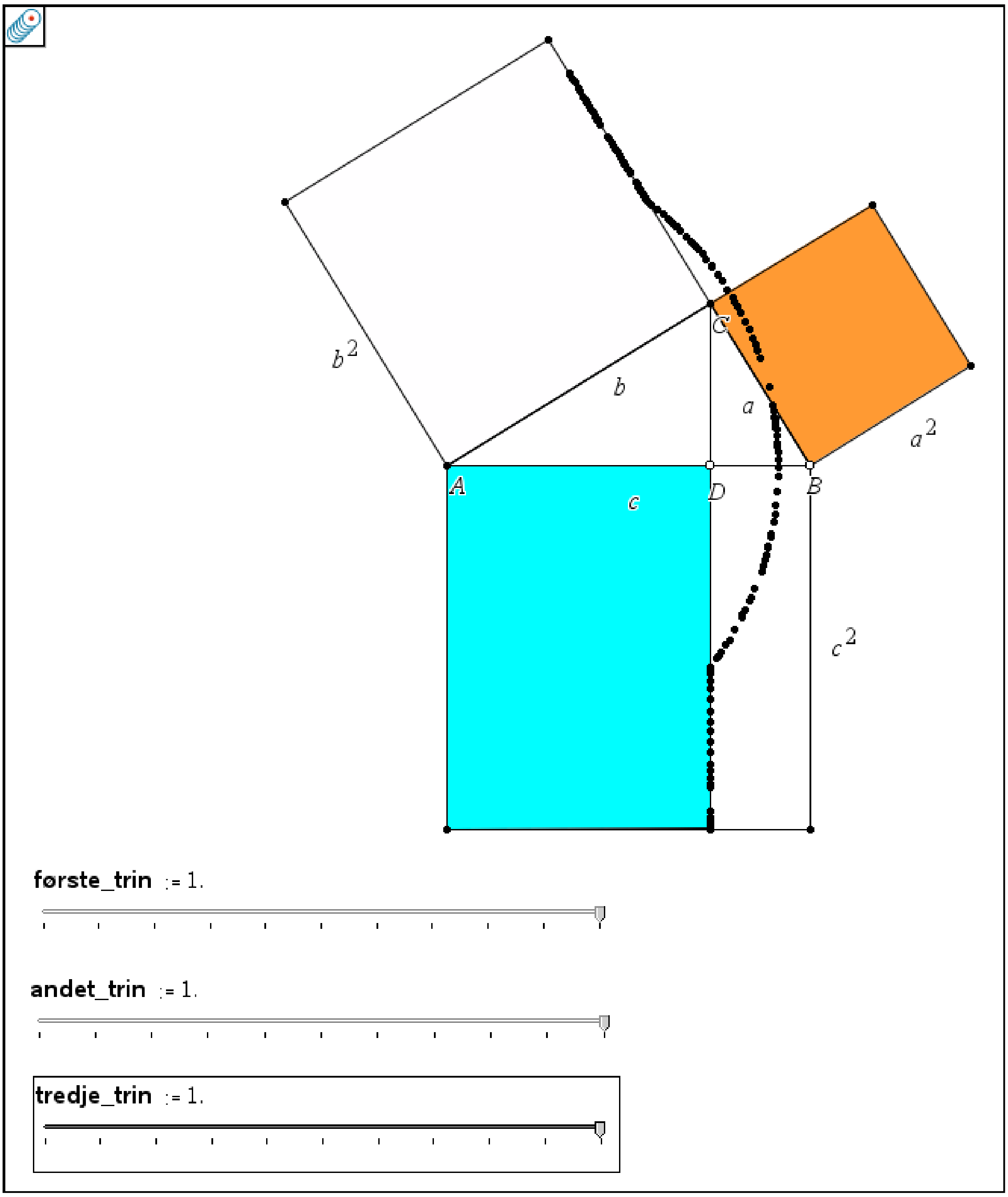
Der er sat spor på det øverste hjørne i katetekvadratet, så man kan se, hvordan det først forskydes, og dernæst drejes. På skærmen ser man selvfølgelig hele den dynamiske proces udfoldet!
Vi mangler så kun den sidste forskubning af parallelogrammet lodret ned i det venstre rektangel. Derved overføres punktet C i fodpunktet for højden. Da forskubningen hverken ændrer den lodrette grundlinje eller den vandrette højde, ændrer denne sidste transformation heller ikke arealet. Vi indfører derfor en skyder svarende til det tredje trin, og overfører værdien til geometri-rummet via en tekstboks. Det sidste trin er det sværeste! Sørg for at den anden skyder ikke er drejet i bund: Punkterne der ryger over i det retvinklede hjørnepunkt C henholdsvis højdens fodpunkt D kaldes C' og D'. Derefter udføres en multiplikation af D' omkring C' med skyderens værdi som forstørrelsesfaktor. Derved frembringes et nyt kontrolpunkt. Til sidst konstrueres parallelogrammet udspændt af den drejede grundlinje og kontrolpunktet som hjørnepunkt.





Du kan nu skjule den drejede figur fra det andet trin, så du kun beholder parallelogrammet fra det tredje trin. Samtidigt kan du skjule hjælpelinjer og overflødige tekstbokse, beregninger osv.

ISBN 9788770668279



Igen er der sat spor på, så man kan følge det ene hjørne under hele processen.
Samme proces gennemføres for kvadratet på den anden katete, og hvis du har været omhyggelig, kan du nu trække i de 6 skydere efter tur og se kongestolen udfolde sig på skærmen. Det er ikke helt simpelt, så man skal være lidt sej for at få animationen til at gå op!