ISBN 9788770668279

Projekt 6.5 Vektorers beskrivelseskraft

Indhold

ISBN 9788770668279

Projekt 6.5 Vektorers beskrivelseskraft

Vektorer i gymnasiet

I den klassiske plangeometri kendes en række sætninger om egenskaber ved linjer og cirkler knyttet til trekanter, som fx at de tre midtnormaler altid vil skære hinanden i ét punkt, og at dette er centrum for den såkaldte omskrevne cirkel. Dvs. enhver trekant ABC har den egenskab, at der findes en cirkel, der går gennem A, B og C. Det er bestemt ikke indlysende, at dette må være tilfældet. Men lige præcis denne sætning er forholdsvis let at bevise i den klassiske geometri. For andre sætninger er beviset lidt mere tricket. Det gælder fx sætningen om, at de tre højder altid vil skære hinanden i ét punkt. Eller sætningen om, at medianerne i en trekant skærer hinanden i ét punkt, og at dette punkt deler hver median i forholdet 2:1. Med indførelsen af vektorer får vi ofte et mere ligetil – og mere elegant – argument for påstanden.

Geometri i det tredimensionelle rum forekommer os i dag nærmest utænkelig uden anvendelse af vektorer, men naturligvis er det muligt. Vektorer har først vundet udbredt anvendelse inden for de sidste 100 år, og før den tid var man også i stand til at bestemme afstande mellem objekter i rummet, at projicere et punkt på en linje osv. Også mere komplicerede sammenhænge kunne man håndtere – fx er kronen på værket i Euklids Elementer behandlingen af de 5 regulære polyedre. Her i bog 13 beviser han dels eksistensen af dem - ved at konstruere dem - og dels udleder han en række af deres egenskaber. Men den slags argumenter krævede altid gode færdigheder i at tegne og forestille sig tingene i det tredimensionelle rum. Med vektorer går det ofte lettere, og den helt store fordel ved anvendelsen af vektorer i matematikken viser sig, når man går op i højere dimensioner, og når man generaliserer vektorbegrebet. Dette er omtalt i projektet om lineær algebra.

Her vil vi holde os til plangeometriens to dimensioner og først til sidst tage et skridt ud i rummet
Vi vil for hver af sætningerne gennemføre både et geometrisk og et vektorielt argument.

Linjestykker og parallelogrammer

Sætning 1: Midtpunktet mellem punkterne *A* og *B*
Koordinaterne til midtpunktet *M* mellem punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan bestemmes som:

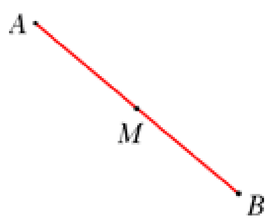
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

På vektorform: Midtpunktet *M* mellem punkterne A og B opfylder:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$$

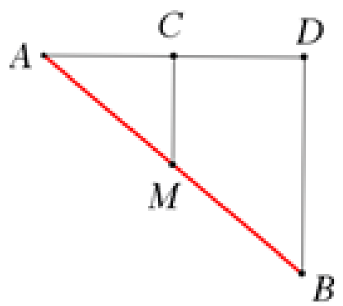
Bevis inden for den klassiske geometri

Lad *M være midtpunktet af linjestykket* AB.



Tegn gennem *A* en linje parallel med 1. aksen, og tegn gennem *M* og *B* linjer parallelle med 2. aksen.

Skæringspunkterne mellem linjerne kaldes *C* og *D* – se figuren:



Da *M* er midtpunkt, er $|AM| = \tfrac{1}{2} \cdot |AB|$.

ISBN 9788770668279

1. Argumenter for, at trekanterne *ACM* og *ADB* er ensvinklede.

2. Argumenter for, at $|AC| = \frac{1}{2} \cdot |AD|$, samt for at $|MC| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$

3. Indfør nu koordinatervne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ og argumenter for, at med punkternes beliggenhed som på tegningen, så gælder

$$|AD| = x_2 - x_1 \quad \text{og} \quad |BD| = y_1 - y_2$$

4. Med punkternes beliggenhed fås *x*-koordinaten til *M* ved at addere $|AC|$ til *x*-koordinaten til *A*.
Og *y*-koordinaten til *M* fås ved at subtrahere $|MC|$ fra *y*-koordinaten til *A*. Udnyt nu dette til at vise formlen:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Bevis med anvendelse af vektorer

Vi udnytter konsekvent, at koordinaterne til et punkt *P* er lig med koordinaterne til punktets stedvektor $\overrightarrow{OP}$.
Derved oversættes punkter umiddelbart til vektorer.
Vi udnytter endvidere vektorregnereglen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, der kommer fra indskudssætningen.
Vi starter næsten som før, men nu med en vektorligning:

	Angiv selv hvad der sker
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$	
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \right)$	
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$	
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}$	
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$	

Nu har vi en ligning kun med stedvektorer, så her kan vi indsætte koordinaterne og får formlen, idet vektorkoordinater adderes koordinatvis.

Det er nok svært at argumentere for at den sidste version er meget lettere end den første. Men vi ser, at den store forskel på, de to metoder er, at i den geometriske version skal man få en "god ide", og hvor kommer den lige fra? (Her var den nok ret ligetil). I den vektorversionen opløses vektorerne ofte i de simplest mulige former og så "regner man bare" som i ligninger eller redauktioner.

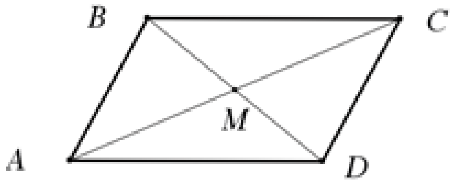
Efter hver af de følgende sætninger opfordres holdet til at drøfte – i grupper – hvad der er kernen i hver af beviserne og så sammenligne sværhedsgrad, "elegance" og andet I synes adskiller bevistyperne.

ISBN 9788770668279

Diagonalerne i et parallelogram

Sætning 2: Diagonalerne i et parallelogram
I ethvert parallelogram gælder, at diagonalerne halverer hinanden

Tegn et parallelogram *ABCD* og
tegn diagonalerne.
De skærer hinanden i punkter M.



Bevis inden for den klassiske geometri

1. Argumenter for at trekanterne *AMD* og *BMC* er *kongruente*, ved at påvise, at trekanterne har én side og de to hosliggende vinkler lige store.

2. Så kan trekanterne briunges til at dække hinanden. Argumenter nu for at AM er det halve af AC og BM er det halve af BD.

Bevis med anvendelse af vektorer

Vi viser, at $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$. Tilsvarende kan vises, at $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$.

	Angiv selv i de tomme felter, hvad der sker
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$	Indskudssætningen
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OD}$	Anvend sætning 1
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OD}$	…
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}$	…
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$	
$= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$	

Heller ikke ved disse små beviser kan man se en særlig fordel ved at bruge vektorer. Men i den geometriske verden skal man kende en række specialsætninger, man trækker på. I vektorernes verden er det grundlæggende værktøj indskudssætningen.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

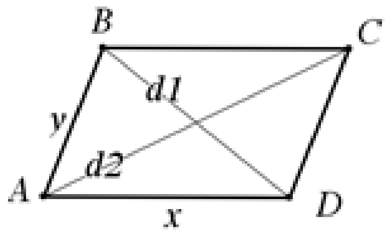
Kvadratsummen af diagonalerne

Sætning 3: Kvadratsummen af diagonalerne
Lad *ABCD* være et parallelogram, lad x og y betegne de to sidelængder, og lad d_1 og d_2 betegne de to diagonaler. Så gælder:

$$d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 2x^2 + 2y^2$$

Tegn et parallelogram *ABCD* og tegn diagonalerne.

Sæt betegnelser på sider og diagonaler:



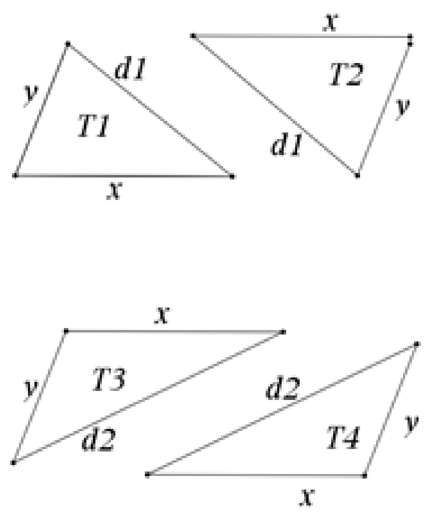
Geometrisk bevis

Her henter vi viden ind fra trigonometrien og anvender cosinusrelationerne.

Læg mærke til, at parallelogrammet kan klippes i trekanter op på to måder, som du ser på figuren.

Cosinusrelationerne i trekant *T1*:
$d_1^{\,2} = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(v)$,
hvor v er vinklen mellem siderne x og y i trekant *T1*.

Cosinusrelationerne i trekant *T3*:
$d_2^{\,2} = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(w)$,
hvor w er vinklen mellem siderne x og y i trekant *T3.*



1. Argumenter nu for, at $w = 180 - v$.

2. Argumenter for, at vi deraf kan slutte, at $\cos(v) = -\cos(w)$

3. Konkluder nu ved at lægge de to ligninger sammen.

ISBN 9788770668279

Bevis med anvendelse af vektorer

Af tegningen af parallelogrammet ser vi:

$$d_1 = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right|$$
$$d_2 = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right|$$

Kvadratsætningerne for vektorer giver nu:

$$d_1^{\,2} = \left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$d_2^{\,2} = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Læg sammen og konkluder.

Midtnormaler og højder i en trekant

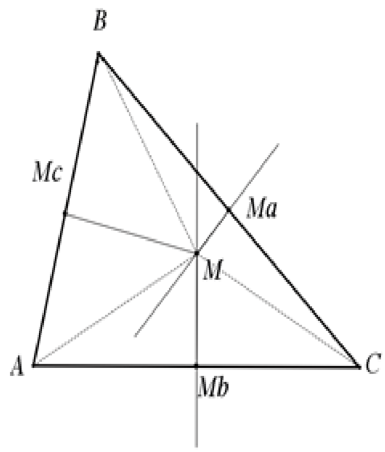
Sætning 4: Midtnormalerne i en trekant
I enhver trekant gælder, at de tre midtnormaler skærer hinanden i samme punkt, og at dette punkt er centrum for en omskreven cirkel.

Vi tegner en trekant *ABC*, og markerer de tre midtpunkter, M_a, M_b og M_c

Vi oprejser de vinkelrette i punkterne M_a og M_b. Disse to midtnormaler skærer naturligvis hinanden i et punkt *M*.

Spørgsmålet er nu, om den tredje midtnormal vil gå gennem det samme punkt. Dette kan omformuleres til følgende, der er lettere at undersøge:

Vi trækker linjen fra *M* til M_c. *Spørgsmålet er nu, om denne linje er midtnormal til den sidste side*.



Geometrisk bevis

Også her anvender vi en viden om kongruente trekanter:

1. *M* ligger på midtnormalen gennem M_b. Argumenter for, at heraf kan slutte, at trekanterne AMM_b og CMM_b er kongruente.

2. Nu ved vi altså, at *MA* og *MC* er lige lange. Argumenter på samme måde for at *MC* og *MB* er lige lange.

3. Når *MA* og *MC* er lige lange, og ligeledes *MC* og *MB* er lige lange, så er *MA* og *MB* er lige lange.

4. Argumenter for, at trekanterne BMM_c og AMM_c er kongruente.

5. Argumenter ud fra punkt 4, at så må vinklerne ved M_c være lige store og derved være lig med 90°. Dvs. linjen MM_c er midtnormalen til c. Altså midtnormalen til c går også igennem *M*.

Vi bemærker, at undervejs i beviset fik vi som et "spinoff" resultatet, at der er lige langt fra M til de tre hjørner, dvs. M er centrum for en cirkel gennem de tre hjørner.

ISBN 9788770668279

L&R Uddannelse EGMONT

Bevis med anvendelse af vektorer

Hvis *M* ligger på midtnormalen gennem M_c, så skal gælde, at $\overrightarrow{MM_c} \perp \overrightarrow{AB}$.
I vektorernes verden undersøges dette ved at se, om skalarproduktet er 0: $\overrightarrow{MM_c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$?
Vi anvender nu, at M_c er midtpunkt, dvs. sætning 1:

1. Vis, at $\overrightarrow{MM_c} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ er ensbetydende med: $\left(\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

2. Omskriv denne ligning til: $\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}$

Det er dette vi ønsker at vise. Men nu udtrykker vi blot det vi ved på samme måde:

3. Vis, at

$$\overrightarrow{MM_a}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$
$$\overrightarrow{MM_b}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

4. Vis, at dette kan omskrives til:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OC}^2\right) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{CB}$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}$$

5. Adder de to ligninger og vis, at vi kan omskrive til det ønskede:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2\right) = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Dette udtrykte som vi så ovenfor, at $\overrightarrow{MM_c} \perp \overrightarrow{AB}$, dvs. *M* ligger på midtnormalen gennem M_c.

Vi bemærker, at her skal vi tilføje argumentet, at hvis M ligger på alle midtnormaler, er der lige langt til alle hjørner, dvs. M er centrum for en cirkel gennem de tre hjørner.

Højderne i en trekant

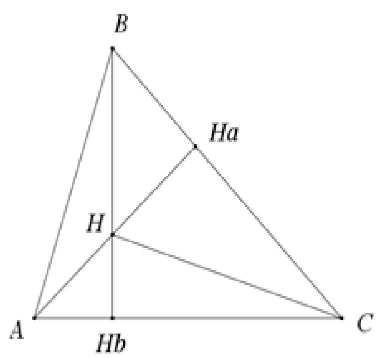
Sætning 5: Højderne i en trekant
I enhver trekant gælder, at de tre højder skærer hinanden i samme punkt

Tegn en tilfældig trekant, *ABC*, og tegn højderne fra *A* og fra *B*.

Højderne skærer de modstående sider i henh. H_a og H_b.

Højderne skærer hinanden i et punkt, vi kalder for *H*.

Træk linjen fra *H* til *C*. Påstanden er nu, at denne linje ligger på højden fra *C*.



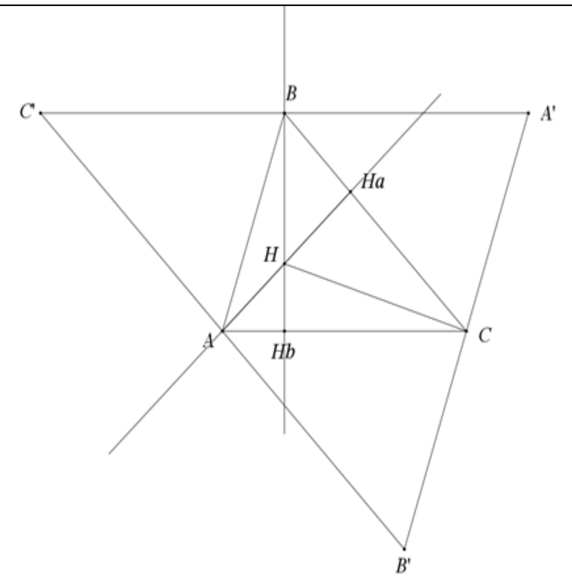
ISBN 9788770668279

Geometrisk bevis

En af de centrale erfaringer, man gør sig når man har arbejdet med mange og mange forskellige geometriske problemer er, at man aldrig skal være "bange" for at udvide den givne tegning ved at tilføje nye linjer.

At tegne en sådan linje, der fører mod målet, hører til kategorien "at få en god ide". Gode ideer kommer ikke ud af det blå, men bygger på ens viden og erfaring. I dette tilfælde har vi allerede en vis viden om linjer ved trekanter: Sætning 3 siger at *midtnormalerne* skærer hinanden i et punkt.

Hvis vi nu gennem *A* tegner en linje parallel med *a*, gennem *B* tegner en linje parallel med *b*, og gennem *C* tegner en linje parallel med c, så får vi en ny trekant *A'B'C'*.



1. Argumenter for, at de tre højder i den gamle trekant også står vinkelret på siderne i den nye store trekant.

2. Firkanterne *ABA'C*, *AC'BC*, *ABCB'* er ud fra konstruktionen alle parallelogrammer (overvej det!).
Anvend dette til at vise, at vise:

$$|C'B| = |BA'| \qquad |B'C| = |CA'| \qquad |C'A| = |AB'|$$

3. Anvend nu sætningen om midtnormalerne til at konkludere at de tre højder skærer hinanden i samme punkt.

Bevis med anvendelse af vektorer

Vi tegner lige trekanten med de to højder samt linjen fra *C* til *H* igen. Vi skal vise, at *CH* ligger på højden fra *C*.

1. Vi ved, at

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, og derfor: $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, og derfor: $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

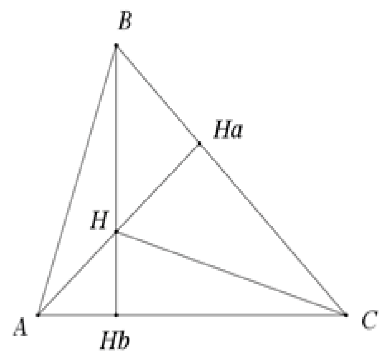
Omskriv til: $\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

2. Vis, at vi ud fra de to ligninger får følgende:

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

3. Vis, at dette kan omskrives til: $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
og konkluder, at *CH* ligger på højden fra C



Selv om det geometriske bevis rummer et flot argument, så bygger det jo grundlæggende på, at man får den gode ide med at tegne den store trekant. Vektorbeviset er derimod helt ligetil.

ISBN 9788770668279

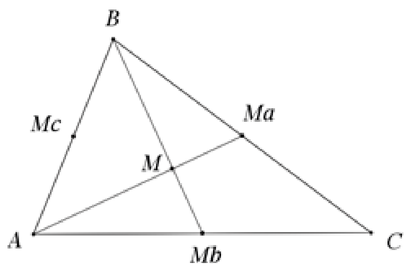
Medianerne i trekanter og i tetraedre

Sætning 6: Medianerne i en trekant
I enhver trekant gælder, at de tre medianer skærer hinanden i samme punkt, og at dette punkt deler hver af medianerne i forholdet 2:1
På vektorform: punktet M er bestemt ved:
$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}$$

Tegn en tilfældig trekant, *ABC*, og tegn medianerne fra *A* og fra *B*.

Medianerne skærer de modstående sider i henh. M_a og M_b.

Medianerne skærer hinanden i et punkt, vi kalder for *M*.

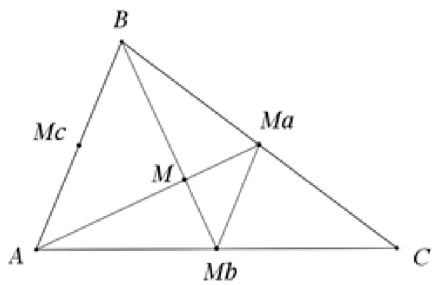


Geometrisk bevis

Vi skal vise, at punktet *M* deler medianerne i forholdet 2:1, dvs. vise, at $|BM| = 2\cdot|MM_b|$ og $|AM| = 2\cdot|MM_a|$. Kan vi vise det, så ville vi få samme resultat, hvis vi startede med medianerne M_a og M_c. Men det må betyde, at punktet *M* både er skæringspunkt for M_a og M_b og for M_a og M_c, dvs. medianerne skærer hinanden i det samme punkt *M*.

Når vi skal vise noget om et *forhold* mellem siderne, så er metoden normalt at lede efter ensvinklede trekanter.

Hvis vi placerer os i *C* og herfra skalerer trekant *ABC* ned med $\frac{1}{2}$, så vil *A* blive ført over i M_a og *B* over i M_b, og dermed linjen *AB* over i linjen fra M_a til M_b.
Heraf får vi, dels at linjerne *AB* og MM_a er parallelle, dels at $|M_aM_b| = \frac{1}{2}\cdot|AB|$.



1. Vis at trekanterne *MAB* og MM_aM_b er ensvinklede.

2. Vis at $|AM| = 2\cdot|MM_a|$ og $|BM| = 2\cdot|MM_b|$

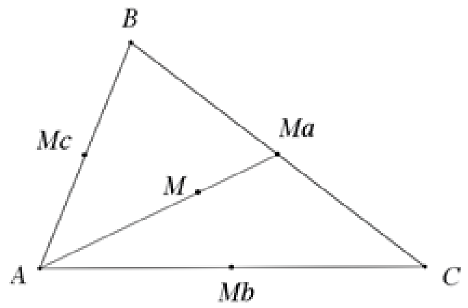
3. Forklar, hvordan vi med en anden tegning tilsvarende kunne nå frem til, at $|BM| = 2\cdot|MM_b|$ og $|CM| = 2\cdot|MM_c|$.

3. afslut nu selv beviset ved at argumentere for, at vi heraf kan slutte det, sætningen siger.

ISBN 9788770668279

Bevis med anvendelse af vektorer

I trekant *ABC* tegner vi medianen fra *A*, og afsætter punktet *M* på medianen således at $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM_a}$. Vi vil finde et udtryk for *M*, eller som vektor: for $\overrightarrow{OM}$, og ud fra dette argumentere for, at medianerne skærer hinanden i *M*.



1. Vis at:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM_a}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OM_a} - \overrightarrow{OA}\right)$$

2. Udnyt at M_a er midtpunkt, og anvend sætning 1 til at omskrive så vi før følgende udtryk:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}$$

3. Argumenter nu for, at uanset hvilken median vi var startet med, så ville vi få samme formel, og for, at dette viser sætningen.

Igen ser vi, at selvom det geometriske bevis kan være smukt i sit ræsonnement, så skal vi her hver gang mobilisere en ny viden om geometri, mens det vektorielle bevis igen hovedsageligt anvender indskudssætningen. Begge beviser bygger på den formodning om forholdet 2:1 som udtrykkes i sætningen. Hvornår man første gang indser dette ved vi ikke, men det er tidligt i den græske matematiks historie, og det er sikkert som meget andet opstået ud fra erfaringen - og derefter prøver man at bevise det.

Øvelse 1
Argumenter for, hvorfor medianernes skæringspunkt også kaldes for trekantens tyngdepunkt.
(*Hint: Vi forestiller os, at trekanten er en fysisk genstand med en ensartet masse, fx en pap-trekant. Argumenter først for at en median deler en trekant i to med ens areal. Tegn derefter linjer gennem hver af de to trekanter, der er parallelle med medianen og som har samme afstand til medianen. Vis at disse linjer har samme længde. Konkluder*)

Medianerne i et tetraeder

Sætning 7: Medianerne i et tetraeder
I et vilkårligt tetraeder *ABCD* skærer de 4 medianer hinanden i samme punkt M.
Punktet *M* er bestemt ved:

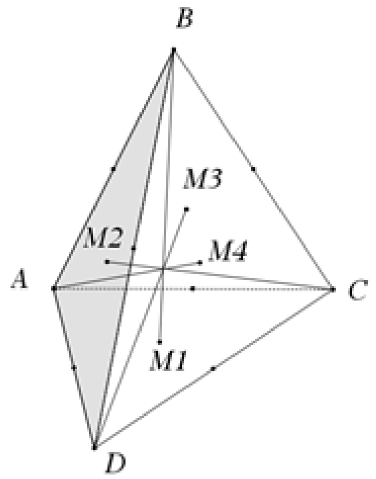
$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OC} + \tfrac{1}{4}\cdot\overrightarrow{OD}$$

ISBN 9788770668279

Vi tegner et tetraeder *ABCD* (en trekantet pyramide), og skal altså forestille os, at i trekanten i bunden rager punktet *D* ud af fladen, ud mod os.

Hver af de 4 sideflader er en trekant og for hver af dem bestemmer vi medianernes skæringspunkt. Det er på figuren markeret som M_1, M_2, M_3 og M_4 .

Tetraederets medianer er linjerne fra et hjørne til den modstående trekants medianpunkt (tyngdepunkt). Se figuren. Den ene påstand i sætningen er nu, at disse 4 linjer går gennem samme punkt. Den anden påstand er at dette punkt er "gennemsnittet" af de 4 hjørnepunkter.



Vi vil kun gennemføre et vektorielt bevis, da det geometriske bliver for indviklet i det generelle tilfælde. Vi vender tilbage til det geometriske bevis i tilfældet med et regulært tetraeder (alle sider har samme længde).

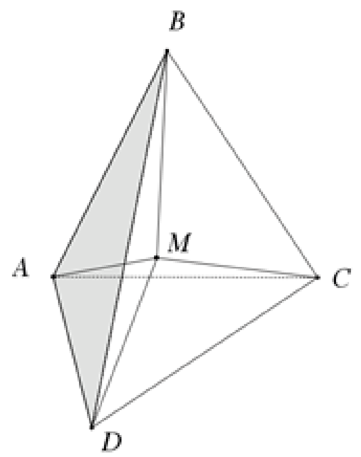
Lad M være bestemt ved at punktet ligger på medianen AM_4, og at det deler denne i forholdet 3:1. Dvs. $AM = \frac{3}{4} \cdot AM_4$. Dette skriver vi på vektorform og finder et udtryk for $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AM_4} \\ &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \ldots\end{aligned}$$

Øvelse 2

a) Argumenter for omskrivningerne og fuldfør selv disse, ved at udnytte sætning 6.

b) Argumenter for, at når vi har fundet dette udtryk for $\overrightarrow{OM}$, så vil punktet *M* være et fælles skæringspunkt for de fire medianer.



Man kan finde en spektakulær anvendelse af denne viden om tetraederet i Steen Markvorsens film, Skumstrukturer og minimalflader, og man kan arbejde videre med tetraederets egenskaber i det tilhørende projektmateriale. Filmen indgår i serien: Matematisk forskning. 10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger, som man kan få adgang til via Gymportalen.